В.М.Кондаков

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Элементы линейной алгебры и линейного программирования

Учебное пособие

Издательство Пермского университета
1992

ББК В173.1
К642
Научный редактор доц. Г.С.Шевцов
Рецензенты: кафедра высшей математики Перм. политехн. ин-та; доц. Перм. ИПК Ю.Ф.Фоминых
Редактор Л.Л.Савенкова
Печатается по решению РИСа Пермского университета

УДК 517.8

Кондаков В.М.

К642 Математическое программирование. Элементы линейной алгебры и линейного программирования: Учеб. пособие. - Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1992.- 112 с.: ил.
ISBN 5-230-09330-7

Приведены основные теоретические сведения по линейной алгебре и показано их применение к решению типовых задач. Рассмотрены геометрический способ решения задач линейного программирования, симплекс-метод, метод искусственного базиса, распределительный метод и метод потенциалов решения транспортной задачи, задача о межотраслевом балансе. Даны основные понятия теории двойственности в линейном программировании и показано их применение к решению задач. Приведены варианты контрольных и лабораторных работ.

Пособие предназначено студентам экономических специальностей дневной и заочной форм обучения.

К $\frac{1602110000 - 10}{Н55(03) - 92}$ Без объявл.

Редактор Л.Л.Савенкова
Технический редактор Л.Г.Подорова
Корректор Е.Е.Покровская

ИБ № 23

Подписано в печать 15.03.92. Формат 60×84 1/16. Бум. тип. № 2.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 6,3. Усл. кр.-отт. 6,5. Тираж 1000 экз. Заказ 177. С10

Издательство Пермского университета. 614600. Пермь, ул.Букирева, 15
Типография Пермского университета. 614600. Пермь, ул. Букирева, 15

ISBN 5-230-09330-7

Введение

В курсе "Математическое программирование" рассматриваются задачи, в которых моделируются различные процессы, исследуемые в экономике. В большинстве этих задач требуется найти экстремум (минимум или максимум) целевой функции при различных ограничениях, накладываемых на переменные. Особый класс составляют задачи линейного программирования, когда целевая функция линейна, а ограничения задаются линейными уравнениями и неравенствами. Теоретической базой линейного программирования служит линейная алгебра. В связи с этим в курсе "Математическое программирование" можно выделить два крупных раздела - "Линейная алгебра" и "Линейное программирование", которым и посвящено пособие.

В главе 1 рассматриваются основные элементы линейной алгебры, необходимые для решения задач линейного программирования. Методами линейной алгебры исследуются балансовые модели.

В главе 2 рассматриваются задачи об использовании сырья, о составлении рациона, транспортная задача. Приводится геометрический способ решения некоторых задач, излагается симплекс-метод решения задач линейного программирования и его модификации для решения транспортной задачи - распределительный метод, метод потенциалов. Рассматривается метод искусственного базиса для отыскания начального допустимого базисного решения.

Глава 3 содержит основные элементы теории двойственности в линейном программировании и экономическую интерпретацию двойственных задач.

В тексте после названия параграфов указываются номера и страницы учебных пособий из списка литературы, где можно более подробно ознакомиться с рассматриваемым вопросом.

В заключение приведены варианты заданий для контрольных и лабораторных работ.

Все приведенные в пособии примеры носят учебный характер и рассчитаны на вычисления "вручную". Для решения задач с реальными данными следует обратиться к книге [14], в которой содержатся программы решения экономических задач на персональных компьютерах, написанные на одной из версий языка BASIC.

Глава 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1.1. Метод Гаусса (метод исключения неизвестных)

[1, 45-43; 2, 31-38; 4, 120-133]

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \qquad (1.1)$$

Действительные числа a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ называются коэффициентами системы (1.1), b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ - свободными членами. Первый индекс i коэффициента a_{ij} обозначает номер уравнения в системе (1.1), второй индекс j - номер неизвестного.

Решением системы линейных уравнений (1.1) называется упорядоченный набор $(x_1^{(o)}, x_2^{(o)}, \ldots, x_n^{(o)})$ из n действительных чисел, при подстановке которых вместо соответствующих неизвестных каждое из уравнений системы (1.1) обращается в тождество. Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной, в противном случае - несовместной. Две системы уравнений с одними и теми же неизвестными называются эквивалентными (равносильными), если каждое решение одной из систем является также решением и другой системы или если эти системы несовместны.

Метод Гаусса решения системы линейных уравнений состоит в последовательном исключении неизвестных, в результате которого система приводится к виду, удобному для анализа. При этом используются следующие элементарные преобразования:

а) умножение обеих частей какого-либо уравнения на одно и то же число, не равное нулю, коротко - умножение уравнения на число;

б) прибавление (вычитание) к одному из уравнений другого уравнения, предварительно умноженного на некоторое число;

в) перестановка уравнений;

г) вычеркивание уравнений вида $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \ldots + 0\cdot x_n = 0$, т.е. тождества $0 = 0$;

д) перенумеровка неизвестных.

Указанные преобразования превращают данную систему в эквивалентную ей систему.

Идею метода Гаусса можно понять из следующего примера.

Пример 1.1. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2, \\ -2x_1 + x_2 + 6x_3 &= 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6. \end{aligned} \qquad (1.2)$$

Прибавим первое уравнение системы (1.2) ко второму, предварительно умножив первое уравнение на 2. Затем прибавим первое уравнение к третьему, предварительно умножив первое уравнение на -1. В результате система (1.2) преобразуется в эквивалентную ей систему

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2, \\ 3x_2 + 4x_3 &= 6, \\ x_2 + 2x_3 &= 4. \end{aligned} \qquad (1.3)$$

Разделим на 3 второе уравнение системы (1.3), а затем вычтем его из третьего уравнения. В результате получим систему

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2, \\ x_2 + \tfrac{4}{3}x_3 &= 2, \\ x_3 &= 3. \end{aligned} \qquad (1.4)$$

Теперь, прибавив третье уравнение системы (1.4) к первому уравнению и прибавив его же, умноженное на -4/3, ко второму, приходим к системе

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad &= 5, \\ x_2 \quad &= -2, \\ x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Наконец, прибавив второе уравнение, умноженное на -1, к первому, получим решение исходной системы (1.2)

$$x_1 = 7,\ x_2 = -2,\ x_3 = 3. \qquad (1\ 5)$$

Переход с использованием элементарных преобразований от системы (1.2) к системе (1.4) принято называть прямым ходом, а переход от системы (1.4) к решению (1.5) (это тоже система, эквивалентная системе (1.2), но специфического вида) - обратным ходом метода Гаусса.

При решении системы методом Гаусса "вручную" появление дробей несколько затрудняет вычисления. Иногда этого можно избежать, используя элементарные преобразования должным образом. В примере 1.1 можно обойтись без дробей, если в системе (1.3) поменять местами второе и третье уравнения, что приводит к системе

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2, \\ x_2 + 2x_3 &= 4, \\ 3x_2 + 4x_3 &= 6. \end{aligned}$$

В этой системе второе уравнение, умноженное на -3, прибавим к третьему, что даст

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2, \\ x_2 + 2x_3 &= 4, \\ -2x_3 &= -6 \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2, \\ x_2 + 2x_3 &= 4, \\ x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Осуществив обратный ход метода Гаусса, получим

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 5, \\ x_2 &= -2, \\ x_3 &= 3; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 7, \\ x_2 &= -2, \\ x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Рассмотрим алгоритм метода Гаусса в общем случае. Предположим, что коэффициент a_{11} системы (1.1) отличен от нуля. Его назовем ведущим элементом первого шага. Если $a_{11} = 0$, то поставим на первое место уравнение, в котором коэффициент при x_1 не равен нулю. Затем, умножая первое уравнение последовательно на числа

$$a_{21}/a_{11},\ a_{31}/a_{11},\ \ldots,\ a_{m1}/a_{11},$$

вычтем его соответственно из второго, третьего, ... , m-го уравнений. Тем самым неизвестное x_1 будет исключено из всех уравнений системы, кроме первого, т.е. система примет вид

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n &= b'_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + \ldots + a'_{mn}x_n &= b'_m. \end{aligned} \tag{1.6}$$

На следующем шаге будем предполагать, что $a'_{22} \neq 0$. Если это условие не выполняется, то, начиная со второго, можно переставить уравнения или неизвестные в них таким образом, чтобы требуемое условие выполнялось. Примем a'_{22} за ведущий элемент второго шага. Умножая второе уравнение системы (1.6) последовательно на числа

$$a'_{32}/a'_{22},\ a'_{42}/a'_{22},\ \ldots,\ a'_{m2}/a'_{22},$$

вычтем его соответственно из третего, четвертого, .. , m-го уравнений. Система примет вид

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n &= b''_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a''_{m3}x_3 + \ldots + a''_{mn}x_n &= b''_m. \end{aligned} \qquad (1.7)$$

Этот вид в отличие от вида системы (1.6) характеризуется тем, что неизвестное x_2 отсутствует во всех уравнениях, кроме первых двух.

На третьем шаге, предполагая, что $a''_{33} \neq 0$, и принимая a''_{33} за ведущий элемент, исключим неизвестное x_3 из всех уравнений, начиная с четвертого. Продолжим процесс исключения неизвестных далее. Возможно, в результате преобразований встретится уравнение вида

$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \ldots + 0\cdot x_n = b, \qquad (1.8)$$

где $b \neq 0$. Полученное уравнение (1.8) не обращается в тождество ни при каких значениях неизвестных, поэтому система несовместна.

В том случае, если уравнение вида (1.8) не встретится, не более чем через n шагов прямого хода система примет так называемый трапецеидальный вид

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1r}x_r + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2r}x_r + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ a_{33}x_3 + \ldots + a_{3r}x_r + \ldots + a_{3n}x_n &= b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{rr}x_r + \ldots + a_{rn}x_n &= b_r. \end{aligned} \qquad (1.9)$$

Для упрощения записи в системе (1.9) опущены штрихи над коэффициентами. Число r не превосходит m, так как в процессе преобразований возможно вычеркивание уравнений (тождеств) вида 0 = 0. Характерным для вида системы (1.9) является то, что диагональные коэффициенты a_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, r$ отличны от нуля, а коэффициенты a_{ij}, $i > j$, расположенные ниже диагонали, равны нулю. Этим и характеризуется трапецеидальный вид системы (1.9). В частном случае, когда $r = n$, система (1.9) принимает треугольный вид

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \qquad (1.10)$$

Обратным ходом, исключая последовательно неизвестные x_n, $x_{n-1}, \dots,$ x_2 из вышестоящих уравнений системы (1.10), получим единственное решение исходной системы.

Особого внимания заслуживает общий случай, когда $r < n$. Обратным ходом, исключая последовательно неизвестные x_r, x_{r-1}, ... , x_2 из вышестоящих уравнений системы (1.9), можно привести ее к виду

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad &+ \alpha_{1,r+1}x_{r+1} + \alpha_{1,r+2}x_{r+2} + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ x_2 \quad\quad &+ \alpha_{2,r+1}x_{r+1} + \alpha_{2,r+2}x_{r+2} + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r &+ \alpha_{r,r+1}x_{r+1} + \alpha_{r,r+2}x_{r+2} + \dots + \alpha_{rn}x_n = \beta_r. \end{aligned} \tag{1.11}$$

В рассматриваемом случае ($r < n$) решение системы (1.11) не может быть определено однозначно (говорят, что она недоопределена), как это было в случае $r = n$. Система имеет бесконечное множество решений. Система вида (1.11) удобна тем, что, если задать произвольным образом значения неизвестных x_{r+1}, x_{r+2}, ... , x_n, то по ней легко вычислить значения остальных неизвестных x_1, x_2, ... , x_r. В связи с этим в линейном программировании неизвестные x_{r+1}, x_{r+2}, ... , x_n называются свободными, а неизвестные x_1, x_2, ... , x_r – базисными.

Перенесем в системе (1.11) неизвестные x_{r+1}, x_{r+2}, ... , x_n с их коэффициентами в правые части уравнений, тогда получим систему

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_1 - (\alpha_{1,r+1}x_{r+1} + \alpha_{1,r+2}x_{r+2} + \dots + \alpha_{1n}x_n), \\ x_2 &= \beta_2 - (\alpha_{2,r+1}x_{r+1} + \alpha_{2,r+2}x_{r+2} + \dots + \alpha_{2n}x_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r &= \beta_r + (\alpha_{r,r+1}x_{r+1} + \alpha_{r,r+2}x_{r+2} + \dots + \alpha_{rn}x_n), \end{aligned}$$

которая называется общим решением исходной системы уравнений. Из общего решения, задавая значения свободных неизвестных, можно получать соответствующее частное решение системы. Частное решение (β_1, β_2, ... , β_r, 0, 0, ... , 0), полученное при нулевых значениях свободных неизвестных x_{r+1}, x_{r+2}, ... , x_n, называется базисным решением, соответствующим базису (x_1, x_2, ... , x_r). Заметим, что базисные неизвестные могут быть выбраны не единственным образом, но число их в базисе всегда одинаково. В системе (1.11) в качестве базисных приняты первые r неизвестных, чтобы не усложнять запись

дополнительными индексами. Максимальное число, которого может достигнуть количество вариантов выбора базиса, равно C_n^r (число сочетаний из n элементов по r).

Метод Гаусса удобно реализовать в матричной форме (это следует делать и при выполнении лабораторной или контрольной работы). Для этого все коэффициенты и свободные члены системы уравнений записывают в таблицу, которая называется в линейной алгебре матрицей. Матрицу A с общим элементом a_{ij} обозначают $[a_{ij}]$, (a_{ij}) или $\|a_{ij}\|$. Матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных, называется матрицей системы. Если к матрице системы добавлен столбец свободных членов, то полученная матрица называется расширенной матрицей системы. Расширенная матрица системы (1.1) имеет вид

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]. \qquad (1.12)$$

Для удобства в ней столбец свободных членов отделен от матрицы системы вертикальной чертой.

Каждому элементарному преобразованию системы линейных уравнений соответствует элементарное преобразование ее расширенной матрицы:

а) умножение элементов какой-либо строки на одно и то же число, не равное нулю, коротко – умножение строки на число;

б) прибавление (вычитание) к элементам некоторой строки соответствующих элементов другой строки, предварительно умноженной на некоторое число, коротко – прибавление строки к строке;

в) перестановка строк;

г) вычеркивание строки, состоящей из одних нулей;

д) перестановка столбцов (исключая столбец свободных членов).

Этими элементарными преобразованиями по схеме метода Гаусса матрица (1.12), соответствующая системе (1.1), приводится к следующей матрице, соответствующей системе (1.9):

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} & b_r \end{array}\right]. \qquad (1.13)$$

Элементарными преобразованиями, соответствующими обратному ходу метода Гаусса, матрица (1.13) приводится к расширенной матри-

це системы уравнений (1.11)

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{1,r+1} & \dots & \alpha_{1n} & & \beta_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_{2,r+1} & \dots & \alpha_{2n} & & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{r,r+1} & \dots & \alpha_{rn} & & \beta_r \end{array}\right]. \qquad (1.14)$$

Матрицы эквивалентных систем будем называть эквивалентными, обозначая это отношение знаком ~.

Решение примера 1.1 методом Гаусса в матричной форме дает следующую цепочку эквивалентных матриц:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right],$$

где в рамку заключены ведущие элементы шагов метода Гаусса. Последней из приведенных матриц соответствует система (1.5) - решение системы (1.2).

Пример 1.2. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 5. \end{aligned}$$

В расширенной матрице данной системы уравнений

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

первую строку, умноженную на -1, прибавим ко второй и третьей строке. В результате получим эквивалентную матрицу

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Строка [0 0 0 | 2] соответствует уравнению

$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 2.$$

Наличие такого уравнения свидетельствует о несовместности данной системы уравнений.

Пример 1.3. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 &= 5, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 &= 7. \end{aligned}$$

Элементарные преобразования расширенной матрицы данной системы уравнений дают следующую цепочку эквивалентных матриц:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

В этой цепочке вторая матрица получается из первой, если в ней первую строку, умножив на -1, прибавить ко второй и третьей. Чтобы получить третью матрицу, нужно во второй матрице вторую строку, умножив на -1, прибавить к первой, а затем, умножив вторую строку на -2, прибавить к третьей. Так как в третьей матрице последняя строка состоит из одних нулей, то, вычеркнув эту строку, получим матрицу, которая соответствует системе

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 1, \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Итак, поскольку $r = 2 < n = 4$, исходная система имеет бесконечное множество решений. Общее решение можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 2x_3, \\ x_2 &= 2 + x_3 - x_4, \end{aligned}$$

где x_1, x_2 – базисные неизвестные, а x_3, x_4 – свободные. Базисное решение $(1, 2, 0, 0)$, соответствующее базису (x_1, x_2), получается из общего решения, если свободным неизвестным придать нулевые значения.

Отметим, что, преобразовывая расширенную матрицу, можно переставлять и ее столбцы (не трогая столбца свободных членов), помня при этом, какому неизвестному соответствует тот или иной столбец. Необходимость в такой перестановке может возникнуть, когда для преобразований матрицы в роли ведущего потребуется диагональный элемент, отличный от нуля.

§ 1.2. Определители

[1, 5-12; 2, 7-24; 3, 7-42; 4, 51-89]

Рассмотрим квадратную матрицу A порядка n, т.е.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (1.15)$$

Определителем, соответствующим матрице (1.15), называется величина, вычисляемая по элементам матрицы следующим образом:

1) составляются всевозможные произведения n элементов матрицы $A = [a_{ij}]$ так, чтобы в каждое произведение вошли элементы по одному из разных строк и столбцов матрицы (таких произведений будет $n! = 1\cdot 2\cdot \dots \cdot n$);

2) элементы располагаются в произведении в порядке возрастания первых индексов, т.е.

$$a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot \dots \cdot a_{nj_n};$$

3) из вторых индексов элементов, входящих в произведение, образуется перестановка $J = (j_1, j_2, \dots, j_n)$, в которой подсчитывается число инверсий $\sigma(J)$ (инверсией называется ситуация, когда в перестановке большее число стоит левее меньшего, не обязательно рядом);

4) произведение умножается на $(-1)^{\sigma(J)}$, и все произведения со своими знаками складываются.

Коротко это определение записывается формулой

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_J (-1)^{\sigma(J)}\cdot a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot \dots \cdot a_{nj_n}. \qquad (1.16)$$

Для обозначения определителя (см. равенство (1.16)) используются две вертикальные черты, которые ставятся по обеим сторонам матрицы. Такое обозначение определителя указывает на то, какой матрице соответствует определитель, и удобно для преобразования определителя и его вычисления. Когда указанные детали не представляют интереса, то определитель матрицы A обозначают через $|A|$ или detA (det - сокращение слова determination - определитель).

