

## Тема 4. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Диплом, это двадцать минут позора и кусок хлеба на всю жизнь. Временная функция многовариантна, характеристическое уравнение черт знает какого порядка, но система работает устойчиво. Стоит ли подводить под это дело еще и частотный анализ?  
Владимир Кузьмин. Новосибирский геофизик Уральской школы. XX в.

Ты никогда не будешь достаточно знать, если не будешь знать больше чем достаточно.  
Уильям Блейк.

## Содержание

## Введение.

1. Критерии устойчивости. Понятие устойчивости системы. Условие устойчивости САУ. Алгебраические критерии устойчивости. Критерий Рауса. Критерий Гурвица.
2. Частотные критерии устойчивости. Принцип аргумента. Критерий устойчивости Михайлова. Критерий устойчивости Найквиста.
3. Запас устойчивости систем. Понятие структурной устойчивости. Понятие запаса устойчивости. Анализ устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам.
4. Точность систем. Статическая точность. Динамическая точность.
5. Качество систем. Показатели качества систем управления. Показатели качества переходного процесса. Последовательное корректирующее устройство. Параллельное корректирующее устройство. Метод Солодовникова. Программы анализа качества процессов управления.
6. Случайные процессы в системах. Модели случайных сигналов. Фильтрация помех. Фильтр Винера. Частотная характеристика фильтра.

## ВВЕДЕНИЕ

Важнейшей задачей анализа динамических систем управления является решение вопроса об их устойчивости. Техническое понятие устойчивости систем автоматического управления отражает свойство технической системы не только стабильно работать в нормальных режимах, но и "не уходить вразнос" при отклонении всевозможных параметров системы от номинала и влиянии на систему дестабилизирующих воздействий, т. е. способности системе возвращаться к равносному состоянию, из которого она выводится возмущающими или управляющими воздействиями. Устойчивость системы - техническое требование в ряду более сложных требований, связанных с показателями качества и точности САУ.

## 4.1. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ [1, 7, 11, 12].

**Понятие устойчивости системы.** Система находится в состоянии равновесия, если при отсутствии воздействия на систему возмущающих факторов ошибка регулирования (разность между заданным и фактическим состоянием системы) стремится к нулю. Под устойчивостью понимается способность динамической системы возвращаться в равновесное состояние после окончания действия возмущения, нарушившего это равновесие. Неустойчивая система после воздействия возмущения удаляется от равновесного состояния или начинает совершать вокруг него колебания с нарастающей амплитудой.

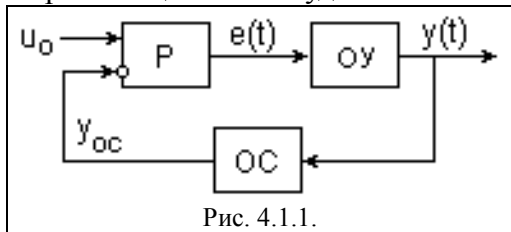


Рис. 4.1.1.

Возникновение неустойчивых (расходящихся) колебаний в системе можно проследить на примере следящей системы с обратной связью (рис. 4.1.1). Допустим, что в установленном состоянии равновесия при опорном сигнале  $u_0$  на регуляторе  $P$  выходное состояние объекта управления  $OU$  равно  $y_{уст}$ . Это состояние поддерживается сигналом рас-

согласования  $e_{уст}$ , который формируется в регуляторе  $P$  по разности опорного сигнала и сигнала обратной связи  $y_{oc-уст}$ , т.е.  $e_{уст} = u_0 - y_{oc-уст}$ . В первый момент включения системы в силу инерционности обратной связи  $y_{oc} = 0$ , а, следовательно,  $e(t) \gg e_{уст}$ , что вызывает нарастание выходной величины  $y(t)$ , которая будет стремиться к  $y(t) \gg y_{уст}$  по крайней мере, до тех пор, пока сигнал обратной связи не начнет уменьшать значение  $e(t)$ . Однако значительно возросшая величина  $y(t)$  через  $OC$  передается на вход регулятора системы и может настолько существенно уменьшить значение  $e(t)$ , что это может привести к последующему снижению величины выходного сигнала до значений  $y(t) \ll y_{уст}$ , т.е. к возникновению колебательного процесса относительно равновесного со-

стояния. При неблагоприятном соотношении параметров системы колебательный процесс может быть незатухающим и даже расходящимся. Пример такого процесса в концертной акустике хорошо известен – свист из динамиков, если коэффициент обратной связи от динамиков на микрофоны на определенных частотах становится положительным.

Устойчивость линейной системы определяется не характером возмущения, а структурой самой системы. Говорят, что система устойчива "в малом", если определен факт наличия устойчивости, но не определены ее границы. Система устойчива "в большом", когда определены границы устойчивости и то, что реальные отклонения не выходят за эти границы. Соответственно, и задача исследования систем на устойчивость может быть поставлена двояко:

- 1) устойчива ли система при заданном значении ее параметров;
- 2) в каких диапазонах можно изменять параметры системы, не нарушая ее устойчивости.

Вторая задача исследования имеет место при наладке и эксплуатации систем автоматического управления.

В соответствии с классическим методом решение дифференциального уравнения для системы ищется в виде:

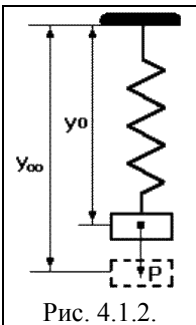
$$y(t) = y_{св}(t) + y_{вын}(t). \quad (4.1.1)$$

Здесь  $y_{св}(t)$  – свободная составляющая, общее решение однородного дифференциального уравнения с нулевой правой частью:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

т.е. когда все внешние воздействия сняты, и состояние системы определяются лишь собственной структурой.

Функция  $y_{вын}(t)$  представляет собой частное решение неоднородного дифференциального уравнения, под которым понимается уравнение с ненулевой правой частью. Физически это означает, что к системе приложено внешнее воздействие  $u(t)$ . Поэтому вторая составляющая общего решения называется вынужденной. Она определяет вынужденный установившийся режим работы системы при наличии на входе определенного воздействия  $u(t)$  или  $f(t)$  после окончания переходного процесса.



Можно провести аналогию между САУ и пружиной, колебания которой описываются аналогичным дифференциальным уравнением (рис. 4.1.2). Оттянем пружину, а затем отпустим, предоставив ее самой себе. Пружина будет колебаться в соответствии со свободной составляющей решения уравнения, характер колебаний будет определяться только структурой самой пружины. Если повесить к пружине груз, то на свободные колебания наложится внешняя сила  $P$ . После затухания колебаний, описываемых только свободной составляющей общего решения, система перейдет в новый установившийся режим, характеризуемый вынужденной составляющей  $y_{вын} = y(t \rightarrow \infty)$ . Если внешнее воздействие само будет изменяться по синусоидальному закону  $P = P_0 \sin(\omega t + \varphi)$ , то после затухания переходного процесса система будет совершать вынужденные колебания с той же частотой, что и вынуждающая сила, то есть  $y_{вын} = y_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$ .

Только устойчивая система является работоспособной. Основы строгой теории устойчивости динамических систем были разработаны акад. А. М. Ляпуновым в работе «Общая задача об устойчивости движения» (1892 г.). Понятия об устойчивости, вытекающие из этой работы, заключаются в следующем.

Если система описывается линейным дифференциальным уравнением, то ее устойчивость не зависит от величины возмущения. Линейная система, устойчивая при малых возмущениях, будет устойчива и при больших. Нелинейные системы могут быть устойчивы при малых возмущениях и неустойчивы при больших.

Если система описывается линейным дифференциальным уравнением, то ее устойчивость не зависит от величины возмущения. Линейная система, устойчивая при малых возмущениях, будет устойчива и при больших. Нелинейные системы могут быть устойчивы при малых возмущениях и неустойчивы при больших.



Наглядное представление о системах, устойчивых при малых и неустойчивых при больших возмущениях, дает поведение шара во впадине на рисунке слева. При малых воздействиях на шар и его малых отклонениях не выше края впадины шар возвращается в исходное положение и система шар - поверхность устойчива. При больших воздействиях с отклонением за край впадины шар не возвращается в исходное положение - система неустойчива. Поэтому устойчивость систем исследуется отдельно для случая малых и больших возмущений.

Проблема устойчивости обычно возникает в замкнутых системах из-за влияния обратной связи. Поэтому в дальнейшем устойчивость исследуется на примерах замкнутых систем, хотя методы исследования устойчивости универсальны.

**Условие устойчивости САУ.** Применительно к сигналам в САУ частное решение для вынужденной составляющей обычно имеет простой вид, не влияющий на устойчивость. Вопрос устойчивости сводится к выяснению устойчивости свободного движения системы и требует анализа характера решения уравнения свободного движения, составленного относительно отклонения выходной величины  $y(t)$  от установившегося состояния.

Как известно, передаточная функция любой линейной динамической системы может быть приведена к виду:

$$W(p) = K(p)/H(p) = [b_0p^m + b_1p^{m-1} + \dots + b_{m-1}p + b_m] / [a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_{n-1}p + a_n], \quad (4.1.2)$$

где  $a$  и  $b$  - постоянные коэффициенты, которые представляют собой вещественные числа и выражаются через конкретные физические параметры элементов системы. Полином  $K(p)$  может не содержать членов с оператором  $p$  и представлять собой произведение коэффициентов передачи звеньев, образующих систему.

Важнейшим свойством выражения (4.1.2) является условие  $n \geq m$ , т. е. порядок полинома  $H(p)$  знаменателя передаточной функции не ниже порядка полинома  $K(p)$  ее числителя. Это условие вытекает из физических свойств звеньев реальных динамических систем.

Из выражения (4.1.2) передаточной функции системы можно получить дифференциальное уравнение системы в целом, как в разомкнутом, так и в замкнутом состоянии.

**Уравнения разомкнутых систем.** Если выражение (4.1.2) является передаточной функцией разомкнутой системы, то выражение

$$u(p) K(p) = y(p) H(p), \quad (4.1.3)$$

будет представлять собой операторное уравнение разомкнутой системы (уравнение в изображениях переменных). Положив в (4.1.3)  $u(p)=0$ , получим операторное уравнение свободного движения в разомкнутой линейной динамической системе:

$$y(p) H(p) = 0. \quad (4.1.4)$$

Переходя в (4.1.4) к оригиналам, т. е. от операторного уравнения к дифференциальному, и обозначив  $y(t) = x$ , получаем дифференциальное уравнение свободного движения в разомкнутой линейной динамической системе

$$a_0 d^n x/dt^n + a_1 d^{n-1} x/dt^{n-1} + \dots + a_{n-1} dx/dt + a_n = 0 \quad (4.1.5)$$

Характеристическим уравнением, соответствующим дифференциальному уравнению (4.1.5), будет

$$H(p) = 0, \quad a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (4.1.6)$$

Отсюда следует: приравненный нулю знаменатель передаточной функции разомкнутой линейной динамической системы является характеристическим уравнением, соответствующим дифференциальному уравнению разомкнутой системы. В связи с этим многочлен  $H(p)=0$  называется характеристическим оператором системы.

**Уравнение замкнутых систем.** Пусть (4.1.2) является передаточной функцией разомкнутой системы. Для замкнутой системы в силу отрицательной главной обратной связи имеем  $u(t) = -y(t)$ , и (4.1.3) принимает вид  $-K(p) y(p) = H(p) y(p)$ . Операторное уравнение свободного движения в замкнутой системе:

$$[K(p) + H(p)] y(p) = 0, \quad (4.1.7)$$

где  $K(p)$ ,  $H(p)$  - соответственно числитель и знаменатель передаточной функции разомкнутой системы;  $y(p)$  — изображение координаты системы в точке ее замыкания.

На основании (4.1.7) можно записать характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению свободного движения в замкнутой системе

$$K(p) + H(p) = 0. \quad (4.1.8)$$

С учетом того, что  $W_{oc}(p) = 1$ , передаточная функция замкнутой системы:

$$W_{зс}(p) = W(p) / [1 + W(p)], \quad (4.1.9)$$

где  $W(p) = K(p)/H(p)$  - передаточная функция разомкнутой системы. Или:

$$W_{зс}(p) = K(p) / [K(p) + H(p)] = K(p) / H_{зс}(p). \quad (4.1.9')$$

На этом основании характеристическое уравнение замкнутой системы можно записать в виде

$$H_{зс}(p) = K(p) + H(p) = 0. \quad (4.1.10)$$

Таким образом, приравненная нулю сумма полинома числителя и полинома знаменателя передаточной функции разомкнутой системы или приравненный нулю полином знаменателя передаточной функции замкнутой системы являются характеристическим уравнением, соответствующим дифференциальному уравнению свободного движения в замкнутой системе.

Корни характеристических уравнений систем могут быть либо вещественными, либо парно комплексно сопряженными. Решение однородного уравнения выражается через корни характеристического уравнения и коэффициенты перед экспонентами, которые могут быть вычислены через вычеты:

$$y_{св}(t) = \sum_{n=1}^N C_n \exp(p_n t). \quad (4.1.11)$$

Условие устойчивости систем по Ляпунову формулируется так: *в устойчивой системе свободная составляющая решения уравнения динамики, записанного в отклонениях, должна стремиться к нулю, то есть затухать.*

Из формулы (4.1.11) нетрудно вывести условие устойчивости линейных динамических систем: линейная система будет устойчива, если все вещественные корни и все вещественные части комплексных корней характеристического уравнения, соответствующего исходному дифференциальному уравнению свободного движения системы, будут отрицательными, что дает затухающие по экспоненте решения. Если имеются чисто мнимые корни, то в переходном процессе будут гармонические незатухающие компоненты.

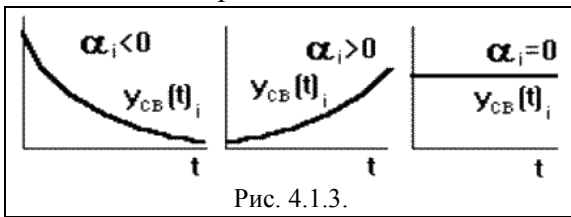


Рис. 4.1.3.

Каждому отрицательному вещественному корню  $\alpha_i$  соответствует экспоненциально затухающая во времени составляющая  $y_{св}(t)_i$ , каждому положительному - экспоненциально расходящаяся, каждому нулевому корню соответствует  $y_{св}(t)_i = \text{const}$  (рис. 4.1.3).

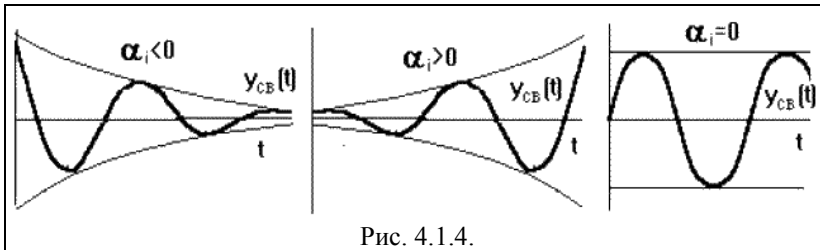


Рис. 4.1.4.

Пара комплексно сопряженных корней с отрицательной вещественной частью определяет затухающие колебания с частотой  $\omega_i$ , при положительной вещественной части - расходящиеся колебания, при нулевой - незатухающие (рис. 4.1.4).

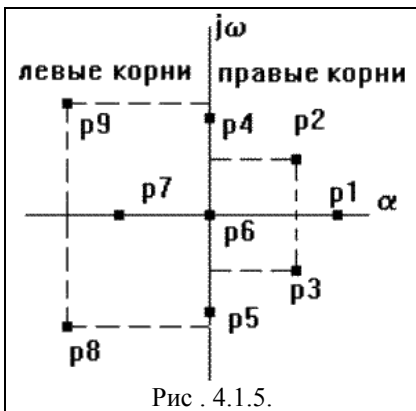


Рис. 4.1.5.

Исходя из расположения на комплексной плоскости, корни с отрицательными вещественными частями называются левыми, с положительными - правыми (рис. 4.1.5). Поэтому условие устойчивости линейной САУ можно сформулировать следующим образом: *для того, чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения были левыми.* Если хотя бы один корень правый, то система неустойчива. Если один из корней равен нулю, а остальные левые, то система находится на границе аperiодической устойчивости. Если равны нулю вещественные части одной или нескольких пар комплексно сопряженных корней, то система находится на границе колебательной устойчивости.

Таким образом, исследование устойчивости системы сводится к определению знаков вещественных частей корней характеристического уравнения системы. Но решение уравнений четвертой и более высоких степеней может встречать затруднения. Поэтому применяются косвенные методы анализа устойчивости без определения корней характеристического уравнения, по определенным критериям устойчивости.

Проверку факта отрицательности вещественных частей корней можно выполнять тремя способами:

- вычислив корни непосредственно, с использованием готовых программ;
- связав расположение корней с коэффициентами характеристического уравнения для последующего аналитического исследования;
- судить об устойчивости по частотным характеристикам системы.

Первые два способа называют алгебраическими, последний - частотным. В инженерной практике необходимо иметь эффективные и удобные правила проверки устойчивости. Однако сам по себе критерий устойчивости не обязан быть необходимым и достаточным условием устойчивости системы.

### Алгебраические критерии устойчивости.

**Необходимое условие устойчивости.** Если все корни характеристического уравнения левые (вещественные части всех корней отрицательны), то все коэффициенты уравнения имеют один знак, т.е. все значения  $a_n$  либо больше нуля, либо меньше нуля одновременно. Равенство коэффициентов нулю не допускается (граница устойчивости). Доказательство очень простое и заключается в разложении полинома на простейшие множители. Они могут быть вещественные или комплексно - сопряжённые. Объединим последние в пары и перемножим, при этом в скобках нет ни одного отрицательного числа, а, следовательно, знак всех членов характеристического уравнения будет определяться знаком коэффициента  $a_0$ . В дальнейшем будем рассматривать только уравнения, где  $a_0 > 0$ . В противном случае уравнение умножается на -1.

Рассмотренное условие при порядке системы больше 2 является необходимым, но не достаточным условием, и применяется для отсеивания заведомо неустойчивых систем. Необходимые и достаточные условия дают алгебраические критерии Рауса и Гурвица.

**Критерий Рауса.** Используется в виде алгоритма, по которому заполняется специальная таблица с использованием коэффициентов характеристического уравнения:

- 1) в первой строке записываются коэффициенты уравнения с четными индексами в порядке их возрастания;
- 2) во второй строке – аналогично коэффициенты с нечетными индексами;
- 3) остальные элементы таблицы определяется по формуле:  $c_{k,i} = c_{k+1,i-2} - r_i c_{k+1,i-1}$ , где  $r_i = c_{1,i-2}/c_{1,i-1}$ ,  $i \geq 3$  - номер строки,  $k$  - номер столбца.
- 4) Число строк таблицы на единицу больше порядка характеристического уравнения.

$r_i$	$i \backslash k$	1	2	3	4
-	1	$c_{11} = a_0$	$c_{21} = a_2$	$c_{31} = a_4$	...
-	2	$c_{12} = a_1$	$c_{22} = a_3$	$c_{32} = a_5$	...
$r_3 = c_{11}/c_{12}$	3	$c_{13} = c_{21} - r_3 c_{22}$	$c_{23} = c_{31} - r_3 c_{32}$	$c_{33} = c_{41} - r_3 c_{42}$	...
$r_4 = c_{12}/c_{13}$	4	$c_{14} = c_{22} - r_4 c_{23}$	$c_{24} = c_{32} - r_4 c_{33}$	$c_{34} = c_{42} - r_4 c_{43}$	...
...	...	...	...	...	...

Чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первого столбца таблицы Рауса  $c_{11}, c_{12}, c_{13}, \dots$  были положительными. Если это не выполняется, то система неустойчива, а количество правых корней равно числу перемен знака в первом столбце.

Достоинство - критерий прост в использовании независимо от порядка характеристического уравнения. Он удобен для использования на ЭВМ. Его недостаток - малая наглядность, трудно судить о степени устойчивости системы, насколько далеко отстоит она от границы устойчивости.

$\Delta =$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	$a_9$	...	0
	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$	$a_8$	...	0
	0	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	...	0
	0	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$	...	0
	0	0	$a_1$	$a_3$	$a_5$	...	0
	0	0	0	0	0	...	$a_n$

Рис. 4.1.6.

**Критерий Гурвица.** Гурвиц предложил другой критерий устойчивости. Из коэффициентов характеристического уравнения строится определитель Гурвица  $\Delta$  по алгоритму:

- 1) по главной диагонали слева направо выставляются все коэффициенты характеристического уравнения от  $a_1$  до  $a_n$ ;
- 2) от каждого элемента диагонали вверх и вниз достраиваются столбцы определителя так, чтобы индексы убывали сверху вниз;
- 3) на место коэффициентов с индексами меньше нуля или больше  $n$  ставятся нули.

Чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения и все  $n$  главных диагональных миноров матрицы Гурвица были положительными. Число определителей Гурвица равно порядку характеристического уравнения  $n$ .

Критерий Гурвица применяют при  $n \leq 5$ . При больших порядках возрастает число определителей, и процесс становится трудоемким. Недостаток критерия Гурвица - малая наглядность. Достоинство - удобен для реализации на ЭВМ.