По формуле (1.16) легко вычислить определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underset{J=(1,2)}{a_{11}\cdot a_{22}} - \underset{J=(2,1)}{a_{12}\cdot a_{21}}. \qquad (1.17)$$

Несколько сложнее вычисляется определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underset{J=(1,2,3),\ \sigma(J)=0}{(-1)^0\cdot a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}} + \underset{J=(1,3,2),\ \sigma(J)=1}{(-1)^1\cdot a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}} +$$

$$+ \underset{J=(2,1,3),\ \sigma(J)=1}{(-1)^1\cdot a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}} + \underset{J=(2,3,1),\ \sigma(J)=2}{(-1)^2\cdot a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}} + \underset{J=(3,1,2),\ \sigma(J)=2}{(-1)^2\cdot a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}} +$$

$$+ \underset{J=(3,2,1),\ \sigma(J)=3}{(-1)^3\cdot a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}}.$$

При $n > 3$ применение формулы (1.16) затруднительно, поэтому для вычисления определителей удобнее использовать их свойства. Важнейшим из них является теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца). В этой теореме используются понятия минора и алгебраического дополнения элементов определителя.

Минором M_{ij}, соответствующим элементу a_{ij}, называется определитель, который получается из данного определителя вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}. Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определяется через его минор M_{ij} равенством $A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$.

Теорема (о разложении определителя). Определитель $|A|$ равен сумме произведений элементов произвольной строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т.е.

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}. \qquad (1.18)$$

С помощью этой теоремы можно доказать другие свойства определителей. Приведем некоторые из них.

1. Определитель не изменится, если его транспонировать, т.е. строки записать в столбцы, не меняя их порядка.

Из приведенного свойства следует, что все свойства определителей, доказанные для строк, справедливы и для столбцов.

2. Если поменять местами две какие-либо строки (столбца) определителя, то он сменит свой знак на противоположный.

3. Если какая-либо строка (столбец) определителя состоит из одних нулей, то определитель равен нулю.

4. Если элементы какой-либо строки (столбца) определителя имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

5. Если элементы каких-либо двух строк (столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

6. Определитель не изменится, если элементы некоторой строки (столбца), предварительно умножив на некоторое число, прибавить к соответствующим элементам другой строки (столбца), коротко - прибавить строку к строке (столбец к столбцу).

7. Сумма призведений элементов некоторой строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Свойство 7 вместе с теоремой о разложении определителя можно записать в виде равенств для строк и столбцов соответственно

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{kj} = \begin{cases} |A|, \text{ если } i = k, \\ 0, \text{ если } i \neq k; \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{ik} = \begin{cases} |A|, \text{ если } j = k, \\ 0, \text{ если } j \neq k. \end{cases}$$

Теорема о разложении определителя позволяет свести вычисление определителя n-го порядка к вычислению n определителей (n - 1)-го порядка. Это разложение по формуле (1.18) тем проще, чем больше нулей в строке (столбце), по элементам которой осуществляется разложение. Поэтому, пользуясь свойствами определителей, следует так преобразовать определитель, чтобы обратить элементы его выбранной строки (столбца) в нули за исключением одного (если определитель не равен нулю).

Пример 1.4. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 3 & 2 \\ \boxed{1} & 4 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 10 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Выберем элемент $a_{21} = 1$ (удобно, когда в определителе есть элемент, равный единице) в качестве ведущего и по схеме метода Гаусса получим на месте остальных элементов первого столбца нули. Для этого, умножив на -3 вторую строку, прибавим ее к первой строке, затем прибавим вторую строку к третьей и, наконец, умно- вторую строку на -2 и прибавив ее к четвертой, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 3 & 2 \\ \boxed{1} & 4 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 10 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{0} & -4 & -12 & -7 \\ \boxed{1} & 4 & 5 & 3 \\ \boxed{0} & 6 & 2 & 6 \\ \boxed{0} & 2 & -6 & -4 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по элементам первого столбца, см. формулу (1.18). В этом разложении останется лишь одно слагаемое, равное произведению элемента a_{21} на его алгебраическое дополнение A_{21}, так как все остальные элементы столбца равны нулю. Минор M_{21} получится, если вычеркнуть в определителе вторую строку и первый столбец, на пересечении которых стоит элемент a_{21} (вычеркиваемые строка и столбец обведены рамками). Наконец, для получения алгебраического дополнения A_{21} нужно умножить минор M_{21} на $(-1)^{2+1}$. Таким образом, получим

$$\Delta = 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -4 & -12 & -7 \\ 6 & 2 & 6 \\ 2 & -6 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -4 & -12 & -7 \\ 6 & 2 & 6 \\ \boxed{2} & -6 & -4 \end{vmatrix}.$$

В последнем определителе выберем элемент $a_{31} = 2$ в качестве ведущего и получим на месте остальных элементов первого столбца нули. Для этого третью строку, умножив на 2, прибавим к первой, затем, умножив третью строку на -3, прибавим ко второй. Разложим полученный в результате этих действий определитель по элементам первого столбца, тогда

$$\Delta = -\begin{vmatrix} \boxed{0} & -24 & -15 \\ \boxed{0} & 20 & 18 \\ \boxed{2} & -6 & -4 \end{vmatrix} = -2\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -24 & -15 \\ 20 & 18 \end{vmatrix}.$$

Определитель второго порядка можно вычислить по формуле (1.17), т.е.

$$\Delta = -2\cdot\begin{vmatrix} -24 & -15 \\ 20 & 18 \end{vmatrix} = -2\cdot(-24\cdot 18 - (-15)\cdot 20) = 264.$$

Для упрощения вычислений полезно иногда использовать свойство 4 определителей о вынесении общего множителя, например,

$$\Delta = -2\cdot\begin{vmatrix} -24 & -15 \\ 20 & 18 \end{vmatrix} = -2\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} -6 & -15 \\ 5 & 18 \end{vmatrix} = -8\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 18 \end{vmatrix} = 264.$$

Если элементы определителя - целые числа, то, исходя из формулы (1.16), можно сделать вывод, что такой определитель равен целому числу. В этом случае, должным образом применяя свойства определителя, можно избежать громоздких чисел и дробей в промежуточных вычислениях.

§ 1.3. Формулы Крамера

[1, 12-15; 2, 25-28; 3, 87-89]

Определители применяются при решении систем линейных уравнений. Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{array}
$$

Предположим, что определитель матрицы этой системы

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

не равен нулю. Умножим первое уравнение системы на A_{1j}, второе уравнение – на A_{2j} и т.д., n-е уравнение – на A_{nj} и сложим. Все указанные множители – это алгебраические дополнения элементов j-го столбца определителя Δ системы. В результате получим равенство

$$
\begin{array}{l}
(a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + \ldots + a_{n1}A_{nj})\cdot x_1 + \\
+ (a_{12}A_{1j} + a_{22}A_{2j} + \ldots + a_{n2}A_{nj})\cdot x_2 + \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ (a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj})\cdot x_j + \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ (a_{1n}A_{1j} + a_{2n}A_{2j} + \ldots + a_{nn}A_{nj})\cdot x_n = \\
= b_1\cdot A_{1j} + b_2\cdot A_{2j} + \ldots + b_n\cdot A_{nj},
\end{array}
$$

в котором выражение в скобках перед неизвестным, допустим x_k, есть сумма произведений элементов k-го столбца определителя Δ на алгебраические дополнения элементов j-го столбца этого определителя. По свойству 7 определителей и теореме о разложении все эти суммы равны нулю при $k \neq j$ и только одна сумма при $k = j$ (т.е. множитель перед x_j) будет отлична от нуля и равна Δ. Правая часть равенства есть разложение определителя

$$
\Delta_j = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

по элементам столбца, составленного из свободных членов. Этот определитель Δ_j получается из главного определителя Δ заменой j-го столбца (коэффициентов при неизвестном x_j) столбцом свободных членов. Таким образом, полученное равенство примет вид $\Delta\cdot x_j = \Delta_j$, откуда, поскольку $\Delta \neq 0$, получаем формулы Крамера

$$
x_j^{(o)} = \Delta_j/\Delta, \; j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (1.19)
$$

Пример 1.5. Решить по формулам Крамера систему уравнений

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 11, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \boxed{1} \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{2} & \boxed{-1} & \boxed{1} \\ -3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 6.$$

Так как определитель системы $\Delta = 6$ отличен от нуля, то формулы Крамера применимы. Вычислим вспомогательные определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 11 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & \boxed{0} & 1 \\ 11 & \boxed{0} & 2 \\ \boxed{0} & \boxed{-2} & \boxed{-1} \end{vmatrix} = -2\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 11 & 2 \\ 3 & 0 & \boxed{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & \boxed{0} \\ 7 & 11 & \boxed{0} \\ \boxed{3} & \boxed{0} & \boxed{-1} \end{vmatrix} = -1\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} = -20;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & \boxed{-1} & 5 \\ 1 & -2 & 11 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{0} & \boxed{-1} & \boxed{0} \\ -3 & \boxed{-2} & 1 \\ 1 & \boxed{-1} & -5 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 14.$$

По формулам Крамера (1.19) получим решение данной системы

$$x_1^{(o)} = \Delta_1/\Delta = -1/3, \quad x_2^{(o)} = \Delta_2/\Delta = -10/3, \quad x_3^{(o)} = \Delta_3/\Delta = 7/3.$$

Следует подчеркнуть, что метод Гаусса является более эффективным методом решения систем линейных уравнений, чем решение по формулам Крамера, так как вычисление определителей требует выполнения бо́льшего числа арифметических действий. Поэтому определители используются главным образом для теоретического исследования систем линейных уравнений.

§ 1.4. Матрицы. Действия с матрицами

[1, 18–22; 2, 64–67; 3, 10–17, 74–79; 4, 35–39, 42–47]

Матрицей называется прямоугольная таблица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Первый индекс i элемента a_{ij} матрицы A указывает номер стро-

ки, а второй индекс j - номер столбца, на пересечении которых расположен элемент a_{ij}. Для матрицы A с общим элементом a_{ij} используют также, как отмечалось выше, обозначения $[a_{ij}]$, (a_{ij}), $\|a_{ij}\|$.

Если в матрице m строк и n столбцов, то говорят, что она имеет размеры $m \times n$ (m на n). Матрица размеров $m \times 1$ называется столбцом (матрица-столбец), а матрица размеров $1 \times n$ - строкой (матрица-строка). Если количество строк матрицы равно числу ее столбцов ($m = n$), то матрица называется квадратной порядка n. Квадратная матрица вида

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

у которой все элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю, называется диагональной.

Две матрицы одинаковых размеров называются равными, если их элементы, имеющие одинаковые индексы, совпадают.

С матрицами производят следующие основные действия: сложение матриц, умножение матрицы на число, умножение матриц, транспонирование матрицы.

Сложение матриц. Чтобы сложить две матрицы $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ одинаковых размеров, нужно сложить их соответствующие элементы, стоящие на одних и тех же местах, т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, если $C = A + B$.

Пример 1.6.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & -3+6 \\ 0+4 & 1-2 \\ -2-5 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -1 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Особую роль при сложении играет нулевая матрица O, все элементы которой равны нулю. Она ведет себя при сложении как обычный нуль, т.е. для любой матрицы A выполняется $O + A = A + O = A$.

Сложение матриц обладает следующими свойствами:

1) $A + B = B + A$; 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$; 3) $A + O = O$.

Вычитание матриц определяется как действие, обратное сложению.

Пример 1.7.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ -7 & 11 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 7 & -9 & 8 \end{bmatrix}.$$

Умножение матрицы на число. Чтобы умножить матрицу $A = [a_{ij}]$

на число α, нужно все ее элементы умножить на α, т.е. $\alpha A = [\alpha a_{ij}]$.

Пример 1.8.

$$(-2)\cdot\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Умножение матрицы на число обладает следующими свойствами:

1) $1\cdot A = A$; 2) $0\cdot A = 0$;

3) $\alpha\cdot(\beta\cdot A) = (\alpha\cdot\beta)\cdot A$; 4) $\alpha\cdot(A + B) = \alpha\cdot A + \alpha\cdot B$;

5) $(\alpha + \beta)\cdot A = \alpha\cdot A + \beta\cdot A$; 6) $\det(\alpha A) = \alpha^n\cdot\det A$.

Умножение матриц. Перемножать можно лишь матрицы согласованных размеров, т.е. когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Пусть матрицы $A = [a_{ik}]$ и $B = [b_{kj}]$ имеют соответственно размеры $m\times p$ и $p\times n$. Их произведением $A\cdot B$ в указанном порядке называют матрицу $C = [c_{ij}]$ размеров $m\times n$, элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B, т.е.

$$c_{ij} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + \ldots + a_{ip}\cdot b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\cdot b_{kj}.$$

Правило умножения матриц поясняет следующая схема:

$$i\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & & a_{i2} & \cdot & \cdot & \cdot & & & a_{ip} & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} & & & & & j & & & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & & & b_{1j} & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & b_{2j} & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & b_{pj} & & & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} & & & & & j & & & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & c_{ij} & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \end{array} i.$$

Пример 1.9.

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2\cdot2 + 3\cdot4 + 0\cdot3 & -2\cdot1 + 3\cdot5 + 0\cdot2 & -2\cdot0 + 3\cdot1 + 0\cdot(-5) \\ 4\cdot2 - 2\cdot4 + 1\cdot3 & 4\cdot1 - 2\cdot5 + 1\cdot2 & 4\cdot0 - 2\cdot1 + 1\cdot(-5) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 13 & 3 \\ 3 & -4 & -7 \end{bmatrix}.$$

Пример 1.10.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot2 + 0\cdot(-5) + 2\cdot(-4) \\ 4\cdot2 - 5\cdot(-5) + 1\cdot(-4) \\ 6\cdot2 - 2\cdot(-5) + 4\cdot(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 29 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Поскольку возможность умножения матриц обусловлена их размерами, то перестановка множителей в произведении матриц бывает лишена смысла, но даже для квадратных матриц A и B одного порядка, вообще говоря, $A \cdot B \neq B \cdot A$, хотя в частных случаях возможно совпадение таких произведений.

Диагональная матрица

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

на главной диагонали которой стоят единицы, называется единичной. Если хотят указать порядок единичной матрицы, то используют обозначение E_n. Единичная матрица играет роль единицы при умножении матриц, т.е. для произвольной матрицы A размеров $m \times n$ выполняются равенства $A \cdot E_n = A$, $E_m \cdot A = A$, а для произвольной квадратной матрицы A и единичной матрицы E того же порядка, что и A, имеют место равенства $A \cdot E = E \cdot A = A$.

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$; 2) $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$;

3) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$; 4) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

В свойстве 4 матрицы A, B – квадратные, одного и того же порядка.

Транспонирование матриц. Матрица A^T называется транспонированной по отношению к матрице A, если она получена из матрицы A заменой ее строк ее столбцами с сохранением их порядка.

Пример 1.11.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Операция транспонирования обладает следующими свойствами:

1) $(A^T)^T = A$; 2) $(A + B)^T = A^T + B^T$; 3) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Наряду с обозначением транспонированной матрицы A^T в литературе используют также обозначение A'.

§ 1.5. Обратная матрица

[1, 22–26; 2, 68–80; 3, 79–83; 4, 69–75]

Квадратная матрица, обозначаемая A^{-1}, называется обратной к матрице A того же порядка, если $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Поскольку $|A^{-1} \cdot A| = |A^{-1}| \cdot |A| = 1$, то обратными матрицами обладают только невырожденные квадратные матрицы, т.е. такие, у ко-

торых определитель отличен от нуля. Для невырожденной матрицы A обратная матрица A^{-1} единственна. Действительно, пусть B - матрица, не совпадающая с A^{-1}, такая, что $B\cdot A = A\cdot B = E$, тогда

$$B = B\cdot E = B\cdot(A\cdot A^{-1}) = (B\cdot A)\cdot A^{-1} = E\cdot A^{-1} = A^{-1},\ \text{т.е. } B = A^{-1}.$$

Полезно знать следующие свойства обратных матриц:

1) $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$; 2) $(A^{-1})^{-1} = A$;

3) $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$, где T - знак транспонирования.

Нахождение обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений

Этот способ состоит в следующем:

1) каждый элемент a_{ij} данной матрицы $A = [a_{ij}]$ заменяется своим алгебраическим дополнением A_{ij};

2) полученная матрица транспонируется и делится на определитель исходной матрицы $|A|$. В результате для матрицы $A = [a_{ij}]$ получаем обратную $A^{-1} = [A_{ji}]/|A|$, т.е.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (1.20)$$

где A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Проверка равенств $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$ для матрицы (1.20) осуществляется непосредственным умножением матриц.

Пример 1.12. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & \boxed{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4.$$

Так как $|A| = 4 \neq 0$, то для данной матрицы существует обратная. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2,\quad A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10,\quad A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

По формуле (1.20) получаем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 10 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Полезно, найдя обратную матрицу A^{-1}, проверить правильность вычислений подстановкой A^{-1} в равенство $A^{-1}\cdot A = E$.

Рассмотренный способ нахождения обратной матрицы практически не применяется для случаев $n > 3$ ввиду большого числа арифметических действий. Значительно экономнее способ, рассматриваемый ниже, использующий метод Гаусса.

Решение системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \qquad (1.21)$$

у которой определитель матрицы отличен от нуля.

Введем обозначения: $A = [a_{ij}]$ – матрица системы (1.21), $X = [\,x_1 \;\; x_2 \;\ldots\; x_n\,]^T$ – столбец неизвестных, $B = [\,b_1 \;\; b_2 \;\ldots\; b_n\,]^T$ – столбец свободных членов. Левые части уравнений системы (1.21) образуют матрицу-столбец, равную $A\cdot X$, а саму систему можно записать в матричной форме

$$A\cdot X = B. \qquad (1.22)$$

Умножим обе части матричного уравнения (1.22) слева на матрицу A^{-1}, которая существует в силу предположения $|A| \neq 0$. В результате получим $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$ или $E\cdot X = A^{-1}\cdot B$, откуда $X = A^{-1}\cdot B$.

Таким образом, решение системы (1.21) дает формула

$$X = A^{-1}\cdot B. \qquad (1.23)$$

Нахождение обратной матрицы по методу Гаусса

Пусть дана невырожденная матрица $A = [a_{ij}]$ порядка n. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= y_n, \end{aligned}$$

которая в матричной форме запишется в виде $A \cdot X = Y$ или $A \cdot X = E \cdot Y$, где $X = [\ x_1\ \ x_2\ \ldots\ x_n\ ]^T$, $Y = [\ y_1\ \ y_2\ \ldots\ y_n\ ]^T$.

Если решить эту систему относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то она приведется к системе

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \ldots + b_{1n}y_n, \\ x_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \ldots + b_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \ldots + b_{nn}y_n, \end{aligned}$$

или в матричной форме $X = B \cdot Y$, т.е. $E \cdot X = B \cdot Y$, где $B = [b_{ij}]$. Поскольку из равенства $A \cdot X = Y$, соответствующего исходной системе по формуле (1.23) следует $X = A^{-1}Y$, то, очевидно, матрицы B и A^{-1} совпадают. Из этих рассуждений вытекает следующее правило.

Если справа от матрицы A приписать единичную матрицу E того же порядка n и полученную составную матрицу

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \ldots & a_{1n} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right]$$

преобразовать, производя элементарные преобразования с ее строками по методу Гаусса так, чтобы на месте матрицы A получилась единичная матрица, то справа от этой единичной матрицы будет получена матрица, совпадающая с обратной A^{-1}.

Пример 1.13. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Возьмем составную матрицу

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

и преобразуем ее следующим образом:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right].$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\cdot\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Пример 1.14. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Возьмем составную матрицу и преобразуем ее следующим образом:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -2 & 5 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{array}\right].$$

Отсюда следует, что

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 4 & -4 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример 1.15. Используя обратную матрицу, решить систему уравнений

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Выпишем матрицу A коэффициентов системы и матрицу-столбец свободных членов

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица для матрицы A найдена в примере 1.14. По формуле (1.23) получаем матрицу-столбец X – решение данной системы

$$X = \frac{1}{12}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 4 & -4 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\cdot\begin{bmatrix} 0\cdot 1 + 6\cdot 0 - 6\cdot 2 \\ 4\cdot 1 - 4\cdot 0 + 4\cdot 2 \\ -2\cdot 1 + 5\cdot 0 + 1\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

т.е. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

Решение системы линейных уравнений по формуле (1.23) удобно в том случае, когда требуется решить несколько систем (1.21) или, что то же самое, (1.22) с одинаковыми левыми частями, но с различными столбцами свободных членов. Такой случай может представиться при решении следующей экономической задачи.

§ 1.6. Задача об объемах производства (межотраслевой баланс)

[1, 26–29; 3, 77–89; 5, 102–114; 14, 156–172]

Рассмотрим систему из n взаимосвязанных отраслей производства, каждая из которых использует в производстве собственную продукцию и продукцию других отраслей. Известны коэффициенты a_{ij} прямых затрат, a_{ij} – это количество продукции i-й отрасли, необходимое для производства единицы продукции j-й отрасли. Коэффициенты a_{ij} образуют матрицу A коэффициентов прямых (удельных) затрат

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Требуется найти объемы продукции отраслей, предполагая, что каждая отрасль потребляет свою продукцию и продукцию других отраслей в количествах, пропорциональных объему собственного производства. Кроме того, каждая отрасль часть своей продукции, так называемый

конечный продукт, реализует вне рассматриваемой системы отраслей (экспорт, запасы и т.д.).

Обозначим через x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ неизвестный пока объем продукции, производимой i-й отраслью за какой-нибудь период, например за год, а через y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ - объем конечного продукта i-й отрасли. Тогда объем x_i распределится между 1-й, 2-й, ... , i-й, ... , n-й отраслями соответственно в количествах

$$a_{i1}\cdot x_1,\ a_{i2}\cdot x_2,\ \ldots,\ a_{ii}\cdot x_i,\ \ldots,\ a_{in}\cdot x_n,$$

а остаток составит объем конечного продукта y_i, что приводит к уравнению баланса для i-й отрасли

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ii}x_i + \ldots + a_{in}x_n + y_i.$$

В результате получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1, \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n. \end{aligned}$$

Если ввести обозначения для матриц-столбцов

$$X = [\ x_1\ \ x_2\ \ldots\ x_n\ ]^T,\quad Y = [\ y_1\ \ y_2\ \ldots\ y_n\ ]^T,$$

то система запишется в матричной форме

$$X = A\cdot X + Y. \qquad (1.24)$$

По смыслу задачи матрицы-столбцы X, Y неотрицательны, т.е. неотрицательны их элементы. Полученное равенство называется моделью В.Леонтьева межотраслевого баланса. Итак, требуется найти неотрицательную матрицу-столбец X - решение матричного уравнения (1.24). Существование такого решения определяется свойствами матрицы A. Матрица A называется продуктивной, если найдется матрица-столбец X_o, $X_o > 0$, для которой выполняется неравенство $X_o > AX_o$. Здесь и далее матричное неравенство типа $A > B$ означает, что элементы матрицы $(A - B)$ положительны. Экономический смысл продуктивности матрицы состоит в том, что затраты AX_o на выпуск продукции меньше, чем выход продукции X_o. Это обеспечивает получение конечного продукта. Можно показать, что для продуктивной матрицы поставленная задача разрешима. Решим полученное уравнение (1.24):

$$E\cdot X - A\cdot X = Y,\ (E - A)\cdot X = Y,$$

$$X = (E - A)^{-1}\cdot Y. \qquad (1.25)$$

Решение (1.25) уравнения (1.24) найдено в предположении, что матрица $(E - A)$ - невырождена. Это решение удобно для анализа меж-

отраслевых связей. Вычислив обратную матрицу $(E - A)^{-1}$, по формуле (1.25) можно просчитывать различные варианты плана $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ производства в зависимости от объемов конечных продуктов, задаваемых матрицей Y.

Наряду с прямыми затратами a_{ij} рассматриваются косвенные затраты. Так, например, j-я отрасль использует продукцию i-й отрасли непосредственно (прямые затраты) и опосредованно, потребляя ранее произведенную свою продукцию и продукцию других отраслей, которые использовали в своем производстве продукцию i-й отрасли. Эти опосредованные затраты называются косвенными затратами первого порядка. При рассмотрении более отдаленного опосредования вводят понятия косвенных затрат более высоких порядков. Коэффициенты косвенных затрат k-го порядка совпадают с элементами матрицы A^{k+1} - (k + 1)-й степени матрицы A.

Полные затраты представляют собой сумму прямых затрат и косвенных затрат всех порядков. Коэффициенты полных затрат совпадают с элементами матрицы C, представляющей сумму матричного ряда

$$C = A + A^2 + \dots + A^{k+1} + \dots$$

При определенных ограничениях, накладываемых на матрицу A (или E - A), этот матричный ряд сходится поэлементно и его сумма равна

$$C = -E + E + A + A^2 + \dots + A^{k+1} + \dots = (E - A)^{-1} - E. \quad (1.26)$$

Здесь использована формула суммирования матричного ряда, аналогичная формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{k+1} + \dots = (1 - a)^{-1}, \ |a| < 1.$$

Уточним экономический смысл элементов матриц $(E - A)^{-1}$ и C. Обозначим $(E - A)^{-1} = B = [b_{ij}]$, тогда формула (1.25) примет вид $X = B \cdot Y$ и объем продукции i-й отрасли определится равенством

$$x_i = b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + \dots + b_{ij}y_j + \dots + b_{in}y_n.$$

Приравняв к нулю в этом выражении все переменные $y_1, y_2, \dots, y_n$, кроме $y_j = 1$, получим экономический смысл элемента b_{ij} матрицы B. Он определяет количество валовой продукции i-й отрасли, необходимое для производства единицы конечного продукта j-й отрасли. Используя формулу (1.26), получим другое представление матрицы X: $X = CY + Y$, из которого видно, что элемент c_{ij} матрицы C определяет количество промежуточной продукции i-й отрасли, необходимое для производства единицы конечного продукта j-й отрасли. Матрицы B и C отличаются только диагональными элементами, причем $b_{ii} = c_{ii} + 1$.

Пример 1.16. Найти объемы призводств и матрицу косвенных затрат первого порядка в трехотраслевой модели, если даны матрица A прямых затрат и матрица Y объемов конечных продуктов

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 46 \\ 69 \\ 46 \end{bmatrix}.$$

Для объемов x_1, x_2, x_3 отраслей выполняются следующие уравнения баланса

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,2x_1 + 0,4x_2 + 0,2x_3 + 46, \\ x_2 &= 0,1x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 + 69, \\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,1x_2 + 0,2x_3 + 46. \end{aligned}$$

Для решения данной системы уравнений по формуле (1.25), найдем матрицу E - A.

$$E - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,4 & -0,2 \\ -0,1 & 0,6 & -0,3 \\ -0,4 & -0,1 & 0,8 \end{bmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу для матрицы (E - A). Определитель матрицы (E - A) равен

$$|E - A| = \begin{vmatrix} 0,8 & -0,4 & -0,2 \\ -0,1 & 0,6 & -0,3 \\ -0,4 & -0,1 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,001 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -4 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \\ -4 & -1 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 0,001 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 44 & -26 \\ -1 & 6 & -3 \\ 0 & -25 & 20 \end{vmatrix} = 0,001 \cdot \begin{vmatrix} 44 & -26 \\ -25 & 20 \end{vmatrix} = 0,001 \cdot 230 = 0,23.$$

Обозначив для упрощения записи E - A = D, вычислим алгебраические дополнения матрицы D (см. пример 1.12)

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 0,6 & -0,3 \\ -0,1 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,45; \quad D_{12} = -\begin{vmatrix} -0,1 & -0,3 \\ -0,4 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,20;$$

$$D_{13} = \begin{vmatrix} -0,1 & 0,6 \\ -0,4 & -0,1 \end{vmatrix} = 0,25; \quad D_{21} = -\begin{vmatrix} -0,4 & -0,2 \\ -0,1 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,34;$$

$$D_{22} = \begin{vmatrix} 0,8 & -0,2 \\ -0,4 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,56; \quad D_{23} = -\begin{vmatrix} 0,8 & -0,4 \\ -0,4 & -0,1 \end{vmatrix} = 0,24;$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} -0,4 & -0,2 \\ 0,6 & -0,3 \end{vmatrix} = 0,24; \quad D_{32} = -\begin{vmatrix} 0,8 & -0,2 \\ -0,1 & -0,3 \end{vmatrix} = 0,26;$$

$$D_{33} = \begin{vmatrix} 0,8 & -0,4 \\ -0,1 & 0,6 \end{vmatrix} = 0,44.$$

По формуле (1.20) получаем обратную матрицу

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{0,23}\cdot\begin{bmatrix} 0,45 & 0,34 & 0,24 \\ 0,20 & 0,56 & 0,26 \\ 0,25 & 0,24 & 0,44 \end{bmatrix} = \frac{1}{23}\cdot\begin{bmatrix} 45 & 34 & 24 \\ 20 & 56 & 26 \\ 25 & 24 & 44 \end{bmatrix}.$$

По формуле (1.25) найдем объемы производств x_1, x_2, x_3:

$$X = \frac{1}{23}\cdot\begin{bmatrix} 45 & 34 & 24 \\ 20 & 56 & 26 \\ 25 & 24 & 44 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 46 \\ 69 \\ 46 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 34 & 24 \\ 20 & 56 & 26 \\ 25 & 24 & 44 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 240 \\ 260 \\ 210 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, $x_1 = 240$, $x_2 = 260$, $x_3 = 210$. Подставив полученные значения в исходную систему, можно найти распределение продукции каждой отрасли по другим отраслям, см. табл. 1.1. Так, например, из 260 единиц продукции 2-й отрасли 24 единицы получает 1-я отрасль, 104 единицы 2-я отрасль оставляет себе, 63 единицы получает 3-я отрасль и 69 единиц составляет конечный продукт.

Таблица 1.1

Производящие отрасли		Потребляющие отрасли			Конечный продукт
№	Объем	1	2	3	
1	240	48	104	42	46
2	260	24	104	63	69
3	210	96	26	42	46

Матрица $A^{(1)}$ косвенных затрат 1-го порядка равна A^2, т.е.

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,16 & 0,26 & 0,20 \\ 0,18 & 0,23 & 0,20 \\ 0,17 & 0,22 & 0,15 \end{bmatrix}.$$

С задачей о межотраслевом балансе связана двойственная задача о равновесных ценах. Рассмотрим элементы j-го столбца матрицы A прямых затрат, т.е. a_{1j}, a_{2j}, ... , a_{jj}, ... , a_{nj}. Они показывают количество продукции соответственно 1-й, 2-й, ... , j-й, ... , n-й отрасли, идущее на производство единицы продукции j-й отрасли. Если обозначить цены соответственно p_1, p_2, ... , p_j, ... , p_n, то расходы j-й отрасли на приобретение продукции указанных отраслей соответственно равны $a_{1j}\cdot x_j\cdot p_1$, $a_{2j}\cdot x_j\cdot p_2$, ... , $a_{jj}\cdot x_j\cdot p_j$, ... , $a_{nj}\cdot x_j\cdot p_n$. Кроме этих затрат j-я отрасль несет расходы на рабочую силу, приобретение продуктов производства вне рассматриваемой сис-

темы отраслей и прочее, что создает некоторую прибавленную стоимость. Если учесть прибавленную стоимость $v_j x_j$, где v_j – величина прибавленной стоимости, приходящаяся на единицу продукции j-й отрасли (удельная прибавленная стоимость), то общая стоимость продукции отрасли равна

$$p_j x_j = a_{1j}x_j p_1 + a_{2j}x_j p_2 + \ldots + a_{jj}x_j p_j + \ldots + a_{nj}x_j p_n + v_j x_j.$$

Сократив обе части этого уравнения на x_j, получим уравнение

$$p_j = a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \ldots + a_{jj}p_j + \ldots + a_{nj}p_n + v_j$$

или для цен всех отраслей систему уравнений

$$\begin{aligned} p_1 &= a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{n1}p_n + v_1, \\ p_2 &= a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{n2}p_n + v_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{nn}p_n + v_n. \end{aligned}$$

Введя обозначения

$$P = [\ p_1\ \ p_2\ \ldots\ p_n\ ]^T,\ V = [\ v_1\ \ v_2\ \ldots\ v_n\ ]^T,$$

ее можно записать в матричной форме

$$P = A^T \cdot P + V, \qquad (1.27)$$

где A^T – матрица, транспонированная по отношению к A.

Цены $p_1, p_2, \ldots, p_n$ называются равновесными, если они найдены из уравнения (1.27) при условии, что общая прибавленная стоимость всех отраслей равна общей стоимости их конечных продуктов, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_j = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i.$$

Решение уравнения (1.27) представляется формулой

$$P = (E - A)^{-T} \cdot V, \qquad (1.28)$$

в которой матрица $(E - A)^{-T}$ транспонированная по отношению к матрице полных затрат $B = (E - A)^{-1}$.

Вычислим равновесные цены для трехотраслевой модели, рассмотренной в примере 1.6, если заданы величины удельной прибавленной стоимости $v_1 = 0{,}30$, $v_2 = 0{,}45$, $v_3 = 1{,}40$. По формуле (1.28) имеем

$$P = \frac{1}{23} \cdot \begin{bmatrix} 45 & 20 & 25 \\ 34 & 56 & 24 \\ 24 & 26 & 44 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}30 \\ 0{,}45 \\ 1{,}40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}5 \\ 3{,}0 \\ 3{,}5 \end{bmatrix}.$$

Умножив соответствующие строки табл. 1.1 на $p_1 = 2{,}5$, $p_2 = 3{,}0$, $p_3 = 3{,}5$, получим стоимостной вариант межотраслевого баланса.

Рассмотренный выше пример межотраслевого баланса носит учебный характер. Для ознакомления с реальным примером рассмотрим данные, приведенные в книге [14]. Для семи отраслей японской экономики, а именно, сельское хозяйство, лесное и рыбное хозяйство, тяжелая промышленность, легкая промышленность, строительство, энергетика, транспорт и связь, услуги, матрица A прямых затрат, полученная путем агрегирования и последующих расчетов на основе официально опубликованного 43-отраслевого баланса за 1980 г, равна

$$\begin{bmatrix} 0{,}1078 & 0{,}1645 & 0{,}0004 & 0{,}0012 & 0{,}0005 & 0{,}0000 & 0{,}0078 \\ 0{,}1156 & 0{,}2311 & 0{,}0433 & 0{,}1980 & 0{,}0035 & 0{,}0343 & 0{,}0439 \\ 0{,}0683 & 0{,}0980 & 0{,}4529 & 0{,}1935 & 0{,}3869 & 0{,}1435 & 0{,}0326 \\ 0{,}0018 & 0{,}0011 & 0{,}0012 & 0{,}0003 & 0{,}0086 & 0{,}0026 & 0{,}0183 \\ 0{,}0346 & 0{,}0370 & 0{,}0647 & 0{,}0192 & 0{,}1630 & 0{,}1953 & 0{,}0236 \\ 0{,}0376 & 0{,}0440 & 0{,}0283 & 0{,}0612 & 0{,}0248 & 0{,}1125 & 0{,}0541 \\ 0{,}0666 & 0{,}1246 & 0{,}1173 & 0{,}1231 & 0{,}0655 & 0{,}1431 & 0{,}1494 \end{bmatrix}.$$

Вычисление матрицы полных затрат $B = (E - A)^{-1}$ дает следующие результаты:

$$\begin{bmatrix} 1{,}1609 & 0{,}2594 & 0{,}0313 & 0{,}0642 & 0{,}0199 & 0{,}0243 & 0{,}0287 \\ 0{,}2075 & 1{,}3906 & 0{,}1478 & 0{,}3248 & 0{,}0885 & 0{,}1136 & 0{,}0960 \\ 0{,}2914 & 0{,}4354 & 2{,}0502 & 0{,}5612 & 0{,}9873 & 0{,}5964 & 0{,}1811 \\ 0{,}0072 & 0{,}0098 & 0{,}0109 & 1{,}0085 & 0{,}0177 & 0{,}0129 & 0{,}0240 \\ 0{,}1045 & 0{,}1425 & 0{,}1998 & 0{,}1221 & 1{,}3050 & 0{,}3376 & 0{,}0763 \\ 0{,}0834 & 0{,}1178 & 0{,}1011 & 0{,}1284 & 0{,}0908 & 1{,}1827 & 0{,}0912 \\ 0{,}1846 & 0{,}3163 & 0{,}3408 & 0{,}3069 & 0{,}2690 & 0{,}3276 & 1{,}2416 \end{bmatrix}.$$

Если задать величины конечных продуктов $y_1, y_2, \ldots, y_7$ или, как их иначе называют, величины конечного спроса в стоимостном выражении, то по формуле (1.25) получается столбец объемов выпуска отраслей в стоимостном выражении, т.е.

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 89 \\ 31625 \\ 30634 \\ 49670 \\ 3077 \\ 15919 \\ 117240 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 16271 \\ 77990 \\ 138244 \\ 53808 \\ 35034 \\ 43009 \\ 187315 \end{bmatrix}.$$

В книге [14] приведены также программы на языке BASIC для решения задачи о межотраслевом балансе и анализа межотраслевых связей.

§ 1.7. Линейные пространства

[1, 32-40; 2, 39-58; 3, 49-73; 4, 96-112]

Линейным пространством L называется множество, для элементов которого, называемых векторами, определены операции сложения векторов и умножения вектора на действительное число. Эти операции обладают следующими свойствами. Пусть $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ - произвольные векторы из L, α, β - произвольные действительные числа, тогда

1) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$;

2) $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$;

3) существует нулевой вектор $\bar{o}$ такой, что для любого вектора $\bar{a}$ выполняются равенства $\bar{a} + \bar{o} = \bar{o} + \bar{a} = \bar{a}$;

4) для любого вектора $\bar{a}$ существует противоположный вектор $-\bar{a}$ такой, что $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{o}$;

5) $1\cdot\bar{a} = \bar{a}$;

6) $\alpha\cdot(\beta\cdot\bar{a}) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\bar{a}$;

7) $(\alpha + \beta)\cdot\bar{a} = \alpha\cdot\bar{a} + \beta\cdot\bar{a}$;

8) $\alpha\cdot(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\cdot\bar{a} + \alpha\cdot\bar{b}$.