#### 4.2. ЧАСТОТНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ [7, 8, 11].

Частотные методы исследования устойчивости основаны на связи расположения корней характеристического полинома (обозначим его функцией  $D(p)$  для любого типа систем) с годографом этого полинома на комплексной плоскости, т.е. с графиком комплексной функции  $D(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$ . Это графоаналитические методы, позволяющие по виду частотных характеристик систем судить об их устойчивости. Их достоинство - в простой геометрической интерпретации, наглядности и в отсутствии ограничений на порядок дифференциального уравнения.

**Принцип аргумента.** Запишем характеристический полином в виде

$$D(p) = a_0 (p-p_1) (p-p_2) \dots (p-p_n) = 0,$$

Его корни:  $p_i = a_i + j\omega_i = |p_i| \exp(j \arg(p_i))$ , где  $\arg(p_i) = \arctg(\omega_i/a_i) + k\pi$ ,  $|p_i|$  - значения модулей корней.

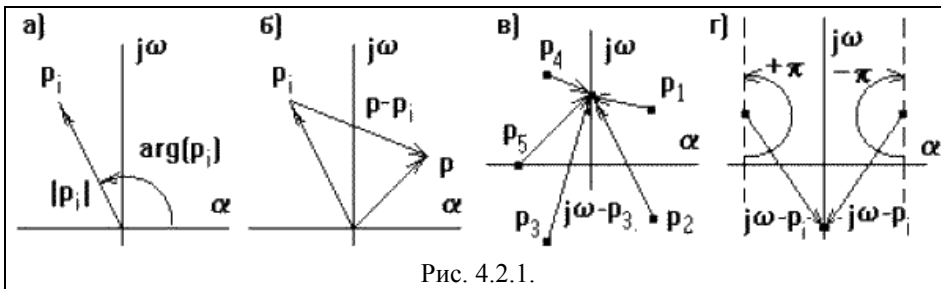


Рис. 4.2.1.

Каждый корень можно изобразить вектором на комплексной плоскости (рис. 4.2.1а), тогда разность  $p - p_i$  изобразится разностью векторов (рис. 4.2.1б), где  $p$  - любое число.

Если изменять значение  $p$  произвольным образом,

то конец вектора  $p - p_i$  будет перемещаться по комплексной плоскости, а его начало будет оставаться неподвижным, так как  $p_i$  - это конкретное неизменное значение. В частном случае, если на вход системы подавать гармонические колебания с различной частотой  $\omega$ , то  $p = j\omega$ , а характеристический полином принимает вид:

$$D(j\omega) = a_0 (j\omega - p_1) (j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n).$$

При этом концы векторов  $j\omega - p_i$  будут находиться на мнимой оси (рис. 4.2.1в). Если менять  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то каждый вектор  $j\omega - p_i$  будет поворачиваться относительно своего начала  $p_i$  на угол  $+\pi$  для левых и  $-\pi$  для правых корней (рис. 4.2.1г).

Характеристический полином можно представить в виде

$$D(j\omega) = |D(j\omega)| \exp(j \arg(D(j\omega))),$$

где  $|D(j\omega)| = a_0 |j\omega - p_1| |j\omega - p_2| \dots |j\omega - p_n|$ ,  $\arg(D(j\omega)) = \arg(j\omega - p_1) + \arg(j\omega - p_2) + \dots + \arg(j\omega - p_n)$ .

Пусть из  $n$  корней  $m$  - правые, а  $n-m$  - левые, тогда угол поворота вектора  $D(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до  $\infty$  равен

$$\Delta \arg(D(j\omega)) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \sum_{i=1}^n \arg(j\omega - p_i) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = (n-m)\pi - m\pi,$$

или при изменении  $\omega$  от 0 до  $+\infty$ :

$$\Delta \arg(D(j\omega)) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = (n - 2m) (\pi/2). \quad (4.2.1)$$

Отсюда вытекает правило: изменение аргумента вектора  $D$  при изменении частоты от  $-\infty$  до  $+\infty$  равно разности между числом левых и правых корней уравнения  $D(p) = 0$ , умноженному на  $\pi$ , а при изменении частоты от 0 до  $+\infty$  эта разность умножается на  $\pi/2$ .

Это и есть принцип аргумента. Он положен в основе всех частотных критериев устойчивости. Мы рассмотрим два наиболее распространенных критерия: критерий Михайлова и критерий Найквиста.

**Критерий устойчивости Михайлова.** Так как для устойчивой системы число правых корней  $m = 0$ , то угол поворота вектора  $D(j\omega)$  составит

$$\Delta \arg(D(j\omega)) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = n\pi/2. \quad (4.2.2)$$

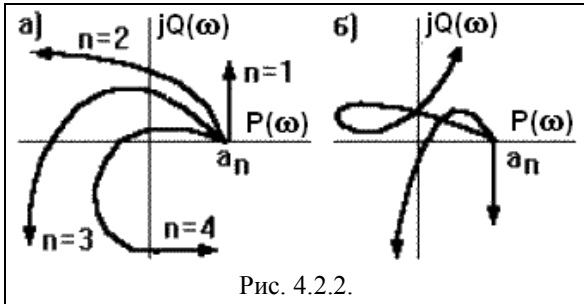


Рис. 4.2.2.

Система будет устойчива, если вектор  $D(j\omega)$  при изменении частоты от 0 до  $+\infty$  повернется на угол  $n\pi/2$ . При этом конец вектора опишет кривую, называемую годографом Михайлова. Для построения годографа выражение (4.1.6) записывается с заменой  $p$  на  $j\omega$  в форме:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = D(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где  $P(\omega)$  - вещественная часть, как сумма всех членов

характеристического уравнения, содержащих  $j$  в четных степенях,  $Q$  - мнимая часть выражения. Годограф начинается на положительной полуоси при  $D(0) = a_n$ , и, при изменении частоты от 0 до  $\infty$ , последовательно проходит против часовой стрелки  $n$  квадрантов комплексной плоскости, с уходом в бесконечность в  $n$ -ом квадранте (рис. 4.2.2а).

Если это правило нарушается (например, число проходимых кривой квадрантов не равно  $n$ , или нарушается последовательность прохождения квадрантов (рис. 4.2.2б)), то такая система неустойчива - это и есть необходимое и достаточное условие устойчивости по критерию Михайлова.

Критерий удобен своей наглядностью и используется, если известно уравнение замкнутой системы. Если кривая проходит вблизи начала координат, то система находится вблизи границы устойчивости и наоборот.

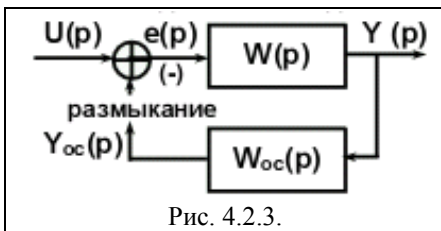


Рис. 4.2.3.

**Критерий устойчивости Найквиста.** Этот критерий

основан на связи свойства устойчивости замкнутой системы с формой АФЧХ разомкнутой устойчивой системы. Разомкнутой системой являются все последовательно соединенные блоки от входа системы до точки замыкания обратной связи (рис. 4.2.3). Исследование разомкнутой системы проще, чем замкнутой, и его можно производить экспериментально.

Передаточная функция  $W_{pc}$  разомкнутой системы:

$$W_{pc}(j\omega) = K_{pc}(j\omega)/H_{pc}(j\omega),$$

с углом поворота фазы в соответствии с выражением (4.2.2):

$$\Delta \arg H_{pc}(j\omega) = n\pi/2, \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (4.2.3)$$

АФЧХ замкнутой системы описывается выражением:

$$W_{zc}(j\omega) = W_{pc}(j\omega) / [1 + W_{pc}(j\omega)]. \quad (4.2.4)$$

Обозначим знаменатель этого выражения через  $W_1(j\omega)$ :

$$W_1(j\omega) = 1 + W_{pc}(j\omega) = 1 + K_{pc}(j\omega)/H_{pc}(j\omega) = H(j\omega)/H_{pc}(j\omega), \quad (4.2.5)$$

где  $H(j\omega) = K_{pc}(j\omega) + H_{pc}(j\omega)$ , характеристический полином замкнутой системы при  $p=j\omega$ .

В соответствии со свойствами передаточных функций порядок полинома  $N(p)$  не превышает порядка полинома  $H_{pc}(p)$ , т.к.  $N(p) = K_{pc}(p) + H_{pc}(p)$ , а порядок полинома  $K_{pc}(p)$  меньше порядка полинома  $H_{pc}(p)$ . Поэтому критерий Михайлова для замкнутой системы соответствует выражению:

$$\Delta \arg H(j\omega) = (n - 2m) (\pi/2), \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (4.2.6)$$

где  $m$  - число правых корней системы, имеющей в замкнутом состоянии характеристический полином  $H(p)=0$ .

Из (4.2.5) следует:

$$\Delta \arg W_1(j\omega) = \Delta \arg H(j\omega) - \Delta \arg H_{pc}(j\omega).$$

С учетом (4.2.3):

$$\Delta \arg W_1(j\omega) = (n - 2m) (\pi/2) - n\pi/2 = -m\pi. \quad (4.2.7)$$

В устойчивой замкнутой системе правых корней в характеристическом уравнении нет, т. е.  $m=0$ , а, следовательно, условием устойчивости замкнутой системы будет:

$$\Delta \arg W_1(j\omega) = 0. \quad (4.2.8)$$

Условие (4.2.8) выполняется только тогда, когда кривая  $W_1(j\omega)$  при изменении частоты от 0 до  $\infty$  не охватывает начала координат комплексной плоскости. Действительно, только в этом случае результирующий поворот вектора  $W_1(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  будет равен нулю, так как возрастание угла  $\varphi(\omega)$ , обусловленное движением вектора  $W_1(j\omega)$  в положительном направлении (против часовой стрелки), будет компенсироваться таким же убыванием  $\varphi(\omega)$ , обусловленным

движением вектора  $W_1(j\omega)$  в отрицательном направлении (по часовой стрелке).

Как видно из (4.2.5), переход на комплексной плоскости от годографа вектора  $W_1(j\omega)$  к годографу вектора АФЧХ разомкнутой системы  $W_{pc}(j\omega)$  осуществляется сдвигом кривой  $W_1(j\omega)$  влево на  $-1$ , так как  $W_{pc}(j\omega) = W_1(j\omega) - 1$ . С учетом этой операции, получаем следующую формулировку амплитудно-фазового критерия устойчивости Найквиста: линейная динамическая система, устойчивая в разомкнутом состоянии, устойчива и в замкнутом состоянии, если АФЧХ разомкнутой системы  $W_{pc}(j\omega)$  при изменении частоты от  $0$  до  $\infty$  не охватывает на комплексной плоскости точку с координатами  $(-1; j0)$  (рис. 4.2.4, годограф 2).