Одним из основных понятий в теории линейных пространств является понятие линейной зависимости. Система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ называется линейно зависимой, если найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, из которых хотя бы одно не равно нулю, такие, что линейная комбинация $\alpha_1\cdot\bar{a}_1 + \alpha_2\cdot\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n\cdot\bar{a}_n$ данных векторов с этими числами равна нулю, т.е.

$$\alpha_1\cdot\bar{a}_1 + \alpha_2\cdot\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n\cdot\bar{a}_n = \bar{o}. \qquad (1.29)$$

Если равенство (1.29) выполняется только в том случае, когда все числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ равны нулю, то система векторов называется линейно независимой.

Теорема. Система векторов тогда и только тогда линейно зависима, когда какой-нибудь вектор системы является линейной комбинацией остальных ее векторов.

Действительно, если система векторов линейно зависима, то в равенстве (1.29) какой-нибудь коэффициент, например α_1, отличен от нуля, и тогда вектор $\bar{a}_1$ можно представить в виде линейной комбинации остальных векторов $\bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots, \bar{a}_n$, разрешив уравнение (1.29) относительно вектора $\bar{a}_1$.

Обратно, если какой-нибудь вектор, например $\bar{a}_1$, представлен в виде линейной комбинации остальных векторов системы, т.е.

$$\bar{a}_1 = \alpha_2\cdot\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n\cdot\bar{a}_n,$$

то, записав это равенство в виде

$$-1\cdot\bar{a}_1 + \alpha_2\cdot\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n\cdot\bar{a}_n = \bar{o},$$

получим нулевую линейную комбинацию векторов, в которой по крайней мере один коэффициент $\alpha_1 = -1$ отличен от нуля.

Число m есть размерность линейного пространства L_m, если в L_m найдется линейно независимая система из m векторов, а любая система из большего числа векторов линейно зависима.

Базисом m-мерного линейного пространства называется любая линейно независимая система из m векторов. Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_m$ – некоторый базис линейного пространства L_m. Произвольный вектор $\bar{a}$ этого пространства можно представить в виде линейной комбинации векторов базиса. Действительно, система из (m + 1) вектора $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_m, \bar{a}$ по определению размерности пространства линейно зависима, т.е. найдется ненулевой набор коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ такой, что имеет место равенство

$$\alpha_1\cdot\bar{e}_1 + \alpha_2\cdot\bar{e}_2 + \ldots + \alpha_m\cdot\bar{e}_m + \alpha_{m+1}\cdot\bar{a} = \bar{o}.$$

Коэффициент α_{m+1} отличен от нуля, иначе бы система векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_m$ была линейно зависимой и не являлась бы базисом, поэтому по теореме вектор $\bar{a}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов базиса, т.е.

$$\bar{a} = a_1\cdot\bar{e}_1 + a_2\cdot\bar{e}_2 + \ldots + a_m\cdot\bar{e}_m. \qquad (1.30)$$

Покажем, что представление (1.30) единственно. Если предположить, что есть другое, отличное от полученного, представление

$$\bar{a} = a'_1\cdot\bar{e}_1 + a'_2\cdot\bar{e}_2 + \ldots + a'_m\cdot\bar{e}_m,$$

то, вычтя последнее равенство из равенства (1.30), имеем

$$(a_1 - a'_1)\cdot\bar{e}_1 + (a_2 - a'_2)\cdot\bar{e}_2 + \ldots + (a_m - a'_m)\cdot\bar{e}_m = \bar{o}.$$

Разность в хотя бы одной из скобок полученного равенства отлична от нуля. Это означает, что система векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_m$ линейно зависима, что невозможно. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_m$ в представлении (1.30) называются координатами вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_m$, и в силу единственности этого представления можно отождествить вектор $\bar{a}$ с его координатами, т.е. $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, а операции с векторами можно заменить действиями с их координатами в некотором фиксированном базисе. Очевидно, координаты нулевого вектора в любом базисе равны нулю. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами

$$\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m),\ \bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m),$$

то векторы $\bar{a} + \bar{b}$ и $\alpha\cdot\bar{a}$ имеют соответственно координаты

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \ldots\ ,\ a_m + b_m),$$

$$\alpha\cdot\bar{a} = (\alpha\cdot a_1,\ \alpha\cdot a_2,\ \ldots\ ,\ \alpha\cdot a_m),$$

т.е. при сложении векторов их соответствующие координаты складываются, а при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

Пример 1.17. Найти координаты вектора $3\bar{a} - 2\bar{b}$, если даны координаты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в некотором базисе, т.е.

$$\bar{a} = (-1,\ 2,\ 0,\ -3),\ \bar{b} = (2,\ 4,\ -1,\ -6).$$

По сформулированному выше правилу получим

$$3\bar{a} - 2\bar{b} = (3\cdot(-1)-2\cdot 2,\ 3\cdot 2-2\cdot 4,\ 3\cdot 0-2\cdot(-1),\ 3\cdot(-3)-2\cdot(-6)),$$

т.е. $3\bar{a} - 2\bar{b} = (-7,\ -2,\ 2,\ 3)$.

Важным понятием в линейной алгебре является понятие ранга системы векторов, матрицы, системы линейных уравнений. Рангом системы векторов называется максимальное число линейно независимых векторов системы.

Элементы строк (столбцов) матрицы можно рассматривать как координаты векторов линейного пространства соответствующей размерности и, следовательно, выяснять вопрос о линейной зависимости строк (столбцов) как векторов. Рангом матрицы называется максимальное число линейно независимых ее строк (столбцов). Ранг матрицы A обозначим через $r(A)$.

Можно дать эквивалентное определение ранга матрицы, используя понятие минора. Минором порядка k в матрице A размеров $m\times n$, $k \le m$, $k \le n$ называется определитель, составленный из элементов, стоящих на пересечении некоторых k строк и k столбцов. Ранг матрицы $r(A)$ равен максимальному порядку его миноров, отличных от нуля. Заметим, что ранг системы векторов, заданных своими координатами в некотором базисе, равен рангу матрицы, составленной из координат векторов систем.

Для вычисления ранга матрицы полезно использовать следующее правило: ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях (см. § 1.1). Поэтому для того чтобы вычислить ранг матрицы, нужно привести ее, как и в методе Гаусса, к трапецеидальному виду (1.13). Количество строк в матрице такого вида равно рангу матрицы, что следует из второго определения ранга матрицы. При этом те строки исходной матрицы, которые сохраняются (хотя и преобразованные), образуют одну из возможных максимальных линейно независимых систем

строк матрицы.

Пример 1.18. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Элементарными преобразованиями приведем матрицу A к трапецеидальному виду (1.13)

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & -3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что $r(A) = 2$ и данная матрица такова, что любые ее две строки образуют максимальную линейно независимую систему строк.

Понятие ранга матрицы позволяет дать условие совместности системы линейных уравнений.

Теорема (Кронекера-Капелли). Для того чтобы система (1.1) линейных уравнений с n неизвестными была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг r матрицы системы совпадал с рангом расширенной матрицы системы, при этом если $r = n$, то система имеет единственное решение, если $r < n$, то система имеет бесконечное множество решений.

Рангом совместной системы линейных уравнений называется ранг r матрицы ее коэффициентов. Заметим, что если для систем линейных уравнений по аналогии с системами векторов, строк (столбцов) матрицы ввести понятие линейной зависимости (независимости) уравнений, то ранг совместной системы линейных уравнений можно определить как максимальное число ее линейно независимых уравнений. Система линейных уравнений, ранг которой r меньше числа неизвестных, приводится к виду (1.11) и число ее базисных неизвестных равно r.

Рассмотрим две задачи на линейную зависимость векторов.

Задача 1. Заданы векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ своими координатами в некотором базисе. Выяснить, является ли эта система векторов линейно зависимой? Если это так, то с какими коэффициентами?

Рассмотрим систему векторов

$$\bar{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}),$$
$$\bar{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\bar{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}).$$

Элемент a_{ij} есть i-я координата вектора $\bar{a}_j$. По числу координат m можно сказать, что векторы принадлежат m-мерному линейному пространству. Из определения размерности пространства следует, что при $n > m$ система векторов линейно зависима. Если $n \le m$, то для того чтобы ответить только на первый вопрос задачи, достаточно подсчитать ранг r матрицы из координат векторов (см. пример 1.18). Если окажется, что $r < n$, то система векторов линейно зависима, если $r = n$, то система линейно независима. Для ответа сразу на оба вопроса нужно использовать при любом соотношении между m и n определение линейной зависимости.

Пример 1.19. Заданы векторы своими координатами в некотором базисе

$$\bar{a}_1 = (2,\ 4,\ 3,\ 5,\ 1),$$
$$\bar{a}_2 = (-4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0),$$
$$\bar{a}_3 = (-3,\ 5,\ 1,\ 4,\ 2),$$
$$\bar{a}_4 = (-4,\ 3,\ -8,\ 3,\ 6).$$

Выяснить, является ли эта система векторов линейно зависимой? Если это так, то с какими коэффициентами?

По определению система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ является линейно зависимой, если найдутся числа x_1, x_2, x_3, x_4, из которых хотя бы одно не равно нулю, такие, что имеет место равенство

$$x_1 \cdot \bar{a}_1 + x_2 \cdot \bar{a}_2 + x_3 \bar{a}_3 + x_4 \cdot \bar{a}_4 = \bar{o}.$$

Этому векторному равенству отвечают пять уравнений (по числу координат), которые получаются по правилам действий с координатами векторов, если в векторное уравнение подставить вместо векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ их первые кординаты, затем - вторые и т.д. и, наконец, пятые. В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
2x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 0,\\
4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0,\\
3x_1 + 2x_2 + x_3 - 8x_4 &= 0,\\
5x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0,\\
x_1 \qquad + 2x_3 + 6x_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, условие линейной зависимости векторов равносильно существованию хотя бы одного ненулевого решения соответствующей системы линейных уравнений. Решим полученную систему методом Гаусса в матричной форме. В промежуточных преобразованиях можно опустить столбец свободных членов, состоящий из одних нулей, так как он при элементарных преобразованиях не изменяется.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & -3 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -8 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -8 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & -7 & -16 \\ 0 & \boxed{3} & -3 & -21 \\ 0 & 2 & -5 & -26 \\ 0 & 1 & -6 & -27 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -7 \\ 0 & -4 & -7 & -16 \\ 0 & 2 & -5 & -26 \\ 0 & 1 & -6 & -27 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -11 & -44 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & -5 & -20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right].$$

Последняя матрица соответствует системе

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad - 2x_4 &= 0, \\ x_2 \qquad - 3x_4 &= 0, \\ x_3 + 4x_4 &= 0, \end{aligned}$$

которая эквивалентна исходной и имеет бесконечное множество решений. Чтобы найти ненулевое решение, следует в последней системе придать свободному неизвестному x_4 какое-нибудь ненулевое значение, например $x_4 = 1$. Тогда $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -4$.

Итак, данная система векторов линейно зависима, поскольку нашелся ненулевой набор коэффициентов 2, 3, -4, 1 таких, что

$$2\cdot\bar{a}_1 + 3\cdot\bar{a}_2 - 4\cdot\bar{a}_3 + 1\cdot\bar{a}_4 = \bar{o}.$$

Если бы оказалось, что система линейных уравнений имеет толь-

ко одно, нулевое решение, которое она всегда имеет (поскольку система уравнений однородная), то данная система векторов была бы линейно независимой.

Задача 2. Векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ... , $\bar{a}_n$, $\bar{b}$ заданы своими координатами в некотором базисе. Представить, если это возможно, вектор $\bar{b}$ в виде линейной комбинации остальных векторов.

Представить вектор $\bar{b}$ в виде линейной комбинации векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ... , $\bar{a}_n$ значит найти числа x_1, x_2, ... , x_n, для которых выполняется равенство

$$x_1 \cdot \bar{a}_1 + x_2 \cdot \bar{a}_2 + \ldots + x_n \cdot \bar{a}_n = \bar{b}. \qquad (1.31)$$

Это векторное равенство, как и в примере 1.19, следует выписать для каждой координаты и решить полученную систему линейных уравнений относительно неизвестных x_1, x_2, ... , x_n. Если она имеет решение, то представление (1.31) возможно (быть может, и не единственным способом, когда система уравнений имеет неединственное решение), в противном случае - не возможно.

Пример 1.20. Показать, что векторы

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= (\ 2,\ \ 1,\ \ 5,\ \ 3), \\ \bar{a}_2 &= (-3,\ \ 2,\ \ 1,\ -2), \\ \bar{a}_3 &= (\ 3,\ \ 2,\ -1,\ \ 4), \\ \bar{a}_4 &= (\ 1,\ -2,\ \ 1,\ -2) \end{aligned}$$

образуют базис и найти кординаты вектора $\bar{b} = (4,\ 2,\ -6,\ -6)$ в этом базисе.

Поскольку число векторов системы равно четырем - размерности пространства, то данные векторы образуют базис, если они линейно независимы. Для того чтобы показать линейную независимость векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$, достаточно установить, что равенство

$$x_1 \cdot \bar{a}_1 + x_2 \cdot \bar{a}_2 + x_3 \cdot \bar{a}_3 + x_4 \cdot \bar{a}_4 = \bar{o} \qquad (1.32)$$

возможно только в том случае, когда все коэффициенты x_1, x_2, x_3, x_4 равны нулю, т.е. система однородных линейных уравнений, соответствующих векторному равенству (1.32)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0, \end{aligned} \qquad (1.33)$$

должна иметь только одно, нулевое решение. Для того чтобы указанная система имела единственное решение, необходимо и достаточно,

чтобы определитель системы был отличен от нуля. Поскольку система однородная, то нулевое решение, которое она всегда имеет, и окажется этим единственным решением.

Таким образом, система векторов, число которых совпадает с числом их координат, только тогда образуют базис, когда определитель, составленный из координат векторов системы, не равен нулю.

Вычислим определитель системы (1.33). Он равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 144.$$

Поскольку $\Delta = 144 \neq 0$, то система векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$ образует базис. Теперь найдем координаты вектора $\bar{b}$ в этом базисе. Для этого требуется найти числа x_1, x_2, x_3, x_4, удовлетворяющие равенству

$$x_1 \cdot \bar{a}_1 + x_2 \cdot \bar{a}_2 + x_3 \bar{a}_3 + x_4 \cdot \bar{a}_4 = \bar{b}.$$

Этому векторному равенству соответствует система уравнений

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 4, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -6, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= -6. \end{aligned} \qquad (1.34)$$

Решим ее по формулам Крамера (1.19). Определитель системы $\Delta = 144$ вычислен ранее. Вычислим вспомогательные определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ -6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -288, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 5 & -6 & -1 & 1 \\ 3 & -6 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 432,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -6 & 1 \\ 3 & -2 & -6 & -2 \end{vmatrix} = 576, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & -6 \\ 3 & -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 720.$$

По формулам (1.19) получим $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$. Таким образом, имеем равенство

$$\bar{b} = -2 \cdot \bar{a}_1 + 3 \cdot \bar{a}_2 + 4 \cdot \bar{a}_3 + 5 \cdot \bar{a}_4,$$

т.е. вектор $\bar{b}$ в базисе $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$ имеет координаты -2, 3, 4, 5.

Приведем также решение системы (1.34) методом Гаусса в матричной форме, где расширенная матрица подвергается следующим эле-

ментарным преобразованиям:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 3 & 1 & 4 \\ \boxed{1} & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & 4 & -2 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & -11 & 11 & -16 \\ 0 & \boxed{-8} & -2 & 4 & -12 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -1 & -9 & 7 & -4 \\ 0 & -4 & -1 & 2 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -8 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 42 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 14 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 15 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right].$$

Из последней матрицы получим $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$.

Можно несколько уменьшить число эквивалентных матриц в этой цепочке, действуя по методу Жордана-Гаусса, когда нули получают не только ниже, но одновременно и выше диагонали. При таких преобразованиях отличия от приведенной цепочки возникнут, начиная с четвертой матрицы. Приведем этот вариант преобразований.

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & -22 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -8 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 42 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & -22 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 14 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & -22 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 15 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right].$$

Глава 2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 2.1. Постановка задач линейного программирования

[1, 68-72; 2, 81-90; 3, 126-151; 4, 153-160]

Многие задачи линейного программирования (ЛП) являются математическими моделями разнообразных реальных процессов, наблюдаемых в экономике. Эти модели учитывают только относительно простые, линейные связи между объектами исследования. Среди многочисленных задач ЛП можно назвать задачи об использовании сырья, о составлении рациона, транспортную задачу и другие. Рассмотрим для начала задачу об использовании сырья и задачу о составлении рациона.

Задача об использовании сырья

Предприятие выпускает продукцию n видов $P_1, P_2, \ldots, P_n$, используя сырье m видов $S_1, S_2, \ldots, S_m$, запасы которого равны соответственно $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Известно, что расход i-го вида сырья S_i для производства единицы j-го вида продукции P_j равен a_{ij}. От реализации единицы j-го вида продукции P_j предприятие получает доход, равный c_j. Требуется составить такой план производства, чтобы при имеющихся запасах сырья обеспечить предприятию максимальный доход.

Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ планируемые объемы производства продукции соответственно вида $P_1, P_2, \ldots, P_n$, короче – план производства. Естественно, эти величины должны быть неотрицательны, т.е. $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Для выполнения такого плана потребуется сырья вида S_i в количестве

$$a_{i1}\cdot x_1 + a_{i2}\cdot x_2 + \ldots + a_{in}\cdot x_n,$$

но его расход ограничен запасом b_i. Таким образом, возникает ограничение

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i.$$

Аналогичные ограничения накладывают и запасы других видов сырья. В результате приходим к системе линейных неравенств

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1,\\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Суммарный доход предприятия от реализации продукции равен

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

Таким образом, приходим к математической формулировке задачи: среди неотрицательных решений системы линейных неравенств (2.1) найти решение, дающее максимум линейной форме (функции) z.

В задаче, заметим, неявно предполагается, что расход сырья пропорционален объему производимой продукции, что предопределяет линейность в системе ограничений.

Задача о составлении рациона

Имеется n видов продуктов $F_1, F_2, \ldots, F_n$ по цене за единицу веса (например, кг) соответственно $c_1, c_2, \ldots, c_n$. В продуктах содержатся питательные вещества $P_1, P_2, \ldots, P_m$. Количество питательного вещества P_i, содержащегося в единице продукта F_j, равно a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Известна минимальная суточная потребность организма в питательном веществе P_i, равная b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Требуется составить суточный рацион, который имеет минимальную стоимость и обеспечивает минимальную потребность организма во всех питательных веществах. Обозначим $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно количество продуктов $F_1, F_2, \ldots, F_n$, входящее в рацион. Тогда, предполагая, что количество питательного вещества P_i, содержащееся в x_j кг продукта F_j, пропорционально весу F_j в рационе, т.е. равно $a_{ij} \cdot x_j$, получим ограничение для i-го вида питательных веществ в форме неравенства

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij} \cdot x_j + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i.$$

Таким образом, неотрицательные неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ должны удовлетворять системе неравенств

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\geq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\geq b_m. \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Общая стоимость продуктов, входящих в рацион, равна

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

Итак, задача свелась к тому, чтобы среди неотрицательных решений системы линейных неравенств (2.2) найти решение, дающее минимум форме z.

Для рассмотренных и других задач, решаемых методами ЛП, характерны следующие признаки, совокупность которых составляет формулировку **общей задачи ЛП:**

1) требуется найти максимум или минимум линейной формы (так

принято называть в ЛП линейную функцию);

2) на неизвестные накладываются ограничения в виде линейных неравенств или уравнений;

3) ряд неизвестных (в экономических задачах весь) должен быть неотрицателен.

Для дальнейшего рассмотрения следует сделать важные замечания по всем трем признакам.

Замечание 1. Любая задача на максимум формы

$$z = c_o + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

сводится к задаче на отыскание минимума противоположной формы

$$(-z) = -c_o - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n,$$

учитывая связь $\max z = -(\min(-z))$. Будем для единообразия всегда сводить задачи на максимум к задачам на минимум, как это делается, например в пособиях [2; 3]. В других пособиях [1; 4], наоборот, задачи на минимум сводят к задачам на максимум.

Замечание 2. Любое ограничение в форме линейного неравенства может быть сведено к ограничению в форме линейного уравнения путем введения дополнительного неотрицательного неизвестного. Действительно, пусть система ограничений содержит неравенство. Его всегда можно записать в виде

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - b_i \geq 0.$$

Обозначим левую часть этого неравенства через x_{n+1}, т.е.

$$x_{n+1} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - b_i,$$

тогда рассматриваемое неравенство будет эквивалентно паре ограничений

$$x_{n+1} \geq 0,$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i,$$

одно из которых есть линейное уравнение, а другое - требование неотрицательности неизвестного x_{n+1}.

В общем случае система ограничений может содержать как линейные уравнения, так и линейные неравенства. Для того чтобы ограничения в форме неравенств свести к ограничениям в форме уравнений, следует для каждого неравенства ввести свое дополнительное неотрицательное неизвестное.

Замечание 3. Естественное требование неотрицательности неизвестных в задачах экономического происхождения есть, по существу, линейное неравенство, т.е. $x_j \geq 0$, но в силу простоты его вы-

деляют особо. Если в общей задаче ЛП какое-нибудь неизвестное x_k произвольно, т.е. не является неотрицательным, то его всегда можно заменить разностью двух неотрицательных неизвестных x'_k и x''_k, т.е. $x_k = x'_k - x''_k$, увеличив тем самым число уравнений и неизвестных.

Учитывая сделанные замечания, можно утверждать, что любая задача ЛП по форме может быть сведена к канонической.

Каноническая задача ЛП. Среди неотрицательных решений системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (2.3)$$

найти решение, дающее минимум форме

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_o. \qquad (2.4)$$

Неотрицательные решения системы (2.3) называются допустимыми решениями.

§ 2.2. Геометрический способ решения задач ЛП

[1, 57-63, 72-74; 2, 133-138; 3, 151-163; 4, 160-168]

В случае, когда число переменных равно двум, задачи ЛП имеют наглядную геометрическую интерпретацию, что позволяет решать их геометрическим способом. Пусть ограничения имеют форму неравенств вида

$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1 \le 0 \text{ (или } \ge 0). \qquad (2.5)$$

Напомним, что множество точек плоскости x_1Ox_2, координаты которых удовлетворяют неравенству вида (2.5), представляет собой полуплоскость. Граница этой полуплоскости - прямая, уравнение которой есть

$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1 = 0. \qquad (2.6)$$

Для того чтобы узнать, какая из двух полуплоскостей, общей границей которых является прямая (2.6), соответствует неравенству (2.5), нужно координаты произвольной точки, принадлежащей одной из плоскостей и не лежащей на прямой (2.6), подставить в неравенство (2.5). Если координаты этой точки удовлетворяют неравенству (2.5), то полуплоскость, которой принадлежит взятая точка, соответствует неравенству (2.5). Если же координаты точки не удовлетворяют неравенству (2.5), то неравенству (2.5) соответствует другая полуплоскость - та, которой не принадлежит пробная точка.

Пример 2.1. Неравенству $x_1 - 2x_2 - 2 \le 0$ соответствует полуплоскость, лежащая выше прямой $x_1 - 2x_2 - 2 = 0$ (см. рис. 2.1), так как координаты точки M(0; 2), взятой в этой полуплоскости, удовлетворяют данному неравенству, т.е. $1\cdot 0 - 2\cdot 2 - 2 = -6 < 0$.

Пример 2.2. Неравенству $3x_1 + 5x_2 \le 0$ соответствует полуплоскость, расположенная ниже прямой $3x_1 + 5x_2 = 0$ (см. рис. 2.1), так как координаты точки M(-2; -1), взятой в этой полуплоскости, удовлетворяют данному неравенству, т.е. $3\cdot(-2) + 5\cdot(-1) = -11 < 0$.

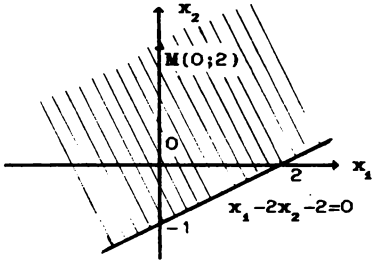

Рис. 2.1

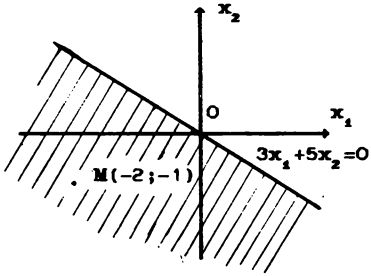

Рис. 2.2

Пример 2.3. Неравенству $3x_1 + 4x_2 - 12 \ge 0$ соответствует полуплоскость, лежащая выше прямой $3x_1 + 4x_2 - 12 = 0$ (см. рис. 2.3), так как координаты точки O(0; 0), не принадлежащей указанной полуплоскости, не удовлетворяют данному неравенству, т.е. $3\cdot 0 - 4\cdot 0 - 12 = -12 < 0$.

Очевидно, простейшему неравенству $x_1 \ge 0$ соответствует полуплоскость, лежащая правее оси Ox_2, а неравенству $x_2 \ge 0$ соответствует полуплоскость, лежащая выше оси Ox_1. Системе этих неравенств соответствует пересечение указанных полуплоскостей, т.е. множество точек первого квадранта (см. рис. 2.4).

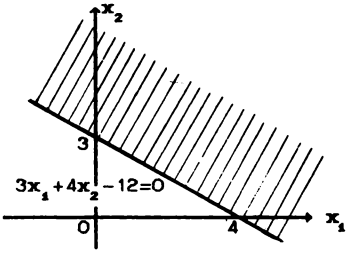

Рис. 2.3

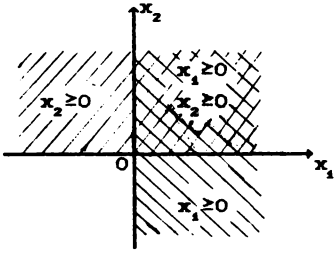

Рис. 2.4

Следует заметить, что во всех случаях, когда граничная прямая полуплоскости не проходит через начало координат O(0; 0), удобно в качестве пробной точки брать начало координат.

В процессе решения задач ЛП геометрическим способом требуется найти множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств вида (2.5). Каждому из таких неравенств соответствует полуплоскость, а системе неравенств - пересечение полуплоскостей. Полуплоскость, как известно, является выпуклым множеством. Множество называется выпуклым, если вместе с двумя своими произвольными точками содержит и отрезок, соединяющий эти точки. Выпуклые множества обладают таким свойством, что их пересечение (если оно не пусто) также является выпуклым множеством, поэтому системе линейных неравенств вида (2.5) соответствует некоторое выпуклое множество на плоскости. Рассмотрим геометрический способ решения задач ЛП на примерах.

Пример 2.4. Данные в задаче об использовании сырья с тремя видами сырья и двумя видами продукции представлены в табл. 2.1. Требуется найти план производства, обеспечивающий максимальный доход при заданных удельных расходах сырья и их запасах.

Таблица 2.1

b_i	P_1	P_2
68	3	5
66	1	6
105	7	4
c_j	5	6

Обозначим x_1, x_2 - план производства, т.е. предполагается, что продукции 1-го и 2-го вида будет произведено соответственно x_1 и x_2. Расход сырья, например, 3-го вида, запасы которого составляют 105 единиц, при таком плане равен $7x_1 + 4x_2$, поскольку на единицу продукции 1-го вида идет 7 единиц сырья этого вида, а на единицу продукции 2-го вида - 4 единицы. Поскольку расход не может превышать 105, то для сырья 3-го вида получаем ограничение $7x_1 + 4x_2 \le 105$. Аналогичные рассуждения приводят к ограничениям и по другим видам сырья. В результате приходим к системе неравенств, которым должны удовлетворять неизвестные x_1, x_2, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$,

$$3x_1 + 5x_2 \le 68, \quad (\alpha)$$
$$x_1 + 6x_2 \le 66, \quad (\beta)$$
$$7x_1 + 4x_2 \le 105. \quad (\gamma)$$

Доход от реализации продукции выразится формой

$$z = 5x_1 + 6x_2.$$

Итак, требуется среди неотрицательных решений системы неравенств (α), (β), (γ) найти решение, при котором форма z принимает максимальное значение. Построим прямые, соответствующие этим неравенствам (см. рис. 2.5). Напомним, что для построения прямой достаточно двух точек, принадлежащих этой прямой. Поскольку при геометрических построениях точность играет не последнюю роль, нужно брать эти две точки не слишком близкими друг к другу. Далее, для каждого неравенства определяем, какая полуплоскость ему соответствует. В рассматриваемом примере все три полуплоскости, соответствующие неравенствам (α), (β), (γ), содержат начало координат. Следуя такому заключению, каждую полуплоскость указываем двумя стрелками, начинающимися на граничной прямой. На рис. 2.5 общая часть всех полуплоскостей, отвечающих неравенствам (α), (β), (γ) и неравенствам $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, обведена жирной чертой.

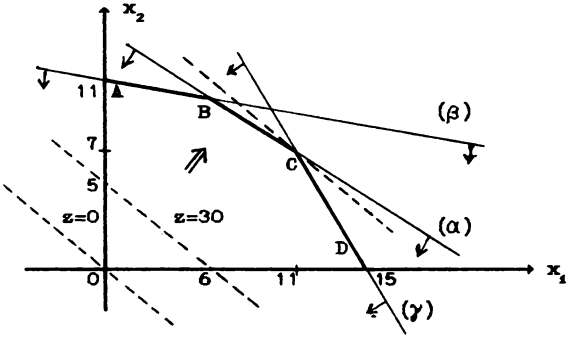

Рис. 2.5

Таким образом, множество решений данной системы неравенств совпадает с множеством точек выпуклого многоугольника OABCD, включая его границу. Для сравнения значений формы $z = 5x_1 + 6x_2$ в различных точках многоугольника OABCD проведем линии уровня. Линия уровня s – это множество точек плоскости, в которых форма z принимает одно и то же ее значение s. Уравнение линии уровня s получается, если форму z приравнять к s, т.е.

$$5x_1 + 6x_2 = s. \qquad (2.7)$$

Параметрическое семейство уравнений (2.7) дает семейство параллельных прямых. Построим две прямые (см. рис. 2.5) из этого семейства. Уровню s = 30 соответствует прямая $5x_1 + 6x_2 = 30$, во всех ее точках форма принимает значение 30. Уровню s = 0 соответствует

прямая $5x_1 + 6x_2 = 0$, во всех ее точках форма принимает значение 0. Линии уровня проведены на рис. 2.5 пунктиром. Если линию уровня передвигать параллельно самой себе в направлении стрелки → , то сравнение ее двух положений при $z = 0$ и $z = 30$ приводит к заключению: форма z при таком перемещении линии уровня возрастает. Поскольку требуется найти максимальное значение формы z, то линию уровня следует перемещать параллельно самой себе в направлении стрелки до тех пор, пока она имеет общие точки с множеством допустимых решений. В крайнем положении линия уровня проходит через точку C, которая лежит на пересечении прямых (α), (γ), и, чтобы найти ее координаты, нужно решить совместно уравнения этих прямых, т.е. систему уравнений

$$3x_1 + 5x_2 = 68,$$
$$7x_1 + 4x_2 = 105.$$

Решение системы есть $x_1 = 11$, $x_2 = 7$, т.е. максимум формы z достигается в точке C(11; 7) и он равен $\max z = 5\cdot 11 + 6\cdot 7 = 97$.

Для более точного построения многоугольника OABCD полезно найти координаты его остальных вершин A(0; 11), B(6; 10), D(15; 0), аналитически, решив соответствующие системы линейных уравнений.

Возвращаясь к исходной задаче об использовании сырья, можно в итоге сказать, что максимальный доход, равный 97, будет получен, если выпустить 11 единиц 1-го вида продукции и 7 - 2-го. При этом сырье 1-го и 3-го видов будет использовано полностью, так как неравенства (α) и (γ) обращаются в равенства при подстановке оптимальных значений $x_1 = 11$, $x_2 = 7$, а расход сырья 2-го вида составит $11 + 6\cdot 7 = 53$, т.е. его останется 13 единиц.

Пример 2.5. Данные в задаче о рационе с двумя продуктами и четырьмя видами питательных веществ представлены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

b_i	F_1	F_2
17	3	1
47	5	3
13	1	1
100	5	12
c_j	7	6

В строках табл. 2.2 (кроме последней) указан необходимый минимум соответствующего вида питательных веществ в рационе и содержание питательного вещества в единице 1-го и 2-го продукта. В последней строке указаны стоимости продуктов за единицу: 7 - для 1-го, 6 - для 2-го. Если обозначить x_1, x_2 количество 1-го и 2-го продукта в рационе, то общее содержание питательного вещества, например 2-го вида, в рационе

равно $5x_1 + 3x_2$. Оно должно быть не менее 47, т.е. неизвестные x_1, x_2 должны удовлетворять неравенству $5x_1 + 3x_2 \geq 47$. Выписав аналогичные ограничения для остальных питательных веществ, получим систему неравенств

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\geq 17, & (\alpha) \\ 5x_1 + 3x_2 &\geq 47, & (\beta) \\ x_1 + x_2 &\geq 13, & (\gamma) \\ 5x_1 + 12x_2 &\geq 100. & (\delta) \end{aligned} \qquad (2.8)$$

Стоимость составленного рациона равна $z = 7x_1 + 6x_2$, где $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Итак, нужно найти неотрицательное решение системы неравенств (2.8), для которого форма z принимает минимальное значение.

Множество допустимых решений системы (2.8) изображено на рис. 2.6. Оно занимает часть первого квадранта, расположенную выше и правее ломаной ABCDE с вершинами A(0; 17), B(1; 14), C(4; 9), D(8; 5), E(20; 0). Построив две линии уровня при z = 42 и z = 126, выясняем направление движения линии уровня (оно указано стрелкой ←), по которому происходит уменьшение формы z. В крайнем положении линия уровня касается множества допустимых решений в точке C. Итак, оптимальный рацион составляют 4 единицы 1-го продукта и 9 – 2-го. Стоимость его равна min z = 82. При таком рационе питательные вещества 2-го и 3-го вида обеспечиваются по минимуму, так как оптимальная точка C(4; 9) находится на пересечении прямых (β) и (γ), а остальные – с превышением, 1-е на 4 единицы, 2-е – на 28.

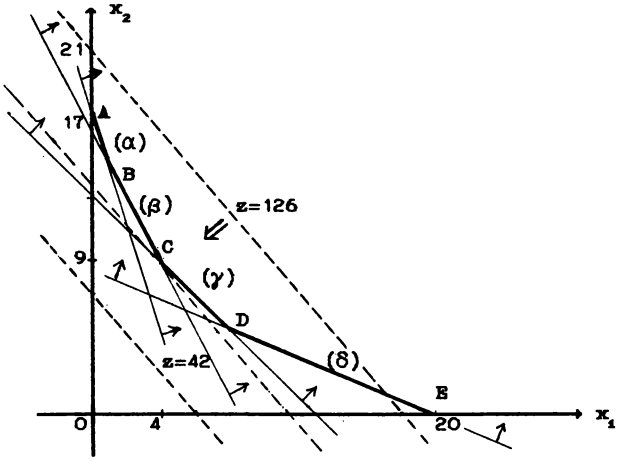

Рис. 2.6

На основании рассмотренных примеров можно указать последовательность действий при решении задач ЛП геометрическим способом:

1) находят множество допустимых решений системы неравенств;

2) если оно не пусто, то построив две линии уровня, определяют направление возрастания (убывания) формы;

3) передвигая линию уровня параллельно самой себе в направлении возрастания (убывания) формы, находят крайнее положение (если оно существует), в котором линия уровня коснется множества допустимых решений.

Кроме рассмотренных в примерах 2.4, 2.5 случаев могут представиться и другие. Во-первых, когда множество допустимых решений не ограничено, экстремум может оказаться бесконечным, так в условиях примера 2.5 $\max z = +\infty$. Во-вторых, линия уровня может оказаться параллельной одному из отрезков границы множества допустимых решений, см. рис. 2.7, где минимум z достигается в каждой из точек отрезка AB, а максимум достигается в единственной точке C.

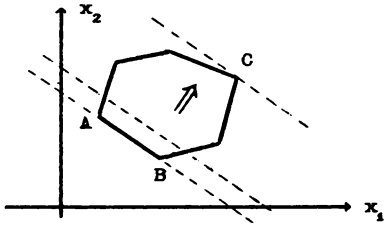

Рис. 2.7

§ 2.3. Симплекс-метод решения задач ЛП

[1, 80-90; 2, 91-105; 3, 164-190; 4, 197-213]

Для того чтобы задачу ЛП решить симплекс-методом, необходимо систему ограничений и линейную форму представить в виде

$$\begin{aligned}
x_1 \quad\quad\quad\quad &+ a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\
x_2 \quad\quad\quad\quad &+ a_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_i \quad\quad &+ a_{i,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_r &+ a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rj}x_j + \ldots + a_{rn}x_n = b_r,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$z + c_{r+1}x_{r+1} + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n = c_o, \tag{2.10}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0,\ b_1, b_2, \ldots, b_r \ge 0.$$

Этот вид характеризуется следующими важными особенностями.