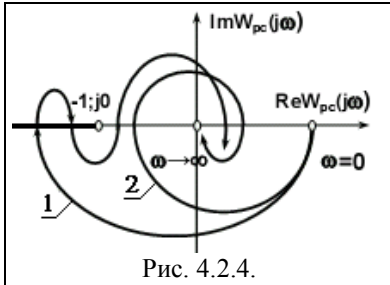


Рис. 4.2.4.

Более общая формулировка критерия Найквиста относится к системам, имеющим так называемую АФЧХ второго рода (рис. 4.2.4, годограф 1), когда  $W_{pc}(j\omega)$  пересекает (неограниченное количество раз) вещественную ось левее точки  $\text{Re } W_{pc}(\omega) = -1$ . Будем считать положительным переход годографа через вещественную ось, если он совершается сверху вниз, и отрицательным, если он совершается снизу вверх. Для таких годографов критерий Найквиста формулируется в следующем виде: линейная динамическая система, устойчивая

в разомкнутом состоянии, устойчива и в замкнутом состоянии, если при изменении частоты от  $0$  до  $+\infty$  разность между числом положительных переходов годографа АФЧХ разомкнутой системы через участок вещественной оси  $(-1; -\infty)$  и числом отрицательных переходов равна нулю. Из этого условия видно, что система, устойчивая в разомкнутом состоянии и имеющая АФЧХ в форме кривой 1 на рис. 4.2.4, устойчива и в замкнутом состоянии.

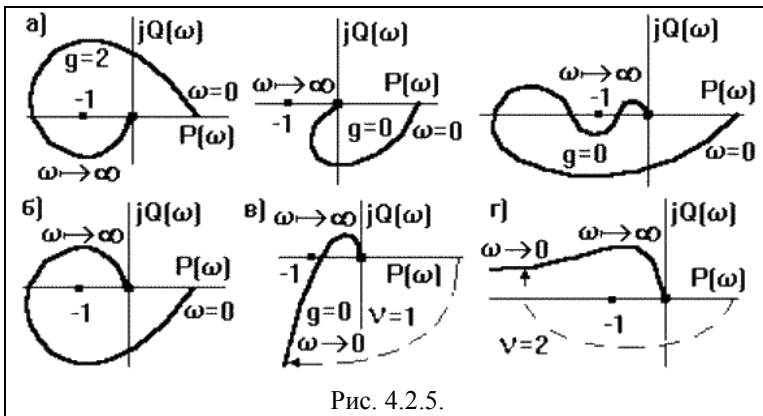


Рис. 4.2.5.

На рис. 4.2.5а приведены АФЧХ разомкнутых САУ, устойчивых в замкнутом состоянии, на рис. 4.2.5б - замкнутая САУ неустойчива.

На рис. 4.2.5в и 4.2.5г показаны АФЧХ разомкнутых астатических САУ, соответственно устойчивых и неустойчивых в замкнутом состоянии. Их особенность в том, что АФЧХ при  $\omega \rightarrow 0$  уходит в бесконечность. В этом случае при использовании критерия Найквиста ее мысленно замыкают на вещественную ось по

дуге окружности бесконечно большого радиуса.

Критерий Найквиста нагляден. Он позволяет не только выявить, устойчива ли система, но и, в случае, если она неустойчива, наметить меры по достижению устойчивости.

### 4.3. ЗАПАС УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ [7].

**Понятие структурной устойчивости.** Астатическая система может быть неустойчивой по двум причинам: неподходящий состав динамических звеньев и неподходящие значения параметров звеньев.

Системы, неустойчивые по первой причине, называются структурно неустойчивыми. Это означает, что изменением параметров системы нельзя добиться ее устойчивости, нужно менять ее структуру.

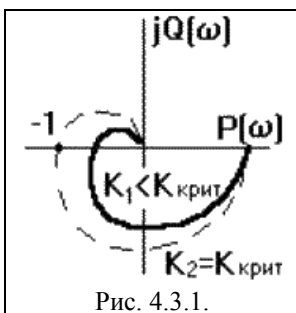


Рис. 4.3.1.

Например, если система состоит из любого количества инерционных и колебательных звеньев, она имеет вид, показанный на рис. 4.3.1. При увеличении коэффициента усиления системы  $K$  каждая точка ее АФЧХ удаляется от начала координат, пока при некотором значении  $K_{\text{крит}}$  АФЧХ не пересечет точку  $(-1, j0)$ . При дальнейшем увеличении  $K$ , система будет неустойчива. И, наоборот, при уменьшении  $K$  такую систему, в принципе, можно сделать устойчивой, поэтому ее называют структурно устойчивой.

Если система астатическая, то  $n$  - порядок астатизма, равен количеству последовательно включенных интеграторов. При ее размыкании характе-



ристическое уравнение системы имеет нулевые корни, поэтому при  $\omega \rightarrow \infty$  АФЧХ стремится к  $\infty$  (рис. 4.2.5в и 4.2.5г). Например, пусть  $W_p(p) = K/(p(Tp+1))$ , тогда АФЧХ разомкнутой системы:

$$W(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega T + 1)} = \frac{K}{j\omega - \omega^2 T} = \frac{K\omega^2 T - jK\omega}{\omega^2 + \omega^4 T^2} = P(\omega) + jQ(\omega).$$

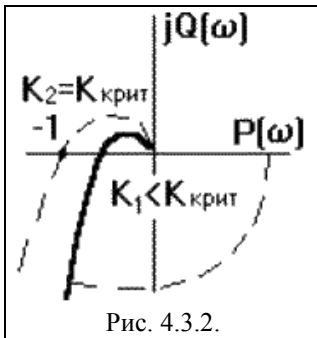


Рис. 4.3.2.

Так как порядок знаменателя больше порядка числителя, то при  $\omega \rightarrow 0$  имеем  $P(\omega) \rightarrow \infty$ ,  $Q(\omega) \rightarrow -j\infty$ . Подобная АФЧХ представлена на рис. 4.3.2. Так как АФЧХ терпит разрыв, трудно сказать, охватывает ли она точку  $(-1, j0)$ . В этом случае пользуются следующим приемом: если АФЧХ терпит разрыв, уходя в бесконечность при  $\omega \rightarrow 0$ , ее дополняют мысленно полуокружностью бесконечного радиуса, начинающейся на положительной вещественной полуоси и продолжающейся до АФЧХ в отрицательном направлении. После этого можно применить критерий Найквиста. Как видно из рисунка, система, имеющая одно интегрирующее звено, является структурно устойчивой.

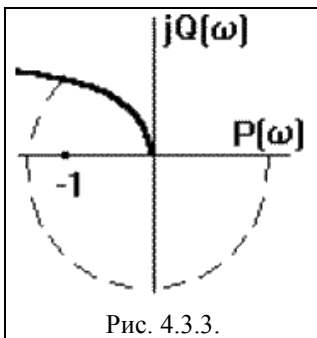


Рис. 4.3.3.

Если система имеет два интегрирующих звена (порядок астатизма 2), ее АФЧХ уходит в бесконечность во втором квадранте (рис. 4.3.3). Например, пусть  $W_p(p) = K/(p^2(Tp+1))$ , тогда АФЧХ системы:

$$W(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2(j\omega T + 1)} = \frac{K}{-\omega^2 - j\omega^3 T} = \frac{-K\omega^2 + jK\omega^3 T}{\omega^4 + \omega^6 T^2} = P(\omega) + jQ(\omega).$$

При  $\omega \rightarrow 0$  имеем  $P(\omega) \rightarrow -\infty$ ,  $Q(\omega) \rightarrow j\infty$ . Такая система не будет устойчива ни при каких значениях параметров, то есть она структурно неустойчива.

Структурно неустойчивую систему можно сделать устойчивой, включив в нее корректирующие звенья (например, дифференцирующие) или изменив структуру системы, например, с помощью местных обратных связей.

**Понятие запаса устойчивости.** В условиях эксплуатации параметры системы по тем или иным причинам могут меняться в определенных пределах (старение, температурные колебания и т.п.). Эти колебания параметров могут привести к потере устойчивости системы, если она работает вблизи границы устойчивости. Поэтому стремятся спроектировать систему так, чтобы она работала вдали от границы устойчивости. Степень этого удаления называют запасом устойчивости.

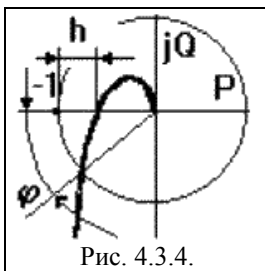


Рис. 4.3.4.

Согласно критерию Найквиста, чем дальше АФЧХ от критической точки  $(-1, j0)$ , тем больше запас устойчивости. Различают запасы устойчивости по модулю и по фазе.

Запас устойчивости по модулю характеризует удаление годографа АФЧХ разомкнутой системы от критической точки в направлении вещественной оси и определяется расстоянием  $h$  от критической точки до точки пересечения годографом оси абсцисс (рис. 4.3.4).

Запас устойчивости по фазе характеризует удаление годографа от критической точки по дуге окружности единичного радиуса и определяется углом  $\varphi$  между отрицательным направлением вещественной полуоси и лучом, проведенным из начала координат в точку пересечения годографа с единичной окружностью.

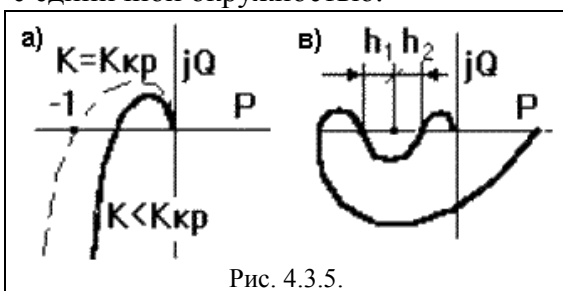


Рис. 4.3.5.

Как уже отмечалось, с ростом коэффициента передачи разомкнутой системы растет модуль каждой точки АФЧХ и при некотором значении  $K = K_{кр}$  АФЧХ пройдет через критическую точку (рис. 4.3.5а) и попадет на границу устойчивости, а при  $K > K_{кр}$  замкнутая система станет неустойчива. Однако в случае АФЧХ типа 1 (рис. 4.2.4) (получаются из-за наличия внутренних обратных связей) не только увеличение, но и уменьшение

$K$  может привести к потере устойчивости замкнутых систем (рис. 4.3.5в). В этом случае запас устойчивости определяется двумя отрезками  $h_1$  и  $h_2$ , заключенными между критической точкой и АФЧХ.

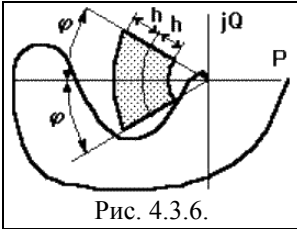


Рис. 4.3.6.

Обычно при создании системы задаются требуемыми запасами устойчивости  $h$  и  $\varphi$ , за пределы которых она выходить не должна. Эти пределы выставляются в виде сектора, вычерчиваемого вокруг критической точки, в который АФЧХ разомкнутой системы входить не должна (рис. 4.3.6).

**Анализ устойчивости по ЛЧХ.** Оценку устойчивости по критерию Найквиста удобнее производить по ЛЧХ разомкнутой системы. Очевидно, что каждой точке АФЧХ будут соответствовать определенные точки

ЛАЧХ и ЛФЧХ.

Пусть известны частотные характеристики двух разомкнутых систем (1 и 2), отличающихся друг от друга только коэффициентом передачи  $K_1 < K_2$ . Пусть первая система устойчива в замкнутом состоянии, вторая нет (рис. 4.3.7).

Если  $W_1(p)$  - передаточная функция первой системы, то передаточная функция второй системы  $W_2(p) = K \cdot W_1(p)$ , где  $K = K_2/K_1$ . Вторую систему можно предста-

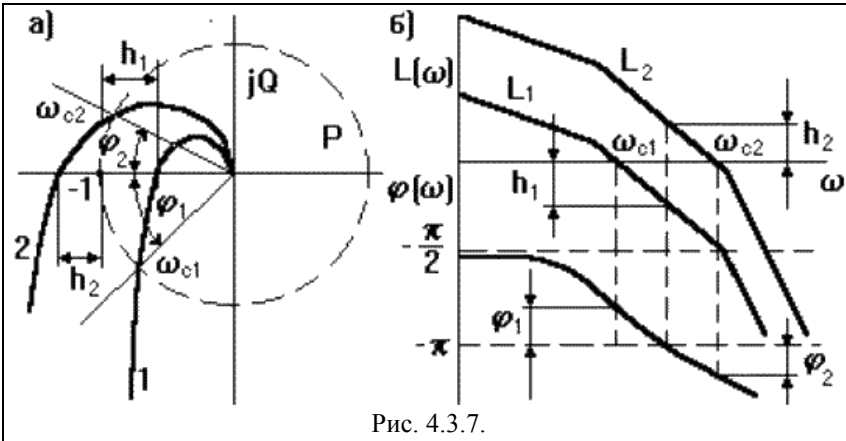


Рис. 4.3.7.

вить последовательной цепочкой из двух звеньев с передаточными функциями  $K$  (Безинерционное звено) и  $W_1(p)$ , поэтому результирующие ЛЧХ строятся как сумма ЛЧХ каждого из звеньев. Поэтому ЛАЧХ второй системы:  $L_2(\omega) = 20 \lg K + L_1(\omega)$ , а ЛФЧХ:  $\varphi_2(\omega) = \varphi_1(\omega)$ .

Пересечениям АФЧХ вещественной оси соответствует значение фазы  $\varphi = -\pi$ . Это соответствует точке пересечения ЛФЧХ  $\varphi = -\pi$  линии координатной сетки. При этом, как видно на АФЧХ, амплитуды  $A_1(\omega) < 1$ ,  $A_2(\omega) > 1$ , что соответствует на ЛАЧХ значениям  $L_1(\omega) = 20 \lg A_1(\omega) < 0$  и  $L_2(\omega) > 0$ .

Сравнивая АФЧХ и ЛФЧХ можно заключить, что система в замкнутом состоянии будет устойчива, если значению ЛФЧХ  $\varphi = -\pi$  будут соответствовать отрицательные значения ЛАЧХ и наоборот. Запасам устойчивости по модулю  $h_1$  и  $h_2$ , определенным по АФЧХ соответствуют расстояния от оси абсцисс до ЛАЧХ в точках, где  $\varphi = -\pi$ , но в логарифмическом масштабе.

Особыми точками являются точки пересечения АФЧХ с единичной окружностью. Частоты  $\omega_{c1}$  и  $\omega_{c2}$ , при которых это происходит, называют частотами среза.

В точках пересечения  $A(\omega) = 1 \Rightarrow L(\omega) = 0$  - ЛАЧХ пересекает горизонтальную ось. Если при частоте среза фаза АФЧХ  $\varphi_{c1} > -\pi$  (рис. 4.3.7а кривая 1), то замкнутая система устойчива. На рис. 4.3.7б это выглядит так, что пересечению ЛАЧХ горизонтальной оси соответствует точка ЛФЧХ, расположенная выше линии  $\varphi = -\pi$ . И, наоборот, для неустойчивой замкнутой системы (рис. 4.3.7а кривая 2)  $\varphi_{c2} < -\pi$ , поэтому при  $\omega = \omega_{c2}$  ЛФЧХ проходит ниже линии  $\varphi = -\pi$ . Угол  $\varphi_1 = \varphi_{c1} - (-\pi)$  является запасом устойчивости по фазе. Этот угол соответствует расстоянию от линии  $\varphi = -\pi$  до ЛФЧХ.

Исходя из сказанного, критерий устойчивости Найквиста по логарифмическим ЧХ, в случаях, когда АФЧХ только один раз пересекает отрезок вещественной оси  $[-\infty; -1]$ , можно сформулировать так: для того, чтобы замкнутая система была устойчива необходимо и достаточно, чтобы частота, при которой ЛФЧХ пересекает линию  $\varphi = -\pi$ , была больше частоты среза.

Если АФЧХ разомкнутой системы имеет сложный вид, то ЛФЧХ может несколько раз пересекать линию  $\varphi = -\pi$ . В этом случае применение критерия Найквиста несколько усложняется. Однако во многих случаях данной формулировки критерия Найквиста оказывается достаточно.

#### 4.4. ТОЧНОСТЬ СИСТЕМ [8].

Понятие точности является центральным в теории автоматического управления, так как позволяет количественно выразить показатели качества систем. Различают точность, рассматриваемую в переходном процессе - динамическая точность, и точность в установившемся режиме - статическая точность.

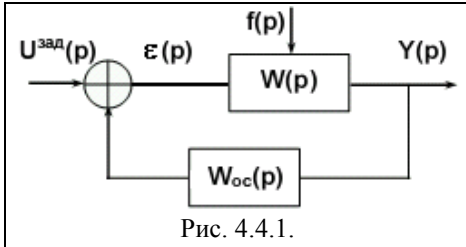


Рис. 4.4.1.

Проще всего рассмотреть понятие точности на примере следящей системы. Для этого наилучшим образом применима передаточная функция по ошибке, позволяющая записать сигнал ошибки при любом виде задающего воздействия:

$$\varepsilon(p) = W_\varepsilon(p) U^{\text{зад}}(p) + W_{\varepsilon f}(p) f(p).$$

**Статическая точность** в следящей системе определяется при гармоническом входном воздействии с использованием передаточной функции по ошибке.

$$\varepsilon(p) = W_c(p) U^{\text{зад}}(p), \quad W_c(p) = 1/(1+W(p)).$$

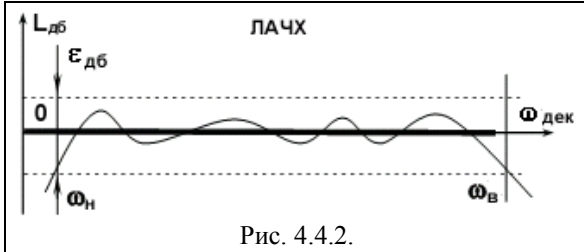


Рис. 4.4.2.

Рассмотрим логарифмическую частотную характеристику системы в установившемся режиме при гармоническом входном воздействии (рис. 4.4.2). Жирной линией показан идеальный случай абсолютно точной системы. Реальная частотная характеристика отличается от идеальной и в некоторой полосе ( $\omega_n, \omega_v$ ) не выходит за пределы допуска  $\varepsilon$ . Такое же рассуждение справедливо и для ФЧХ. Задав допустимые границы

точности по амплитуде и по фазе, получим область частот, где гарантируется данная точность - это полоса пропускания. Задавая требуемую рабочую частоту по приведенным выше формулам можно вычислить ошибку на этой частоте при гармоническом воздействии.

Общий способ повышения точности (в статическом и динамическом режимах) - обеспечение следующих оценок:

$W_{zc}(p) = W(p)/(1+W(p)) \approx 1$  - Мера точности воспроизведения задающего воздействия в замкнутой системе.

$W_c(p) = 1/(1+W(p)) \approx 0$  - Мера малости ошибки слежения.

Один из основных способов повышения точности - увеличение коэффициента  $k$  разомкнутой системы. При увеличении  $k$  оба приближенных равенства оценок выполняются всё более точно, что говорит об общем повышении точности, причём это повышение точности происходит при любой  $W(p)$ .

Однако это не значит, что можно таким образом достичь любой желаемой точности. Здесь начинает сказываться одно из фундаментальных противоречий в рамках теории управления - противоречие между точностью системы и запасом устойчивости. При чрезмерном увеличении  $k$  возможна потеря устойчивости замкнутой системы. Годограф Найквиста, не охватывающий точку  $(-1; j0)$ , но проходящий, например, из 3 квадранта во второй (см., например, кривую 1 на рис. 4.2.4), при увеличении  $k$  "раздувается" относительно начала координат и начинает охватывать эту точку, то есть нарушается условие критерия устойчивости Найквиста. Повышение точности всегда приводит к уменьшению запаса устойчивости по амплитуде.

Конкретные значения точности анализируемой системы проводятся разложением  $W_\varepsilon(p)$  в ряд Тейлора в окрестностях  $p=0$  и анализом коэффициентов этого ряда.

**Динамическая точность** относится к более сложным задачам анализа систем, т.к. требует изучения всего переходного процесса. При достаточно большом значении модуля АФЧХ в разомкнутой системе передаточная функция прямой ветви имеет пренебрежимо малое значение, передаточная функция замкнутой системы будет в основном определяться цепью ОС. Если коэффициент передачи разомкнутой системы много больше единицы  $W(p)W_{oc}(p) \gg 1$  и  $|W(p)| \gg 1$ , то для замкнутой системы можно принять:

$$W_{zc}(p) = W(p)/(1+W(p)W_{oc}(p)) \approx 1/W_{oc}(p),$$

что существенно упрощает анализ системы.

Для повышения динамической точности системы обычно используется принцип комбинированного управления по задающему воздействию (принцип инвариантности).