1. Ограничения (2.9) имеют только форму уравнений, в уравнениях выделены базисные неизвестные. В системе (2.9) для простоты записи базисными взяты первые r неизвестных. Заметим, что $r < n$, так как при $r = n$ система (2.9) имеет единственное решение и в этом случае вопрос о выборе оптимального решения отпадает. Очевидно, коэффициенты при базисных неизвестных в системе (2.9) образуют единичную матрицу, а в общем случае - матрицу, получающуюся из единичной матрицы перестановкой строк и столбцов. У остальных коэффициентов системы (2.9) первый индекс означает номер базисного неизвестного, а второй - номер свободного неизвестного.

2. Линейная форма z, которую требуется минимизировать, должна быть выражена только через свободные неизвестные и вместе с ними записана в левой части уравнения (2.10).

3. Все неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ должны быть неотрицательны.

4. Все свободные члены $b_1, b_2, \ldots, b_r$ должны быть неотрицательны.

Вопрос о возможности и способе приведения системы ограничений и формы в задаче ЛП к виду (2.9), (2.10) будет обсужден позже. Пока только отметим, что условие $b_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$ может быть обеспечено только в том случае, когда система ограничений в задаче ЛП имеет хотя бы одно неотрицательное решение.

Базисным неизвестным $x_1, x_2, \ldots, x_r$ системы (2.9) соответствует неотрицательное базисное решение (иначе его еще называют опорным планом):

$$(b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}, \underset{\text{i-е место}}{b_i}, b_{i+1}, \ldots, b_r, 0, \ldots, \underset{\text{j-е место}}{0}, \ldots, 0). \quad (2.11)$$

Решение (2.11) получается из системы (2.9), если в ней свободные неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ приравнять к нулю. При этом форма примет значение c_o.

Симплекс-метод состоит в переходе от одного базисного решения системы уравнений (2.9) к другому базисному решению, такому, что значение формы z при этом уменьшается (не увеличивается). При этом существенно используется условие неотрицательности неизвестных.

Рассмотрим коэффициенты при свободных неизвестных в уравнении (2.10). Можно выделить следующие случаи.

Случай 1. Среди коэффициентов $c_{r+1}, \ldots, c_j, \ldots, c_n$ не

найдется положительного. Тогда при изменении тех свободных неизвестных в уравнении (2.10), коэффициенты при которых равны нулю, форма z не меняет своего значения. При уменьшении любого неизвестного, например x_j, коэффициент при котором отрицателен ($c_j < 0$), форма z уменьшается. Но наименьшее значение, какое может принять свободное неизвестное, - это нуль. Следовательно, в рассматриваемом случае базисное решение (2.11), отвечающее базису (x_1, ... , x_r), и есть оптимальное. Оно может быть неединственным, если в уравнении (2.10) есть равные нулю коэффициенты.

Случай 2. Среди коэффициентов c_{r+1}, ... , c_j, ... , c_n найдется хотя бы один положительный, например $c_j > 0$. Положим в уравнениях (2.9), (2.10) все свободные неизвестные, кроме x_j, равными нулю, тогда система (2.9) и уравнение (2.10) примут вид

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 - a_{1j}x_j, \\ x_2 &= b_2 - a_{2j}x_j, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_i &= b_i - a_{ij}x_j, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_r &= b_r - a_{rj}x_j, \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$z = c_o - c_jx_j. \tag{2.13}$$

Так как $c_j > 0$, то при увеличении неизвестного x_j форма z, связанная с x_j уравнением (2.13), уменьшается, но возможность роста x_j определяется системой (2.12) и зависит от знаков коэффициентов a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{ij}, ... , a_{rj}. Предположим, что среди коэффициентов не найдется положительного, тогда неизвестное, например x_i, либо не изменяется (если $a_{ij} = 0$), либо растет (если $a_{ij} < 0$) с ростом x_j, оставаясь положительным. Таким образом, система (2.12) не дает ограничения для роста неизвестного x_j и, следовательно, $\min z = -\infty$.

Случай 3. Предположим, наконец, что среди коэффициентов a_{1j}, a_{2j}, ... , a_{ij}, ... , a_{rj} найдутся положительные, тогда требование неотрицательности неизвестных приводит к неравенствам вида

$$b_k - a_{kj}x_j \geq 0, \text{ где } a_{kj} > 0,$$

полученным из системы (2.12). Это означает, что неизвестное x_j должно удовлетворять системе неравенств вида $x_j \leq b_k/a_{kj}$ для тех индексов k, у которых $a_{kj} > 0$. Итак, максимальное значение, которое может принять неизвестное x_j, равно минимальному из отношений

$$b_k/a_{kj}, \text{ где } a_{kj} > 0.$$

Допустим, что оно достигается при $k = i$, т.е.

$$\frac{b_i}{a_{ij}} = \min_k \left\{ \frac{b_k}{a_{kj}} \right\}, \text{ где } a_{kj} > 0. \qquad (2.14)$$

Элемент a_{ij} называется разрешающим (ведущим). Положим $x_j = b_i/a_{ij}$, тогда из системы (2.12) с учетом того, что остальные свободные неизвестные были приравнены к нулю, определятся значения базисных неизвестных x_1, x_2, ... , x_r, причем $x_i = 0$. В результате получим новое неотрицательное (в силу условия (2.14)) базисное решение

$$(b'_1, b'_2, \ldots, b'_{i-1}, \underset{\text{i-е место}}{\underset{\uparrow}{0}}, b'_{i+1}, \ldots, b'_r, 0, \ldots, \underset{\text{j-е место}}{\underset{\uparrow}{\frac{b_i}{a_{ij}}}}, \ldots, 0), \qquad (2.15)$$

которому соответствует значение формы z: $z = c_0 - b_i \cdot c_{ij}/a_{ij} = c'_0$, причем $c'_0 < c_0$, если $b_i > 0$, и $c'_0 = c_0$, если $b_i = 0$. Действительно, решение (2.15) является базисным. Сравнивая решения (2.11) и (2.15) и учитывая, что в базисном решении свободным неизвестным соответствуют нули, можно придти к заключению, что, если базисное неизвестное x_i в старом базисе

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, \boxed{x_i}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

перевести в разряд свободных, заменив его свободным неизвестным x_j, то новому базису

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, \boxed{x_j}, x_{i+1}, \ldots, x_n) -$$

соответствует базисное решение (2.15). Переход от старого базиса к новому осуществляется по схеме метода Гаусса, при этом форма также подвергается преобразованиям. Разделим i-е уравнение системы (2.9) на a_{ij} и затем, умножив его последовательно на числа a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{rj}, c_j, вычтем соответственно из 1-, 2-, ..., r-го уравнений системы (2.9) и уравнения (2.10). В результате получим систему

$$\begin{array}{l} x_1 + a'_{1i}x_i + a'_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + 0 \cdot x_j + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ x_2 + a'_{2i}x_i + a'_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + 0 \cdot x_j + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{ji}x_i + a'_{j,r+1}x_{r+1} + \ldots + 1 \cdot x_j + \ldots + a'_{jn}x_n = b'_j, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{ri}x_i + x_r + a'_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + 0 \cdot x_j + \ldots + a'_{rn}x_n = b'_r, \end{array} \qquad (2.16)$$

$$z + c'_i x_i + c'_{r+1}x_{r+1} + \ldots + 0 \cdot x_j + \ldots + c'_n x_n = c'_0, \quad (2.17)$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0, \; b'_1, b'_2, \ldots, b'_r \geq 0.$$

Теперь следует рассмотреть коэффициенты формы (2.17) и повторить исследования, проведенные выше. Можно показать, что через конечное число шагов последует вывод: либо $\min z = -\infty$, либо $\min z$ конечен, и последнее базисное решение будет оптимальным.

Решение задачи ЛП симплекс-методом удобно оформлять с помощью таблиц. Они называются симплекс-таблицами. Практически это та же матричная форма записи системы уравнений и линейной формы, что и в методе Гаусса. Системе уравнений (2.9), (2.10) соответствует табл. 2.3, а системе (2.16), (2.17) - табл. 2.4. Таблицы подобного вида полностью отражают системы (2.9), (2.10) и (2.16), (2.17). Ими удобно пользоваться на первых шагах изучения симплекс-метода. При достаточно прочных навыках в решении задач ЛП симплекс-методом можно использовать более компактные таблицы (см. [3, 182]).

Алгоритм симплекс-метода

1. Система уравнений и форма приводятся к виду (2.9), (2.10).

2. Составляется табл. 2.3.

3. Просматриваются элементы последней строки табл. 2.3 (элемент c_o в рассмотрение не принимается). Если среди них нет положительных, то базисное решение, соответствующее табл. 2.3, является оптимальным и $\min z = c_o$. В базисном решении свободные неизвестные равны нулю, а базисные принимают значения свободных членов.

4. Если в последней строке найдется хотя бы один положительный элемент, например $c_j > 0$, то, отметив j-й столбец стрелкой ↓ в верхней части табл. 2.3, переходят к пункту 5.

5. Просматривают элементы выделенного столбца над элементом c_j. Если среди них нет положительных, то $\min z = -\infty$.

6. Если найдется хотя бы один положительный элемент, то для положительных элементов отмеченного столбца вычисляют отношения b_k/a_{kj} ($a_{kj} > 0$ (!)) и заносят в последний столбец табл. 2.3.

7. Выбирают наименьшее из этих отношений. Пусть оно достигается при $k = i$. Отмечают i-ю строку стрелкой → в левой части табл. 2.3. Объявляют элемент a_{ij}, стоящий на пересечении выделенных строки и столбца, разрешающим (ведущим). Он обведен рамкой в табл. 2.3.

8. Составляют табл. 2.4. В базис (см. 1-й столбец табл. 2.4) на место базисного неизвестного x_i ставят свободное неизвестное x_j. Делят элементы отмеченной строки табл. 2.3 на разрешающий элемент a_{ij} и вносят полученные элементы в ту же строку табл. 2.4. Умножая

Таблица 2.3

Базис	Своб. члены	x_1	...	x_i	...	x_r	x_{r+1}	...	$\downarrow x_j$	...	x_n	b_k/a_{kj}
x_1	b_1	1	...	0	...	0	$a_{1,r+1}$	...	a_{1j}	...	a_{1n}	
x_2	b_2	0	...	0	...	0	$a_{2,r+1}$	...	a_{2j}	...	a_{2n}	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
$\rightarrow x_i$	b_i	0	...	1	...	0	$a_{i,r+1}$	...	$\boxed{a_{ij}}$	...	a_{in}	b_i/a_{ij}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
x_r	b_r	0	...	0	...	1	$a_{r,r+1}$	...	a_{rj}	...	a_{rn}	
z	c_o	0	...	0	...	0	c_{r+1}	...	c_j	...	c_n	

Таблица 2.4

Базис	Своб. члены	x_1	...	x_i	...	x_r	x_{r+1}	...	x_j	...	x_n	b_k/a_{kj}
x_1	b'_1	1	...	a'_{1i}	...	0	$a'_{1,r+1}$	...	0	...	a'_{1n}	
x_2	b'_2	0	...	a'_{2i}	...	0	$a'_{2,r+1}$	...	0	...	a'_{2n}	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
x_j	b_i/a_{ij}	0	...	a'_{ji}	...	0	$a'_{j,r+1}$	...	1	...	a'_{jn}	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
x_r	b'_r	0	...	a'_{ri}	...	1	$a'_{r,r+1}$	...	0	...	a'_{rn}	
z	c'_o	0	...	c'_i	...	0	c'_{r+1}	...	0	...	c'_n	

отмеченную строку табл. 2.3 на соответствующие числа, прибавляют ее к остальным строкам табл. 2.3 (см. метод Гаусса) с тем, чтобы получить выше и ниже разрешающего элемента a_{ij} нули. Все вновь вычисленные элементы строк заносят в табл. 2.4.

9. С табл. 2.4 обращаются к пункту 3.

Пример 2.6. Решим симплекс-методом задачу об использовании сырья, рассмотренную в примере 2.4, которая записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\le 68, \\ x_1 + 6x_2 &\le 66, \\ 7x_1 + 4x_2 &\le 105, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0, \\ z = 5x_1 + 6x_2 &\ (\max). \end{aligned}$$

Прежде чем приступить к решению этой задачи общего вида симплекс-методом, необходимо сначала привести ее к каноническому виду (см. замечания на с. 43), а затем к виду (2.9), (2.10). Для этого перепишем неравенства в виде

$$\begin{aligned} -3x_1 - 5x_2 + 68 &\ge 0, \\ -x_1 - 6x_2 + 66 &\ge 0, \\ -7x_1 - 4x_2 + 105 &\ge 0 \end{aligned}$$

и левые части полученных неравенств обозначим соответственно через x_3, x_4, x_5. Тогда система ограничений примет форму уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 68, \\ x_1 + 6x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 66, \\ 7x_1 + 4x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 105. \end{aligned} \tag{2.18}$$

где $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$, $x_5 \ge 0$.

Задачу об отыскании максимума формы z сведем к задаче об отыскании минимума противоположной формы $(-z) = -5x_1 - 6x_2$, записав это уравнение в соответствии с требованиями симплекс-метода в виде

$$(-z) + 5x_1 + 6x_2 = 0\ (\min). \tag{2.19}$$

Оказалось, что задача приобрела необходимый для симплекс-метода вид. Действительно, система уравнений (2.18), (2.19) по форме полностью совпадает с системой (2.9), (2.10), причем в правых частях уравнений (2.18) свободные члены положительны. Неизвестные x_3, x_4, x_5 в системе (2.18) являются базисными, а неизвестные x_1, x_2 – свободными. Заметим, что не любая общая задача после приведения ее к канонической форме приобретает вид (2.9), (2.10). О том, как

в общем случае привести задачу ЛП к виду, удовлетворяющему требованиям симплекс-метода, см. § 2.4.

Составим табл. 2.5 из коэффициентов системы уравнений (2.18), (2.19) по образцу табл. 2.3.

Таблица 2.5

Базис	Своб. члены	$\downarrow x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	b_k/a_{kj}
x_3	68	3	5	1	0	0	$22^2/_3$
x_4	66	1	6	0	1	0	66
$\rightarrow x_5$	105	$\boxed{7}$	4	0	0	1	15
(-z)	0	5	6	0	0	0	

Первый шаг. В соответствии с алгоритмом симплекс-метода просматриваем элементы последней строки табл. 2.5. Среди них есть положительные, например элемент $c_1 = 5$, стоящий в столбце неизвестного x_1. Отмечаем этот столбец стрелкой $\downarrow$ вверху табл. 2.5. Просматриваем элементы отмеченного столбца, стоящие над элементом $c_1 = 5$. Для положительных элементов отмеченного столбца вычисляем отношения b_k/a_{k1}, т.е. 68:3, 66:1, 105:7 и заносим в соответствующие строки последнего столбца. Наименьшее из вычисленных отношений равно 15. Отмечаем строку, где стоит наименьшее значение, стрелкой $\rightarrow$ в левой части табл. 2.5. Эта строка соответствует базисному неизвестному x_5. На пересечении строки и столбца, отмеченных стрелками, находим разрешающий элемент $a_{51} = 7$ (он обведен рамкой) и приступаем к составлению табл. 2.6. Для этого базисное неизвестное x_5 заменяем неизвестным x_1 и новый базис заносим в 1-й столбец табл. 2.6. Все элементы отмеченной строки, где стоит элемент $a_{51} = 7$, делим на этот элемент и заносим в ту же строку табл. 2.6. В табл. 2.5 умножаем отмеченную строку последовательно на -3/7, -1/7, -5/7 и прибавляем соответственно к 1-й, 2-й и последней строке. Результаты преобразований заносим в табл. 2.6. Первый шаг алгоритма закончен.

Второй шаг. Просматриваем элементы последней строки табл. 2.6. Среди них есть положительный $c_2 = 22/7$. Отмечаем столбец, где стоит этот элемент стрелкой $\downarrow$ вверху табл. 2.6. Просматриваем элементы отмеченного столбца. Для положительных элементов вычисляем отношения b_k/a_{k2}, т.е. 23:(23/7), 51:(38/7), 15:(4/7) и заносим в

последний столбец табл. 2.6. Наименьшее из этих отношений равно 7. Отмечаем строку, где стоит наименьшее значение, стрелкой → в левой части табл. 2.6. Эта строка соответствует базисному неизвестному x_3. На пересечении отмеченных строки и столбца находим разрешающий элемент a_{32} = 23/7 (он обведен рамкой).

Таблица 2.6

Базис	Своб. члены	x_1	↓ x_2	x_3	x_4	x_5	b_k/a_{kj}
→ x_3	23	0	23/7	1	0	-3/7	7
x_4	51	0	38/7	0	1	-1/7	$9^{15}/_{38}$
x_1	15	1	4/7	0	0	1/7	$26^{1}/_{4}$
(-z)	-75	0	22/7	0	0	-5/7	

Составляем табл. 2.7. В ней в отличие от табл. 2.6 место базисного неизвестного x_3 займет неизвестное x_2. Отмеченную строку табл. 2.6 делим на 23/7 и заносим в ту же строку табл. 2.7. Затем 1-ю строку табл. 2.6 умножаем последовательно на -38/23, -4/23, -22/23 и прибавляем соответственно к 2-, 3-, 4-й строке. Результаты преобразований заносим в табл. 2.7. Второй шаг закончен.

Таблица 2.7

Базис	Своб. члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_k/a_{kj}
x_2	7	0	1	7/23	0	-3/23	
x_4	13	0	0	-38/23	1	13/23	
x_1	11	1	0	-4/23	0	5/23	
(-z)	-97	0	0	-22/23	0	-7/23	

В последней строке табл. 2.7 нет положительных элементов, следовательно, табл. 2.7 дает оптимальное решение, в котором свободные неизвестные x_3, x_5 равны нулю, а базисные неизвестные равны свободным членам, т.е.

$$x_1 = 11,\ x_2 = 7,\ x_3 = 0,\ x_4 = 13,\ x_5 = 0,\quad \min(-z) = -97.$$

Возвращаясь к исходной задаче, получим $\max z = 97$ при $x_1 = 11$, $x_2 = 7$.

Дадим теперь геометрическую интерпретацию приведенного решения задачи симплекс-методом, используя результаты примера 2.4, где рассматриваемая задача решена геометрическим способом. Табл. 2.5 соответствует базисное решение ($\boxed{0;\ 0}$; 68; 66; 105), в котором основные неизвестные равны $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, т.е. точка O(0; 0), см. рис. 2.5. Табл. 2.6 соответствует базисное решение ($\boxed{15;\ 0}$; 23; 51; 0), в котором основные неизвестные равны $x_1 = 15$, $x_2 = 0$, т.е. точка D(15; 0). Табл. 2.7 соответствует базисное решение ($\boxed{11;\ 7}$; 0, 13; 0), т.е. точка C(11; 7). Таким образом, переходу от табл. 2.5 к табл. 2.6, а затем к табл. 2.7 соответствует движение от вершины O(0, 0) к вершине D(15; 0), а затем к вершине C(11; 7), координаты которой дают оптимальное решение.