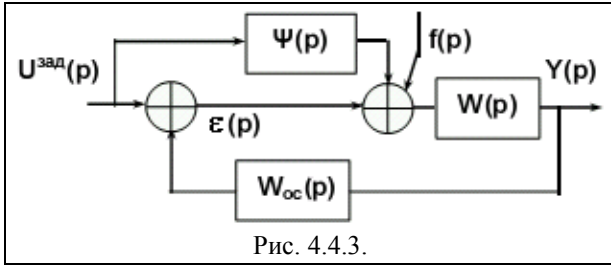


Рис. 4.4.3.

Добавим в стандартную структуру системы дополнительную передаточную функцию  $\Psi(p) \approx 1/(W(p)W_{ос}(p))$  так, чтобы сигнал ошибки вообще не зависел от задающего воздействия (рис. 4.4.3). Это можно выполнить введением в систему дополнительной ветви прохождения сигнала, и подобрать коэффициент передачи в этой ветви так, чтобы компенсировать нежелательный сигнал. Аналогичная операция может быть выполнена и на возмущающее воздействие  $f(p)$ .

#### 4.5. КАЧЕСТВО СИСТЕМ [1, 2, 8, 12].

**Показатели качества систем управления.** Требование устойчивости для системы относится к числу необходимых, но не может считаться достаточным. Система может быть устойчивой, но время затухания настолько велико или ошибка в установившемся режиме настолько большая, что практически данная система не может быть использована. Поэтому система должна быть не только устойчивой, но иметь определенный переходный процесс, а ошибки в установившихся режимах не должны превышать допустимых.

Характер переходного процесса линейной системы в отличие от устойчивости зависит не только от параметров системы, но и от вида возмущающего (задающего) воздействия и начальных условий. Чтобы сравнивать системы по характеру переходного процесса, из возможных воздействий выбирают типовые или наиболее неблагоприятные и определяют кривую переходного процесса при нулевых начальных условиях. В качестве типовых воздействий обычно принимают единичное ступенчатое воздействие, единичный импульс, линейно нарастающее и синусоидальное воздействие. Для большинства систем наиболее неблагоприятным является воздействие вида единичной ступенчатой функции  $\alpha(t) = 1(t)$ . Реакция системы на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях называется переходной функцией системы. Для следящих систем обычно рассматривают переходную функцию  $H(t)$ , вызванную изменением задающего воздействия  $1(t)$ , а для систем стабилизации - переходную функцию  $H_f(t)$ , вызванную изменением возмущающего воздействия  $f(t)$ .

Точность системы в установившихся режимах оценивается с помощью статических и динамических ошибок. Эти ошибки по аналогии можно назвать показателем качества системы в установившихся режимах. Совокупность показателей качества переходного процесса и установившихся режимов называется показателями качества системы в целом.

Считается, что система обладает требуемым качеством, если ее показатели качества не превышают заданных значений, определенных назначением системы.

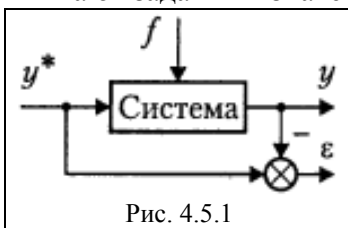


Рис. 4.5.1

Рассмотрим поведение системы управления (рис. 4.5.1), предназначенной для решения задачи слежения - соблюдения заданного закона изменения выходной переменной  $y(t)$ . Последнее выражается в виде целевого условия

$$\begin{aligned} y(t) &\rightarrow y^*(t), \quad \varepsilon(t) \rightarrow 0, \\ \varepsilon(t) &= y^*(t) - y(t), \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

где  $\varepsilon(t)$  - ошибка (рассогласование) системы. При ненулевых начальных рассогласованиях система должна с течением времени обеспечить с некоторой степенью точности совпадение входного (задающего)  $y^*(t)$  и выходного  $y(t)$  сигналов (устранение ошибки  $\varepsilon(t)$ ).

Мгновенное устранение возникающих рассогласований  $\varepsilon(t)$  в реальных системах невозможно в силу инерционности систем регулирования и ограничений, накладываемых на управляющие воздействия. Практически неосуществимо и абсолютно точное выполнение асимптотических условий (4.5.1) в силу действующих возмущений и дестабилизирующих факторов. Указанные соображения приводят к необходимости введения специальных показателей качества, характеризующих эффективность решения той или иной задачи управления.

Выходная переменная возмущенной системы определяется суммой свободных и вынужденных составляющих движения:

$$y(t) = y_{св}(t) + y_{в}(t),$$

где в силу устойчивости системы выполняется условия

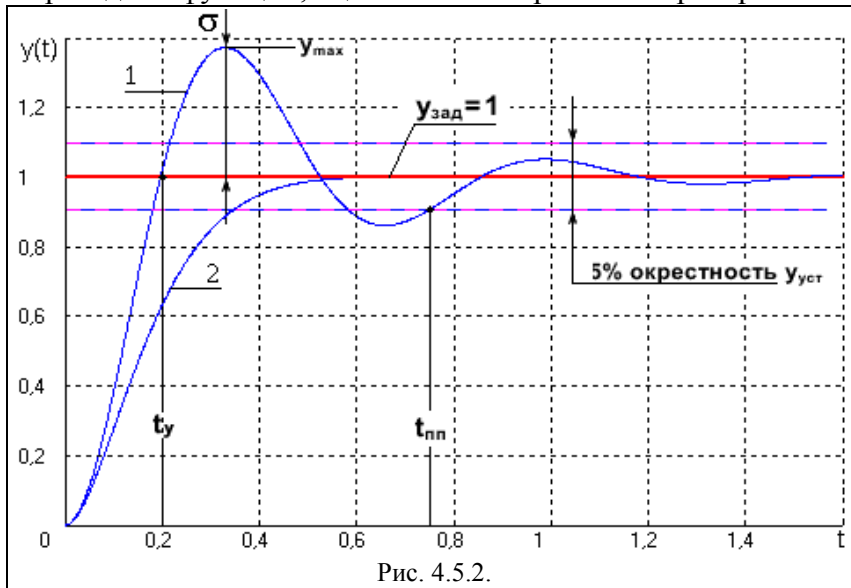
$$y_{св}(t) \rightarrow 0, \quad y_{в}(t) \rightarrow y_y(t), \quad (4.5.2)$$

Условия (4.5.2) соответствуют переходному режиму системы, по окончании которого система "переходит" в установившийся режим  $y_y(t)$ .

В зависимости от свойств системы переходный режим может оказаться достаточно быстрым или медленным, монотонным или колебательным. Для оценки поведения системы в переходном режиме вводятся динамические показатели качества, т. е. численные оценки быстродействия и колебательности системы (время переходного процесса, затухание, перерегулирование, и пр.).

Наиболее просто оценить качество переходного режима *автономной* системы, для которой вынужденная составляющая отсутствует. В установившемся режиме выходная переменная системы в идеальном случае должна быть идентична задающему воздействию, что соответствует нулевому значению установившейся ошибки.

Существует ряд универсальных приемов, позволяющих одновременно оценить динамические и/или точностные показатели системы, к которым относятся методика оценки качества по переходной функции, оценка по интегральным критериям и т. д.



### Показатели качества переходного процесса.

Переходная функция системы оценивается с помощью совокупности характеристик, называемых показателями качества переходного процесса. Принято использовать следующие стандартные показатели качества переходного процесса, отражённые на типичном графике 1 переходного процесса в следящей системе со ступенчатым задающим воздействием (рис. 4.5.2):

- $t_{пп}$  - время переходного процесса, по истечении которого отклонение управляемой величины

относительно заданного значения  $y_{зад}$  по абсолютному значению становится (и остается в дальнейшем) меньше определенной заданной величины  $\epsilon_{уст}$ . Обычно принимается  $\epsilon_{уст} = \delta y_{зад}$ ,  $\delta = 0.05$ . Время регулирования характеризует быстроту затухания переходного процесса.

- $t_y$  - время установления, промежуток времени, за который управляемая величина в первый раз достигает своего установившегося значения, характеризует скорость процесса управления.
- $\epsilon_{уст}$  - установившаяся ошибка (статическая точность,  $\epsilon_{уст} = e(\infty) = 1 - y_{уст}$ ). Если  $\epsilon_{уст} = 0$ , то система астатическая.
- $\sigma\%$  - относительное перерегулирование ( $\sigma = (y_{max} - y_{зад})/y_{зад}$ ). Обычно требуют, чтобы значение  $\sigma$  было менее 18%. Перерегулирование характеризует колебательные свойства процессов. При нулевом значении  $\sigma$  процесс носит монотонный характер (график 2 на рис. 4.5.2), а при достаточно больших  $\sigma$  приближается к незатухающему колебательному движению.
- $n$  - число колебаний за время переходного процесса ( $\leq 3$  шт.).

Как известно (и следует из выражения (4.1.11), чем дальше полюсы характеристического уравнения системы находятся от границы устойчивости (слева от мнимой оси комплексной плоскости), тем выше скорость протекания переходных процессов в системе. Для количественной оценки быстродействия систем используется также понятие *степени устойчивости*, которой называется положительное число, соответствующее расстоянию от мнимой оси до ближайшего к ней корня  $p_i$ :

$$\alpha = -\min \operatorname{Re} p_i, \quad i = [1, n].$$

В общем случае, этому условию соответствует пара комплексно сопряженных корней

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta,$$

с соответствующей наиболее медленной колебательной составляющей:

$$y_i(t) = A \exp(-\alpha t) \sin(\beta t + \varphi).$$

Отсюда, по затуханию колебательного процесса  $\exp(-\alpha t)$  нетрудно определить время переходного процесса по заданной величине  $\delta$ :

$$t_{\text{пп}} \approx (1/\alpha) \ln(1/\delta).$$

Знак приближенности в данном случае отражает тот факт, что другие составляющие общего решения (4.1.11) также могут внести определенную долю в значение  $t_{\text{пп}}$ , особенно, если вещественные части их полюсов близки по значениям к минимальному значению  $\alpha$ .

По переходной характеристике и значению установившейся ошибки (ошибки при  $t \gg t_{\text{пп}}$ ) можно оценить точность системы в режиме стабилизации - при постоянном входном или заданном воздействии  $y^*(t) = \text{const}$ .

Эти показатели связаны с запасами устойчивости по амплитуде и по фазе. Поэтому, обеспечение стандартных показателей качества обеспечивает необходимую устойчивость. Задачу обеспечения показателей можно рассмотреть как оптимизационную. Как правило, эта задача оказывается многокритериальной и достаточно трудной для решения, в том числе, численного.

При синтезе САУ в системе обычно выделяются неизменяемая часть и изменяемая часть, в которую можно вносить коррективы. Неизменяемая часть системы задает возможность получения гарантированного качества. Классическим методом повышения качества системы является метод диаграмм В.В.Солодовникова. Практическая задача оптимизации обычно выполняется с использованием корректирующих устройств.

**Последовательное корректирующее устройство.** Передаточная функция разомкнутой скорректированной системы равна исходной, умноженной на передаточную функцию корректора. Корректирующее устройство включается последовательно в контуре системы в любом месте. Для исследования подходят ЛАЧХ, так как они складываются при последовательном соединении. ЛАЧХ и ЛФЧХ корректора находятся в виде разности желаемых и имеющихся частотных характеристик системы.

Типичным последовательным корректирующим устройством является ПИД- регулятор. Эти пропорционально-интегрально-дифференциальные регуляторы выпускаются в широком ассортименте и в разнообразных реализациях, включая программную на контроллерах.

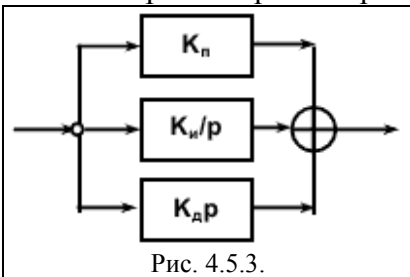


Рис. 4.5.3.

ПИД-регулятор (рис. 4.5.3) имеет три параллельных канала: усилитель с коэффициентом  $k_p$ , интегратор с коэффициентом  $k_i$ , дифференциатор с коэффициентом  $k_d$ . Усилитель позволяет изменить коэффициент усиления системы и уменьшить установившуюся ошибку:  $e_{\text{уст}} = 1/(1+k_p k)$ . Интегратор повышает порядок астатизма на 1. Увеличение  $k_d$  повышает запас устойчивости и сглаживает переходный процесс, поэтому дифференциальную составляющую называют демпфированием. С помощью интегральной и пропорциональной составляющих можно обеспечить первый порядок астатизма и желаемую статическую точность в ущерб запасу устойчивости, а дифференциальная составляющая повышает запас устойчивости.

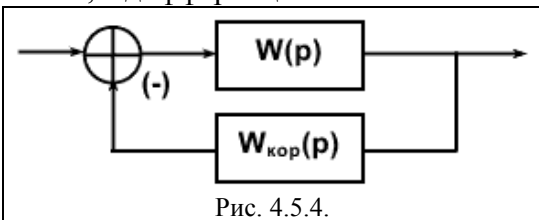


Рис. 4.5.4.

**Параллельное корректирующее устройство** имеет вид местной отрицательной ОС (рис. 4.5.4). Для синтеза параллельных корректирующих устройств использовать логарифмические частотные характеристики менее удобно, чем для последовательных. Существует ряд инженерных методов расчёта параллельных корректоров (например, метод диаграмм Никольса). Можно просто

вычислять корректирующую  $W_{\text{кор}}(p)$  по желаемой  $W_{\text{зс}}(p)$ .

$$W_{\text{кор}}(p) = (W(p) - W_{\text{зс}}(p)) / (W(p)W_{\text{зс}}(p)).$$

Одна из двух передаточных функций  $W_{\text{кор}}(p)$  или  $W_{\text{зс}}(p)$  обычно не является физически реализуемой. Тем не менее, всегда можно выбрать достаточно близкую реализуемую функцию.

**Метод Солодовникова** позволяет построить корректирующее звено для имеющейся системы так, чтобы обеспечит требуемые типовые показатели качества и запас устойчивости по ам-

плитуде и фазе. Метод основан на имеющейся связи между частотной характеристикой и переходной функцией:

$$H(t) = (2/\pi) \int_0^{\infty} (P(\omega)/\omega) \sin(\omega t) d\omega,$$

где  $P(\omega)$  – вещественная часть АФЧХ  $W(j\omega)=P(\omega)+jQ(\omega)$ .

В.В. Солодовников доказал, что в любой системе имеются следующие зависимости между основными показателями качества переходного процесса и  $P(\omega)$ .

- $\sigma\% > 18\%$ , если есть "горб", т.е.  $P_{\max} > P_0$ ;
- $\sigma\% < 18\%$ , если нет горба;
- $\sigma\% = 0$ , если производная  $dP/d\omega < 0$  и монотонно убывает. Требование монотонного убывания часто налагает неоправданные ограничения на конструкцию, достаточно обеспечивать  $\sigma\% < 18\%$ .

Диаграммы Солодовникова устанавливают связь между  $\sigma\%$ ,  $t_{пп}$ ,  $P_{\max}$  и  $\omega_c$  - частотой среза системы, то есть той частотой, где усиление системы равно 1 или  $L(\omega_c) = 0$ .

Область существенных частот ( $\omega_n$ ,  $\omega_b$ ) - это та часть частотной характеристики, которая в основном определяет качество системы. Диапазон ЛАЧХ для области существенных частот от +26дб. до -16дб. Уровень +26дб. соответствует усилению  $K=20$  и соответствующей установившейся ошибке  $e_{уст}=1/(1+K) \approx 0.05$ , т.е. нижняя частота области существенных частот определяется статической точностью  $e_{уст} \approx 0.05$  при ступенчатом входном воздействии. Левее частоты  $\omega_n$  ЛАЧХ не ниже +26дб, если не требуется астатизма, либо имеет наклон в зависимости от порядка астатизма. Уровень -16дб. соответствует малости влияния высокочастотных составляющих переходного процесса на уровне  $\approx 10\%$ . Наклон ЛАЧХ в области существенных частот должен быть -20дб./дек. На диаграмме Солодовникова по горизонтали отложена второстепенная величина  $P_{\max}/P_0$ , которая в настоящее время используется редко, а по вертикальным осям отложены  $\sigma\%$ ,  $t_{пп}$  и  $\omega_c$ .

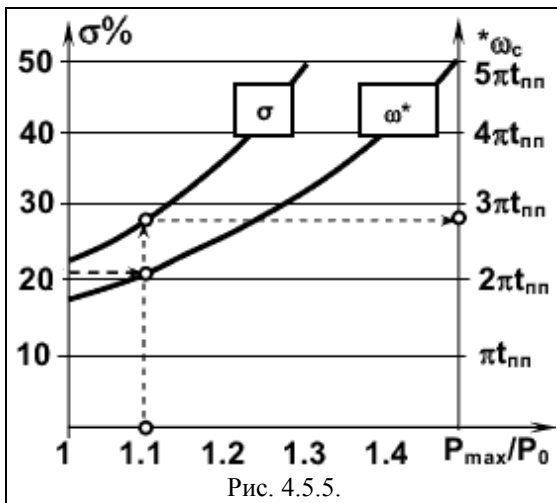


Рис. 4.5.5.

Использовать диаграммы Солодовникова (рис. 4.5.5) можно по-разному. Обычно применяется такая методика. Уточняют, какие показатели качества могут быть сформулированы заказчиком, и остальные параметры, необходимые для построения корректирующего устройства, определяют по диаграммам Солодовникова. По графикам можно, например, определить при заданном перерегулировании и времени переходного процесса частоту среза системы:  $(\sigma\%, t_{пп}) \rightarrow \omega_c, n, \Delta A, \Delta \varphi$ . Причём последние три параметра обеспечиваются автоматически. Тогда алгоритм синтеза САУ при исходно заданных  $\sigma\%$ ,  $t_{пп}$  может быть, например, таким:

- По диаграммам определяем  $\omega_c$  (выражение  $\omega_c$  через  $t_{пп}$ ).
- Строим область существенных частот, что даёт нам основную часть желаемой ЛАЧХ. Достаиваем высокочастотную часть произвольно и низкочастотную часть, исходя из требуемого порядка астатизма.
- Синтезируем последовательное корректирующее звено, обеспечивающее такую ЛАЧХ. Использование методики Солодовникова гарантирует показатели качества замкнутой системы и запасы устойчивости по амплитуде на уровне  $\Delta A\% = 200$  (коэффициент усиления может быть увеличен в два раза), и по фазе на уровне  $\Delta \varphi = 35^\circ$ .

**Программы анализа качества процессов управления.** Современные инструментальные средства анализа и синтеза систем управления представлены множеством различных специализированных программных пакетов и комплексов, которые позволяют в диалоговом режиме выполнять операции над матрицами и полиномами, вычислять временные и частотные характеристики, строить корневые годографы, анализировать чувствительность и устойчивость, проверять управляемость и наблюдаемость системы, находить ее полюса и нули, сравнивать переходные процессы в системе по интегральным критериям и находить лучший, определять параметры и харак-

теристики стохастических сигналов на входе и на выходе системы, составлять и преобразовывать математические модели исследуемой системы.

Эти программные средства обладают развитым сервисом, что позволяет строить и сравнивать графики нескольких процессов, изображать взаимные зависимости, фазовые кривые и портреты, строить характеристики и диаграммы, изображать и преобразовывать структурные модели системы, при этом графические построения могут быть выполнены в двух- и трехмерном представлении.

Известны фирменные и университетские программные пакеты анализа и синтеза систем управления: LSAP – США (Ливерморская национальная лаборатория) TUTSIM – США (Станфордский университет); CLADP – Великобритания (Кембридж); KEDDC – Германия (Пурский университет); MATRIX - фирмы Integrated Systems Inc.; SIMULINK в среде MATLAB известной фирмы Math Works Inc.; MARS – Украина (Институт кибернетики). Среди отечественных инструментальных программных средств известны разработки Академии авиационного и космического приборостроения, Санкт-Петербург; Московского инженерно-физического института; Московского государственного технического университета; Института проблем управления РАН, Москва.

Программные комплексы TUTSIM, MATRIX, SIMULINK позволяют исследовать модели любых динамических систем, которые испытывают любые внешние воздействия. Комплексы обеспечивают команды изменения структуры модели, ее параметров, выходных блоков и диапазонов рассчитываемых данных; команды одиночного и многократного запуска, останова и продолжения процесса моделирования с выводом графиков и числовых данных на экран, принтер или в файл; команды графического сервиса, позволяющие изображать оси, сетку, маркировку, комментарии к графикам, строить фазовые кривые или взаимозависимости и прочее. Комплексы располагают различными функциональными блоками для моделирования любых непрерывных и дискретных, линейных и нелинейных динамических систем, испытывающих детерминированные и стохастические воздействия.

#### 4.6. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМАХ [8].

В реальных системах имеются помехи (возмущения), действующие в каналах передачи информации. Часто не имеется никакой, кроме статистической, информации об этих факторах, что заставляет считать эти параметры случайными величинами с заранее неизвестными законами распределения. Так возникает задача управления в условиях неопределенности. Здесь имеются два аспекта: управление в условиях неопределенности и задача борьбы с помехами.