Отметим, что если на первом шаге в табл. 2.5 вместо элемента $c_1 = 5$ выбрать элемент $c_2 = 6$, то путь обхода многоугольника из вершины O в вершину C проходил бы через точки A(0; 11), B(6; 10), следовательно, решение задачи содержало бы 4 таблицы, а не 3. В связи с этим можно сказать, что рекомендация по поводу снижения объема вычислений, данная в пособии [1, 88, сноска *] и некоторых других, не всегда оправдывается. В соответствии с этой рекомендацией нужно было бы остановить выбор на элементе $c_2 = 6$, что привело бы к составлению лишней таблицы. Если последняя строка таблицы содержит несколько положительных элементов, то трудно предвидеть, выбор какого из них уменьшит объем вычислений.

Основываясь на примерах 2.5, 2.7, можно сказать, что в общем случае, когда множество допустимых решений системы ограничений представляет собой выпуклый многогранник в многомерном евклидовом пространстве, переходу от одной расчетной таблицы к другой соответствует переход от некоторой вершины многогранника по ребру к соседней вершине в направлении уменьшения формы.

§ 2.4. Метод искусственного базиса

[1, 90–94; 2, 110–117; 3, 197–208; 4, 224–236]

В § 2.3 отмечалось, что для решения задачи ЛП симплекс-методом необходимо привести ее к специальному виду (2.9), (2.10). Можно привести систему (2.3) канонической задачи ЛП к виду (2.9) методом Гаусса, но условие неотрицательности свободных членов в системе (2.9) не всегда может быть обеспечено. Перебор всех базисных решений в поисках неотрицательного решения затруднителен, так как их число может достигать C_n^r – числа сочетаний из n элементов по r,

где n – число неизвестных, r – ранг системы (2.3). Метод искусственного базиса позволяет привести каноническую задачу ЛП к виду (2.9), (2.10), если система уравнений (2.3) имеет хотя бы одно неотрицательное решение.

Пусть, для простоты, ранг системы уравнений (2.3) равен m. Для дальнейшего необходимо, чтобы свободные члены в уравнениях этой системы были неотрицательны. Если в каком-либо уравнении свободный член отрицателен, то умножим его обе части на -1.

Введем вспомогательные неизвестные $y_1, y_2, \ldots, y_m$ и построим для системы (2.3) вспомогательную систему линейных уравнений

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = b_m, \end{array} \qquad (2.20)$$

где $b_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Очевидно, система (2.3) тогда и только тогда имеет неотрицательные решения, когда система (2.20) имеет неотрицательные решения, в которых вспомогательные неизвестные $y_1, y_2, \ldots, y_m$ равны нулю.

Предположим, что систему (2.20) удалось привести к виду

$$\begin{array}{l} x_1 + a'_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{1n}x_n + a''_{11}y_1 + \ldots + a''_{1m}y_m = b'_1, \\ x_2 + a'_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{2n}x_n + a''_{21}y_1 + \ldots + a''_{2m}y_m = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a'_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{mn}x_n + a''_{m1}y_1 + \ldots + a''_{mm}y_m = b'_m, \end{array} \qquad (2.21)$$

где $b'_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда, приравняв к нулю вспомогательные неизвестные $y_1, y_2, \ldots, y_m$ в системе (2.21), приходим к системе нужного вида (2.9)

$$\begin{array}{l} x_1 + a'_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ x_2 + a'_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a'_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m, \end{array} \qquad (2.22)$$

где $b'_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Переход от системы (2.20) к системе (2.21), следовательно, (2.22) можно осуществить, решив вспомогательную задачу ЛП: среди неотрицательных решений системы уравнений (2.20) найти решение, дающее минимум линейной форме

$$F = y_1 + y_2 + \ldots + y_m. \qquad (2.23)$$

Система линейных уравнений (2.20) удовлетворяет всем требова-

ниям первого шага симплекс-метода. Она составлена искусственным образом так, что вспомогательные неизвестные $y_1, y_2, \ldots, y_m$ образуют исходный базис, отсюда и название метода. Форму F легко выразить через свободные неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, сложив все уравнения системы (2.20). Тем самым уравнение (2.23) будет приведено к виду (2.10). Так как форма F по определению (2.23) неотрицательна, то она имеет конечный минимум, который достигается через конечное число шагов симплекс-метода. При этом возможны два случая.

Случай 1. Min F > 0, тогда система (2.20) не имеет неотрицательных решений, в которых все вспомогательные неизвестные $y_1, y_2, \ldots, y_m$ равны нулю, следовательно, система (2.3) не имеет неотрицательных решений, т.е. множество ее допустимых решений пусто.

Случай 2. Min F = 0, тогда система (2.20) имеет неотрицательные решения, в которых все вспомогательные неизвестные $y_1, y_2, \ldots, y_m$ равны нулю, следовательно, система (2.3) имеет неотрицательные решения. В рассматриваемом случае, когда min F = 0, может представиться две возможности. Если в последней расчетной таблице неизвестные $y_1, y_2, \ldots, y_m$ не содержатся в базисе, то этой таблице соответствует система (2.21) и, таким образом, цель достигнута. Если же какие-то из неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_m$ находятся в базисе, то, приравняв остальные из них к нулю, подходящими преобразованиями можно вывести из базиса оставшиеся в нем вспомогательные неизвестные [1, 94; 2, 116; 3, 203].

Пример 2.7. Найти допустимое (неотрицательное) базисное решение системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 + x_4 &= 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 &= -3. \end{aligned}$$

Решим эту задачу методом искусственного базиса, приведя данную систему к виду (2.9). Поскольку свободный член во 2-м уравнении отрицателен, то умножим обе части этого уравнения на -1. Тогда система примет вид

$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 + x_4 &= 4, \\ -3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= 3. \end{aligned}$$

Введем искусственный базис (y_1, y_2), формально образовав систему

$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 + x_4 + y_1 \quad &= 4, \\ -3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 \quad + y_2 &= 3. \end{aligned} \qquad (2.24)$$

Выражение вспомогательной формы $F = y_1 + y_2$ через свободные неиз-

вестные x_1, x_2, x_3, x_4 можно получить, сложив уравнения системы (2.24), т.е.

$$-x_1 - x_2 + 3x_3 + 6x_4 + F = 7.$$

Для отыскания неотрицательного решения системы (2.24), дающего минимум форме F, составим табл. 2.8.

Таблица 2.8

Базис	Своб. члены	x_1	x_2	x_3	$\downarrow x_4$	y_1	y_2	b_k/a_{kj}
y_1	4	2	-5	6	1	1	0	4
→ y_2	3	-3	4	-3	$\boxed{5}$	0	1	3/5
F	7	-1	-1	3	6	0	0	

Найдя разрешающий элемент, выводим из базиса y_2 и, поскольку в конечном итоге y_2 следует приравнять к нулю, сделаем это на данном шаге, исключив y_2 из последующих рассуждений. Место y_2 в базисе занимает x_4. Переходим к следующей табл. 2.9.

Таблица 2.9

Базис	Своб. члены	$\downarrow x_1$	x_2	x_3	x_4	y_1	b_k/a_{kj}
→ y_1	17/5	$\boxed{13/5}$	-29/5	33/5	0	1	17/13
x_4	3/5	-3/5	4/5	-3/5	1	0	
F	17/5	13/5	-29/5	33/5	0	0	

Найдя разрешающий элемент, заменяем в базисе y_1 на x_1 и приравниваем y_1 к нулю. Очевидно, базисное решение, соответствующее новому базису, дает форме F минимум , равный 0. Переходим к итоговой табл. 2.10, где уже отсутствует столбец с y_1 и строка, соответствующая форме F.

Таблица 2.10

Базис	Своб. члены	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	17/13	1	-29/13	33/13	0
x_4	18/13	0	-7/13	12/13	1

Выпишем систему уравнений, соответствующую табл. 2.10.

$$x_1 - \frac{29}{13}x_2 + \frac{33}{13}x_3 = \frac{17}{13},$$
$$-\frac{7}{13}x_2 + \frac{12}{13}x_3 + x_4 = \frac{18}{13}.$$

Она эквивалентна исходной системе и имеет тот же вид, что и система (2.9). Приравняв в ней к нулю свободные неизвестные x_2, x_3, получим допустимое базисное решение исходной системы, равное (17/13, 0, 0, 18/3).

Пример 2.8. Привести к виду (2.9) систему ограничений

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -3,$$
$$3x_1 + 11x_2 + 2x_3 + x_4 = 11,$$
$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 10,$$

где $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$.

Введем дополнительное неотрицательное неизвестное x_5 для того, чтобы неравенство, содержащееся в системе, свести к уравнению. Кроме того, умножим обе части 1-го уравнения системы на -1 с тем, чтобы свободный член в нем стал положительным. Система ограничений примет вид

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 3,$$
$$3x_1 + 11x_2 + 2x_3 + x_4 = 11,$$
$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_5 = 10,$$

где $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$, $x_5 \ge 0$. Для первых двух уравнений введем искусственные базисные неизвестные y_1, y_2 и перейдем к системе уравнений

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + y_1 &= 3, \\ 3x_1 + 11x_2 + 2x_3 + x_4 + y_2 &= 11, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_5 &= 10. \end{aligned} \qquad (2.25)$$

где $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$, $x_5 \ge 0$, $y_1 \ge 0$, $y_2 \ge 0$. Для 3-го уравнения нет необходимости вводить искусственное базисное неизвестное, так как в полученной системе неизвестное x_5 является базисным, при этом важно, что смешанному базису (y_1, y_2, x_5) соответствует неотрицательное базисное решение.

Составим вспомогательную форму $F = y_1 + y_2$. Для того чтобы выразить ее через свободные неизвестные x_1, x_2, x_3, x_4, сложим 1-е и 2-е уравнения системы (2.25), получим

$$2x_1 + 9x_2 + 3x_3 - x_4 + F = 14.$$

Таким образом, требуется найти минимум формы F при ограничениях (2.25), в которых все неизвестные неотрицательны. Решение этой задачи содержится в табл. 2.11 - 2.13.

Таблица 2.11

Базис	Своб. члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	b_k/a_{kj}
→ y_1	3	-1	-2	1	-2	0	1	0	3
y_2	11	3	11	2	1	0	0	1	11/2
x_5	10	1	4	-2	0	1	0	0	
F	14	2	9	3	-1	0	0	0	

Таблица 2.12

Базис	Своб. члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_2	b_k/a_{kj}
x_3	3	-1	-2	1	-2	0	0	
→ y_2	5	5	15	0	5	0	1	1
x_5	16	-1	0	0	-4	1	0	
F	5	5	15	0	5	0	0	

Таблица 2.13

Базис	Своб. члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	4	0	1	1	-1	0
x_1	1	1	3	0	1	0
x_5	17	0	3	0	-3	1

Табл. 2.13 соответствует следующая система уравнений вида (2.9), которая эквивалентна исходной системе ограничений при условиях $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$:

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 - x_4 \quad &= 4, \\ x_1 + 3x_2 \quad + x_4 \quad &= 1, \\ 3x_2 \quad - 3x_4 + x_5 &= 17. \end{aligned}$$

Полученная система имеет допустимое базисное решение (1, 0, 4, 0, 17), соответствующее базису (x_1, x_3, x_5).

Пример 2.9. Решим симплекс-методом задачу о рационе, рассмотренную в примере 2.5, которая записывается следующим образом:

$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 &\geq 17,\\
5x_1 + 3x_2 &\geq 47,\\
x_1 + x_2 &\geq 13,\\
5x_1 + 12x_2 &\geq 100.\\
x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0,\\
z = 7x_1 + 6x_2 &\ (\min).
\end{aligned}
$$

Это задача ЛП общего вида. Приведем ее к каноническому виду, введя дополнительные неотрицательные неизвестные x_3, x_4, x_5, x_6:

$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 - x_3 &= 17,\\
5x_1 + 3x_2 - x_4 &= 47,\\
x_1 + x_2 - x_5 &= 13,\\
5x_1 + 12x_2 - x_6 &= 100,\\
x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_6 &\geq 0,\\
-7x_1 - 6x_2 + z &= 0\ (\min).
\end{aligned}
$$

Прежде чем приступить к отысканию $\min z$, методом искусственного базиса приведем систему ограничений к виду (2.9). Для этого введем искусственные базисные неизвестные y_1, y_2, y_3, y_4 и составим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 - x_3 + y_1 &= 17,\\
5x_1 + 3x_2 - x_4 + y_2 &= 47,\\
x_1 + x_2 - x_5 + y_3 &= 13,\\
5x_1 + 12x_2 - x_6 + y_4 &= 100,
\end{aligned}
\qquad (2.26)
$$

где $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, ... , $x_6 \geq 0$, $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, ... , $y_4 \geq 0$.

Выражение вспомогательной формы $F = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$ через свободные неизвестные x_1, x_2, ... , x_6 получается, если сложить уравнения системы (2.26), т.е.

$$14x_1 + 17x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 + F = 177. \qquad (2.27)$$

Решение вспомогательной задачи об отыскании допустимого решения системы (2.26), дающего минимум форме F (2.27), приведено в табл. 2.14 - 2.18. Во всех этих таблицах содержится строка для коэффициентов формы z, которая также подвергается преобразованиям при решении вспомогательной задачи.

Закончив решение вспомогательной задачи, получаем табл. 2.18, которая является исходной при решении основной задачи об отыскании $\min z$. Переходя от табл. 2.18 к табл. 2.19, получаем оптимальное решение основной задачи: $\min z = 82$ при $x_1 = 4$, $x_2 = 9$.

Таблица 2.14

Базис	Своб. члены	x_1	↓ x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3	y_4	b_k/a_{kj}
y_1	17	3	1	–1	0	0	0	1	0	0	0	17
y_2	47	5	3	0	–1	0	0	0	1	0	0	$15\frac{2}{3}$
y_3	13	1	1	0	0	–1	0	0	0	1	0	13
→ y_4	100	5	$\boxed{12}$	0	0	0	–1	0	0	0	1	$8\frac{1}{3}$
F	177	14	17	–1	–1	–1	–1	0	0	0	0	
z	0	–7	–6	0	0	0	0	0	0	0	0	

Таблица 2.15

Базис	Своб. члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	↓ x_6	y_1	y_2	y_3	b_k/a_{kj}
y_1	26/3	31/12	0	–1	0	0	1/12	1	0	0	104
y_2	22	15/4	0	0	–1	0	1/4	0	1	0	88
→ y_3	14/3	7/12	0	0	0	–1	$\boxed{1/12}$	0	0	1	56
x_2	25/3	5/12	1	0	0	0	–1/12	0	0	0	
F	106/3	83/12	0	–1	–1	–1	5/12	0	0	0	
z	50	–9/2	0	0	0	0	–1/2	0	0	0	

Таблица 2.16

Базис	Своб. члены	x_1	x_2	x_3	x_4	↓ x_5	x_6	y_1	y_2	b_k/a_{kj}
y_1	4	2	0	–1	0	1	0	1	0	4
→ y_2	8	2	0	0	–1	$\boxed{3}$	0	0	1	8/3
x_6	56	7	0	0	0	–12	1	0	0	
x_2	13	1	1	0	0	–1	0	0	0	
F	12	4	0	–1	–1	4	0	0	0	
z	78	–1	0	0	0	–6	0	0	0	

Таблица 2.17

Базис	Своб. члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	b_k/a_{kj}
→ y_1	4/3	4/3	0	-1	1/3	0	0	1	1
x_5	8/3	2/3	0	0	-1/3	1	0	0	4
x_6	88	15	0	0	-4	0	1	0	$5^{13}/_{15}$
x_2	47/3	5/3	1	0	-1/3	0	0	0	$9^{2}/_{5}$
F	4/3	4/3	0	-1	1/3	0	0	0	
z	94	3	0	0	-2	0	0	0	

Таблица 2.18

Базис	Своб. члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_k/a_{kj}
x_1	1	1	0	-3/4	1/4	0	0	
→ x_5	2	0	0	1/2	-1/2	1	0	4
x_6	73	0	0	45/4	-31/4	0	1	$6^{22}/_{45}$
x_2	14	0	1	5/4	-3/4	0	0	$11^{1}/_{5}$
z	91	0	0	9/4	-11/4	0	0	

Таблица 2.19

Базис	Своб. члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_k/a_{kj}
x_1	4	1	0	0	-1/2	3/2	0	
x_3	4	0	0	1	-1	2	0	
x_6	28	0	0	0	7/2	-45/2	1	
x_2	9	0	1	0	1/2	-5/2	0	
z	82	0	0	0	-1/2	-9/2	0	

§ 2.5. Транспортная задача

[1, 105-116; 2, 167-181; 3, 232-274; 4, 275-314]

Рассмотрим простейшую постановку транспортной задачи. В m пунктах отправления A_1, A_2, ... , A_m находится однородный груз, в количестве a_1, a_2, ... , a_m единиц (ед.)(например, тонн) соответ-

ственно. Потребность в этом грузе в n пунктах назначения B_1, B_2, ... , B_n составляет соответственно b_1, b_2, ... , b_n ед. груза. Стоимость перевозки ед. груза (удельная стоимость) из пункта A_i в пункт B_j (короче, из A_i в B_j) равна c_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Все эти данные можно свести в табл. 2.20, называемую матрицей перевозок, разграфив ее для удобства на клетки.

Табл. 2.20

	B_j	B_1	B_2	...	B_n
A_i	a_i \ b_j	b_1	b_2	...	b_n
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}
...	...	...	...	...	...
A_m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}

Можно считать, что сумма a запасов в пунктах отправления равна суммарным потребностям b в пунктах назначения, т.е.

$$a = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = b. \qquad (2.28)$$

Такая модель транспортной задачи называется закрытой. Если условие (2.28) не выполняется, т.е. модель открытая, то в случае, когда $a > b$, вводят фиктивный пункт назначения B_{n+1}, полагая

$$b_{n+1} = a - b,\ c_{i,n+1} = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Если, наоборот, $a < b$, то вводят фиктивный пункт отправления A_{m+1}, полагая

$$a_{m+1} = b - a,\ c_{m+1,j} = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть x_{ij} – неизвестный пока объем груза, который по плану перевозок следует доставить из A_i в B_j $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Занесем неизвестные x_{ij} в табл. (2.20) и приступим к составлению ограничений. Возьмем какой-нибудь пункт отправления, например A_1. Весь груз из него должен быть вывезен (это следствие того, что модель закрытая), поэтому сумма неизвестных в 1-й строке табл.2.20 должна равняться a_1, т.е.

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = a_i,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Таким образом, получим систему линейных уравнений (2.29) для пунктов отправления. Аналогично, сумма неизвестных, стоящих в j-м столбце табл. 2.20, должна равняться b_j, т.е.