**Модели случайных сигналов.** Случайные процессы и отображающие их сигналы будем считать функциями времени, принимающими случайные значения. В каждый момент времени, значение случайного процесса есть случайная величина  $x(t)$ . Основной характеристикой случайной величины в момент времени  $t$  является функция  $p(x,t)$  - плотность вероятности в момент  $t$ . Плотность вероятности определяет функции математического ожидания и дисперсии случайных величин:

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) p(x,t) dx, \quad D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t)-M_x(t))^2 p(x,t) dx.$$

Для описания статистической взаимосвязи значений  $x(t)$  в разные моменты времени вводятся корреляционная функция сигнала  $x(t)$ :

$$K_x(t_1, t_2) = M[(x(t_1)-M_x(t_1)) (x(t_2)-M_x(t_2))],$$

и взаимная корреляционная функция сигналов  $x(t)$  и  $y(t)$ :

$$K_{xy}(t_1, t_2) = M[(x(t_1)-M_x(t_1)) (y(t_2)-M_y(t_2))].$$

Отметим, что  $K_x(t,t) = D_x(t)$ , т.е. при  $t_1 = t_2 = t$  это есть дисперсия в момент времени  $t$ .

**Стационарным случайным процессом** называется такой случайный процесс, для которого корреляционная функция зависит не от абсолютных значений  $t_1$  и  $t_2$ , а только от их разности  $K(t_1, t_2) = K(t_1 - t_2) = K(\tau)$ . Дисперсия и математическое ожидание для стационарного случайного процесса являются константами. Стационарный случайный процесс для САУ не меняет своих статистических характеристик за время жизни системы.

Спектральная плотность  $S(\omega)$  стационарного случайного процесса, есть преобразование Фурье от корреляционной функции  $K(\tau)$ . Соответственно, корреляционная функция  $K(\tau)$  есть обратное преобразование Фурье спектральной плотности  $S(\omega)$ :



$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau, \quad K(\tau) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega.$$

Спектральная плотность случайного процесса описывает разложение мощности процесса по гармоническим составляющим. Можно выразить дисперсию через интеграл от спектральной плотности. Это означает, что дисперсия есть суммарная мощность случайного процесса, распределённая по частоте:

$$D = K(0) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega.$$

**Фильтрация помех.** Будем считать, что в САУ помехи могут быть в двух основных местах: помеха в канале управления (к управлению добавляется помеха  $W$ ) и помеха в канале измерения (выходной сигнал измеряется с помехой  $V$ ). Наиболее общая задача фильтрации шума - максимально возможное подавление обеих помех.

Если рассмотреть шумовой сигнал с бесконечным равномерным спектром, то ему будет соответствовать корреляционная функция в виде  $\delta$ -функции:

$$S(\omega) = \sigma^2 = \text{const}; \quad K(\tau) = (\sigma^2/2\pi) \delta(\tau); \quad D = K(0) = \infty.$$

Эти три уравнения описывают "белый шум" с интенсивностью  $\sigma^2$ . Ясно, что такой сигнал не может быть физически реализован в силу бесконечной мощности. Можно, однако, реализовать сколь угодно близкий к этому случайный процесс, называемый "розовым шумом". Формально розовый шум получается при пропускании белого шума через любое реальное звено. При этом ограничивается спектр сигнала, так как никакое реальное звено не может пропускать бесконечную полосу частот. В результате, у реального розового шума может быть сколь угодно широкий, но убывающий спектр, а его корреляционная функция может очень быстро убывать, что означает малую связь значений процесса в разные моменты времени.

Задачу фильтрации помех будем решать как оптимальную, то есть искать условия наибольшего подавления помех. Помехи будем считать случайными процессами с известными корреляционными функциями (спектральными характеристиками). Алгоритмы управления и фильтрации могут быть реализованы по отдельности, и их одновременное функционирование в замкнутой системе не мешает друг другу. Другими словами, оптимальный фильтр можно рассчитывать отдельно от регулятора в том смысле, что характеристическое уравнение замкнутой системы оказывается равным произведению уравнений подсистемы регулирования и подсистемы фильтрации.

При анализе и синтезе фильтров используется аддитивная модель входного сигнала:  $u(t) = s(t) + q(t)$ , где  $s(t)$  - полезная составляющая сигнала управления,  $q(t)$  - составляющая шумов и помех. Синтез оптимальных фильтров производится с максимальным использованием известной априорной информации как о сигналах, которые необходимо выделять, так и о шумах и помехах. Как правило, используется информация о природе полезного сигнала и шума, об их спектральном составе, о корреляционных и взаимных корреляционных характеристиках. Наличие определенных особенностей (различий) в характеристиках сигнала и шума позволяет реализовать фильтр вообще и оптимальный фильтр в частности. Если такие особенности отсутствуют, постановка задачи становится некорректной.

При наличии помех абсолютно точное выделение полезного сигнала методами линейной фильтрации, как правило, невозможно. Результат фильтрации

$$z(t) = h(\tau) \otimes u(t-\tau) \quad (4.6.1)$$

отличается от  $s(t)$  на величины  $\varepsilon(t) = z(t) - s(t)$ , которые являются абсолютными значениями погрешности воспроизведения полезного сигнала по координатам  $t$ . Качество фильтра оценивается средним значением квадрата величины  $\varepsilon(t)$ :

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{[z(t) - s(t)]^2}. \quad (4.6.2)$$

Выражение (4.6.2) дает возможность определить функцию  $h(t)$  фильтра по критерию минимума среднего квадратического отклонения выходного сигнала от его действительной или заданной формы.

**Фильтр Винера** является оптимальным фильтром формирования из входного сигнала  $u(t)$  выходного сигнала  $z(t)$  при известной форме полезного сигнала  $s(t)$ , который содержится во входном сигнале в сумме с шумами. В качестве критерия его оптимизации используется среднее квадратическое отклонение сигнала  $z(t)$  на выходе фильтра от заданной формы сигнала  $s(t)$ . Подставим

уравнение свертки (4.6.1) в раскрытой форме интегральной свертки в выражение (4.6.2) и получим отклонение  $\varepsilon^2$  выходного сигнала  $z(t)$  от заданной формы выходного сигнала  $s(t)$ :

$$\varepsilon^2 = [\int u(t-\tau)h(\tau) d\tau - s(t)]^2. \quad (4.6.3)$$

Минимум выражения (4.6.3) определяет функцию импульсного отклика  $h(t)$  оптимального фильтра. При этом для оптимального фильтра действительно выражение:

$$h(t) \otimes K_u(\tau) = K_{zu}(\tau). \quad (4.6.4)$$

Другими словами, *свертка функции отклика оптимального фильтра с функцией автокорреляции входного сигнала должна быть равна функции взаимной корреляции выходного и входного сигналов.*

Отметим, что  $K_u(\tau) = R_u(\tau) + R_q(\tau)$ , где  $R_u$  - функция автокорреляции сигнала,  $R_q$  - функция автокорреляции шума, а  $K_{zu}(\tau) = B_{zs}(\tau) + B_{zq}(\tau)$ , где  $B_{zs}$  - функция взаимной корреляции сигналов  $z(t)$  и  $s(t)$ ,  $B_{zq}$  - функция взаимной корреляции сигнала  $z(t)$  и помех  $q(t)$ . Подставляя данные выражения в (4.6.4), получаем:

$$h(n) \otimes [R_u(\tau) + R_q(\tau)] = B_{zs}(\tau) + B_{zq}(\tau). \quad (4.6.5)$$

**Частотная характеристика фильтра** находится преобразованием Фурье левой и правой части уравнения (4.6.5):

$$\begin{aligned} H(\omega)[W_u(\omega) + W_q(\omega)] &= W_{zs}(\omega) + W_{zq}(\omega), \\ H(\omega) &= [W_{zs}(\omega) + W_{zq}(\omega)] / [W_s(\omega) + W_q(\omega)], \end{aligned} \quad (4.6.6)$$

где  $W_s(\omega) \Leftrightarrow R_s(\tau)$  и  $W_q(\omega) \Leftrightarrow R_q(\tau)$  - энергетические спектры (плотности мощности) сигнала и помех,  $W_{zs}(\omega) \Leftrightarrow B_{zs}(\tau)$  - взаимный энергетический спектр входного и выходного сигналов,  $W_{zq}(\omega) \Leftrightarrow B_{zq}(\tau)$  - взаимный энергетический спектр выходного сигнала и помех.

Обычно имеет место статистическая независимость полезного сигнала, а, следовательно, и сигнала  $z(t)$ , от шумов, при этом  $B_{zq} = 0$  и фильтр называют *оптимальным по сглаживанию шумов* при заданной форме выходного сигнала:

$$H(\omega) = W_{zs}(\omega) / [W_s(\omega) + W_q(\omega)], \quad (4.6.7)$$

Фильтр (4.6.7) оптимален в том смысле, что максимизирует отношение мощности сигнала к мощности шума по всему интервалу сигнала, но не в каждой индивидуальной точке.

Выражения (4.6.6-4.6.7) достаточно наглядно демонстрируют физический смысл формирования передаточной функции фильтра. При воспроизведении сигнала частотная функция взаимной корреляции входного сигнала с выходным  $W_{zs}$  (плотность взаимной мощности) повторяет частотную функцию автокорреляции  $W_s$  (плотность мощности сигнала). Плотность мощности статистических шумов  $W_q$  распределена по частотному диапазону равномерно, в отличие от плотности мощности сигнала  $W_s$ , которая, в зависимости от формы сигнала, может занимать любые частотные интервалы спектрального диапазона. На частотах, где сосредоточена основная энергия сигнала, имеет место  $W_s(\omega) \gg W_q(\omega)$  и  $H(\omega) \Rightarrow 1$  (как минимум, больше 0.5). Там, где значение  $W_s(\omega)$  становится меньше  $W_q$ , коэффициент передачи фильтра становится меньше 0.5, и в пределе  $H(\omega) = 0$  на всех частотах, где полностью отсутствуют частотные составляющие сигнала.

Таким образом, оптимальные фильтры учитывают особенности спектрального состава сигналов и способны формировать передаточные функции выделения полезных частот сигналов из любых диапазонов спектра с максимальным подавлением шумов на всех частотах спектрального диапазона, не содержащих полезных сигналов, при этом границы усиления-подавления устанавливаются автоматически по заданному уровню шумов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы: Учебное пособие для вузов. - СПб.: Питер, 2005. - 336 с.
2. Повзнер Л.Д. Теория систем управления: Учебное пособие для вузов. - М.: Изд. МГТУ, 2002. - 472 с.
7. Туманов М.П. Теория автоматического управления: Лекции.
8. Туманов М.П. Теория управления. Теория линейных систем автоматического управления: Учебное пособие. - МГИЭМ. М., 2005, 82 с.
11. Михайлов В.С. Теория управления. - К.: Выща школа, 1988.
12. Зайцев Г.Ф. Теория автоматического управления и регулирования. - К.: Выща школа, 1989.