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} = b_j,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

В результате получим систему линейных уравнений (2.30) для пунктов назначения. Естественно, неизвестные в этих системах должны быть неотрицательны.

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} &= a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} &= a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} &= a_m; \end{aligned} \qquad (2.29)$$

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} &= b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} &= b_n. \end{aligned} \qquad (2.30)$$

Предполагая, что стоимость перевозок пропорциональна количеству перевозимого груза, общую стоимость перевозок можно выразить формулой

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}. \qquad (2.31)$$

Итак, для решения поставленной задачи требуется найти неотрицательное решение системы линейных уравнений (2.29), (2.30), дающее минимум форме z (2.31).

Система линейных уравнений (2.29), (2.30) состоит из $(m + n)$ уравнений с $m \cdot n$ неизвестными, причем эта система линейно зависима, так как в силу условия (2.28) сумма первых m уравнений (подсистема (2.29)) совпадает с суммой остальных n уравнений (подсистема (2.30)). Это означает, что ранг системы (2.29), (2.30) меньше, чем $(m + n)$. Можно показать, что он равен $m + n - 1$ [4, 282], следовательно, базис системы уравнений (2.29), (2.30) содержит $m + n - 1$ неизвестных.

Непосредственное применение симплекс-метода к решению сформулированной задачи ЛП затруднительно из-за большого числа переменных, поэтому разработаны его модификации, учитывающие специфику транспортной задачи. Ниже будет рассмотрен распределительный метод решения транспортной задачи. Все необходимые вычисления по этому

методу можно оформить с помощью матрицы перевозок.

Правило северо-западного угла

Решение транспортной задачи начинается с нахождения какого-либо допустимого базисного решения. Самым простым способом отыскания исходного базисного решения является правило северо-западного угла. Такое название объясняется тем, что распределение груза в матрице перевозок идет слева направо, сверху вниз, что соответствует движению на географической карте с началом на северо-западе.

Пример 2.10. Исходные данные транспортной задачи сведены в табл. 2.21. Найти базисное решение по правилу северо-западного угла.

Таблица 2.21

	B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_i	b_j / a_i	25	10	35	5	35
A_1	20	5	6	2	3	1
A_2	30	3	7	8	6	8
A_3	45	9	8	1	4	3
A_4	15	9	3	6	10	7

Таблица 2.22

	B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_i	b_j / a_i	25	10	35	5	35
A_1	20	5 / 20	6	2	3	1
A_2	30	3 / 5	7 / 10	8 / 15	6	8
A_3	45	9	8	1 / 20	4 / 5	3 / 20
A_4	15	9	3	6	10	7 / 15

Схема распределения груза по правилу северо-западного угла состоит в следующем. Попытаемся удовлетворить потребности B_1 в 25 единиц (ед.) груза за счет A_1. Это можно сделать только в количестве 20 ед., т.е. полагаем $x_{11} = 20$. Недостающие 5 ед. для B_1 берем из A_2, т.е. $x_{21} = 5$. За счет A_2, где осталось 25 ед., удовлетворяем также B_2, полагая $x_{22} = 10$. Оставшиеся после этого в A_2 15 ед. отправляем в B_3, полагая $x_{23} = 15$. Недостающие в B_3 20 ед. берем из A_3, т.е. $x_{33} = 20$. Из A_3 отправляем в B_4 5 ед., т.е. $x_{34} = 5$, после чего в A_3 остается 20 ед. Отправляем их в B_5, т.е. $x_{35} = 20$. Наконец, из A_4 отправляем в B_5 недостающие там 15 ед., т.е. $x_{45} = 15$. В результате (см. табл. 2.22) заполнено $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$ клеток. Они соответствуют неизвестным

$$x_{11},\ x_{21},\ x_{22},\ x_{23},\ x_{33},\ x_{34},\ x_{35},\ x_{45}. \qquad (2.32)$$

Можно показать [2, 169–171], что систему уравнений вида (2.29), (2.30) можно разрешить относительно указанных неизвестных (2.32),

т.е. эти неизвестные образуют базис, а решение, полученное в табл. 2.22, является базисным для базиса (2.32). Клетки в матрице перевозок, отвечающие базисным неизвестным, принято называть базисными, а остальные - свободными. Для того чтобы базисные клетки отличить от свободных, будем перечеркивать их диагональю ⧄, помещая ниже диагонали значение базисного неизвестного в базисном решении. В свободных клетках подразумеваются нули.

Метод наименьшей стоимости

Распределение груза по правилу северо-западного угла производится в порядке номеров пунктов отправления и назначения и совершенно не учитывает удельные стоимости c_{ij} перевозок. Рассмотрим на данных примера 2.10 распределение груза по методу наименьшей стоимости, при котором в первую очередь заполняются клетки с наименьшими удельными стоимостями, причем, если удельные стоимости нескольких клеток равны, то предпочтение отдается той, где может быть помещено большее количество груза. В табл. 2.21 наименьшие удельные стоимости равны $c_{15} = c_{33} = 1$. В первую очередь полагаем $x_{33} = 35$, затем $x_{15} = 20$ и заносим в табл. 2.23. Так как запасы пункта A_1 исчерпаны, то 1-я строка исключается из рассмотрения, так же как и 3-й столбец, поскольку потребности B_3 удовлетворены. В табл. 2.23 они для удобства заштрихованы.

Таблица 2.23

	B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	a_i \ b_j	25	10	35	5	35
A_1	20	5	6	2	3	1 / 20
A_2	30	3 / 25	7	8	6	8
A_3	45	9	8	1 / 35	4	3 / 10
A_4	15	9	3 / 10	6	10	7

Таблица 2.24

	B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	a_i \ b_j	25	10	35	5	35
A_1	20	5	6	2	3	1 / 20
A_2	30	3 / 25	7	8	6 / 5	8
A_3	45	9	8	1 / 35	4	3 / 10
A_4	15	9	3 / 10	6	10	7 / 5

В оставшихся незаштрихованными клетках табл. 2.23 наименьшая удельная стоимость равна $c_{21} = c_{35} = c_{42} = 3$. В первую очередь полагаем $x_{21} = 25$, затем $x_{35} = 10$, $x_{42} = 10$ и заносим в табл. 2.23. Потребности B_1 и B_2 удовлетворены, поэтому 1-й и 2-й столбцы исключаем из рассмотрения, так же как и 3-ю строку, поскольку запасы

A_3 распределены. В табл. 2.24 эти столбцы и строка заштрихованы. В незаштрихованных клетках табл. 2.24 наименьшая удельная стоимость равна $c_{24} = 6$. Полагаем $x_{24} = 5$. И, наконец, $x_{45} = 5$. Распределение груза закончено. Полученное в табл. 2.24 решение оказалось вырожденым, так как содержит 7 ненулевых значений неизвестных вместо $8 = m + n - 1 = 4 + 5 - 1$. Для того чтобы иметь 8 базисных клеток, нужно в одну из незаполненных клеток (но не любую), например, в клетку с индексами (3, 4), поместить нуль. Получим табл. 2.25, где 8 базисных клеток пересечены диагоналями. Значения базисных неизвестных в базисном решении равны $x_{15} = 20$, $x_{21} = 25$, $x_{24} = 5$, $x_{33} = 35$, $x_{34} = 0$, $x_{35} = 10$, $x_{42} = 10$, $x_{45} = 5$.

Таблица 2.25

	B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	a_i \ b_j	25	10	35	5	35
A_1	20	5 +	6	2	3	1 − 20
A_2	30	3 − 25	7	8	6 + 5	8
A_3	45	9	8	1 35	4 − 0	3 + 10
A_4	15	9	3 10	6	10	7 5

§ 2.6. Распределительный метод

Решая транспортную задачу распределительным методом, переходят от одного базисного решения к другому таким образом, что стоимость перевозок уменьшается (не увеличивается). Такой переход осуществляется с помощью цикла пересчета свободной клетки. Циклом в матрице перевозок называется замкнутая ломаная линия, составленная из горизонтальных и вертикальных отрезков, вершины которой находятся в клетках таблицы (см. рис. 2.8, табл. 2.25).

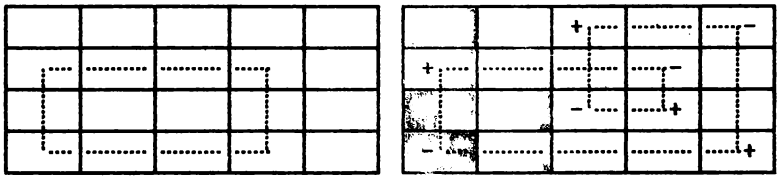

Рис. 2.8

Приведем некоторые свойства циклов.

Свойство 1. Число вершин в цикле четно.

Припишем каждой вершине цикла знак + или - таким образом, чтобы две соседние вершины имели разные знаки (см. рис. 2.8). Такой цикл назовем означенным. Будем для краткости называть клетку, в которую попала вершина означенного цикла со знаком +, положительной, а клетку с вершиной, помеченной знаком -, отрицательной.

Свойство 2. В любой строке (столбце) матрицы перевозок, где находятся вершины означенного цикла, число положительных клеток равно числу отрицательных клеток.

Свойство 3. Если в матрице перевозок размеров $m \times n$, $m \geq 2$, $n \geq 2$ указать произвольным образом $m + n$ клеток, то существует цикл, все вершины которого находятся в указанных клетках, необязательно во всех.

Пусть дано некоторое решение системы уравнений (2.29), (2.30). Внесем значения неизвестных, которые они принимают в этом решении в соответствующие клетки матрицы перевозок. Построим в матрице перевозок некоторый цикл, означим его. Затем значения неизвестных, стоящие в положительных клетках, увеличим на некоторое число x_o, а значения неизвестных, стоящие в отрицательных клетках, уменьшим на то же число x_o. Такое преобразование матрицы перевозок называется сдвигом по данному циклу на число x_o.

Теорема 2.1. Сдвиг по циклу на некоторое число x_o, отличное от нуля, переводит одно решение системы уравнений (2.29), (2.30) в некоторое другое решение этой системы.

Действительно, по свойству 2 циклов сумма значений неизвестных в любой строке (столбце) матрицы перевозок, где находятся вершины цикла, остается неизменной при сдвиге по циклу.

Пусть найдено некоторое базисное решение системы уравнений (2.29), (2.30). Ему соответствует стоимость перевозок, определяемая формулой (2.31). Впишем значения базисных неизвестных в соответствующие клетки матрицы перевозок, перечеркнув их диагональю.

Теорема 2.2. Не существует цикла, все вершины которого находятся в базисных клетках.

Предположим обратное: пусть такой цикл существует. Означим его и произведем сдвиг по этому циклу на некоторое число x_o. Тогда базисные неизвестные изменят свои значения, т.е. по теореме 2.1 получим новое решение системы (2.29), (2.30), в то время как сво-

бодные неизвестные не изменят свои значения (они по-прежнему равны нулю), что невозможно.

Теорема 2.3. Для каждой свободной клетки существует, и притом единственный, цикл, одна вершина которого находится в данной свободной клетке, а все остальные - в базисных, необязательно во всех.

Действительно, возьмем произвольную свободную клетку. Число базисных клеток вместе с взятой свободной равно $m + n$. По свойству 3 циклов найдется цикл, все вершины которого находятся в этих $m + n$ клетках, необязательно во всех, но по теореме 2.2 одна вершина обязательно попадет в данную свободную клетку. Покажем, что этот цикл единственный. Предположим, что нашелся другой цикл, одна вершина которого находится в данной свободной клетке, а остальные - в базисных. Тогда означим оба цикла так, чтобы их общая вершина в свободной клетке имела бы знак +, и произведем по одному из циклов сдвиг на число $x_o \neq 0$, а по другому циклу - на число $(-x_o)$. В результате базисные неизвестные изменят свои значения, так как циклы не совпадают, в то время как свободные неизвестные не изменят свои значения (они по-прежнему равны нулю), что невозможно.

Цикл, существование и единственность которого для данной свободной клетки следует из теоремы 2.3, будем всегда означивать так, чтобы свободная клетка была положительной. Он называется циклом пересчета данной свободной клетки.

Пусть в матрицу перевозок внесено некоторое допустимое базисное решение. Возьмем произвольную свободную клетку, например с индексами (i, j) (короче, клетку (i, j)), и построим для нее цикл пересчета (см. рис. 2.9). Осуществим сдвиг по циклу на некоторое число x_o. Это приведет по теореме 2.1 к новому решению системы уравнений (2.29), (2.30) и изменению стоимости перевозок, равному

$$\Delta z = c_{ij}x_o - c_{ik}x_o + c_{lk}x_o - \ldots + c_{st}x_o - c_{sj}x_o =$$

$$= \sum (c^+_{ij} - c^-_{ij})\cdot x_o. \qquad (2.33)$$

В формуле (2.33) через c^+_{ij} и c^-_{ij} символически обозначены удельные стоимости, находящиеся соответственно в положительных и отрицательных базисных клетках. Индексы i, j указывают на то, что в этих клетках находятся вершины цикла пересчета свободной клетки (i, j). Величина

$$\delta_{ij} = \sum (c^+_{ij} - c^-_{ij}) = c_{ij} - c_{ik} + c_{lk} - \ldots + c_{st} - c_{sj} \qquad (2.34)$$

называется оценкой свободной клетки (i, j) для данного базисного решения. Она не зависит от величины сдвига x_o. Экономический смысл оценки δ_{ij} свободной клетки (i, j) состоит в том, что она равна изменению стоимости перевозок при сдвиге по циклу пересчета свободной клетки (i, j) на единицу груза.

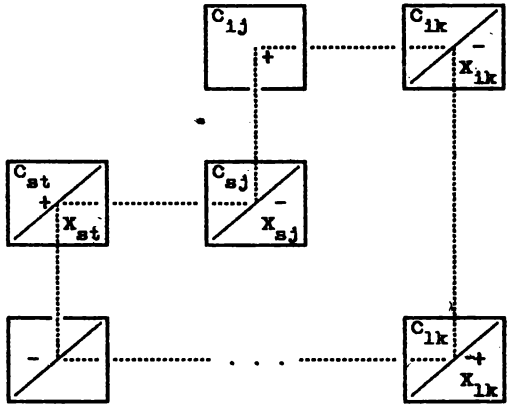

Рис. 2.9

Для примера обратимся к табл. 2.25. В ней построен цикл пересчета для свободной клетки (1, 1). Оценка этой клетки по формуле (2.34) равна $\delta_{11} = c_{11} - c_{15} + c_{35} - c_{34} + c_{24} - c_{21} = 5 - 1 + 3 - 4 + 6 - 3 = 6$.

Вернемся к общему случаю. Имеются три возможности для оценки свободной клетки.

1. Если $\delta > 0$, то $\Delta z > 0$, т.е. сдвиг в рассматриваемую свободную клетку (i, j) приводит к удорожанию перевозок, что не приближает к оптимальному решению.

2. Если $\delta = 0$, то $\Delta z = 0$, т.е. сдвиг по циклу пересчета не влияет на стоимость перевозок.

3. Если $\delta < 0$, то $\Delta z < 0$, т.е. сдвиг в рассматриваемую свободную клетку (i, j) уменьшает стоимость перевозок. В этом случае следует определить максимальное значение x_o, на которое можно произвести сдвиг по циклу пересчета. Оно находится из соображений неотрицательности решений и равно минимальному из значений x^-_{ij} – так символически можно обозначить значения базисных неизвестных в отрицательных клетках, т.е.

$$x_o = \min (x^-_{ij}). \qquad (2.35)$$

Осуществим сдвиг по циклу пересчета данной свободной клетки на это число x_o (2.35). Базисную клетку, в которой достигается минимум (2.35), удалим из базиса и сделаем свободной. Ее место займет данная свободная клетка (i, j) со значением x_o незвестного x_{ij}.

Таким образом, получим новое базисное решение. Значение формы z при переходе к новому решению уменьшится на величину $(-\delta_{ij} \cdot x_o)$.

Из проведенных рассуждений следует вывод: базисное решение является оптимальным, если среди оценок свободных клеток нет отрицательных, причем, если все оценки свободных клеток положительны, то оптимальное решение единственно, если же некоторые оценки равны нулю, то оптимальное решение не единственно.

Алгоритм распределительного метода

1. Проверяют, является ли модель транспортной задачи закрытой. Если модель открытая, то, введя фиктивный пункт отправления (назначения) с нулевыми удельными стоимостями перевозок, сводят ее к закрытой модели.

2. Находят исходное допустимое базисное решение методом наименьшей стоимости или по правилу северо-западного угла, заполняя базисные клетки соответствующими значениями базисных неизвестных.

3. Вычисляют оценки δ_{ij} свободных клеток для полученного базисного решения. Если среди оценок нет отрицательных, то исследуемое базисное решение является оптимальным. Подсчитывают стоимость перевозок.

4. Если среди оценок свободных клеток найдется хотя бы одна отрицательная, то для одной из свободных клеток с отрицательной оценкой строят ее цикл пересчета. Осуществляют сдвиг по этому циклу на число x_o, вычисленное по формуле (2.35) . Получив новое базисное решение, переходят к пункту 3.

Замечание 1. Если имеется несколько свободных клеток с отрицательными оценками, то предпочтение среди них можно отдать клетке с минимальной удельной стоимостью. У этой рекомендации нет какого-либо серьезного обоснования, кроме интуитивного соображения о том, что в первую очередь следует заполнять клетки с минимальной удельной стоимостью.

Замечание 2. Иногда минимальное значение x_o достигается в нескольких базисных клетках. В этом случае удаляют ту из базисных клеток, в которой содержится наибольшая удельная стоимость c_{pq}. В остальных базисных клетках, где достигается минимальное значение

x_o, неизвестные при сдвиге по циклу принимают значение 0, т.е. получается вырожденное базисное решение. Вырожденным называется базисное решение, в котором некоторые базисные неизвестные равны 0.

Замечание 3. В тех случаях, когда базисное решение вырождено, может оказаться, что минимальное значение x_o равно нулю. В такой ситуации нуль сдвигают в свободную клетку и она становится базисной, а базисная клетка, где стоял этот нуль ранее, становится свободной.

Наиболее затруднительным в приведенном алгоритме является вычисление оценок свободных клеток, поскольку требует построения цикла пересчета для каждой свободной клетки. Эта процедура облегчена в методе потенциалов.

§ 2.7. Метод потенциалов

По методу потенциалов пунктам отправления $A_1, A_2, \ldots, A_m$ приписывают потенциалы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, а пунктам назначения $B_1, B_2, \ldots, B_n$ приписывают потенциалы $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Значения потенциалов находят из системы линейных уравнений вида

$$\alpha_p + \beta_q = c_{pq}, \qquad (2.36)$$

где c_{pq} – удельная стоимость в базисной (1) клетке (p, q). Число базисных клеток равно $m + n - 1$, а число потенциалов равно $m + n$, поэтому система линейно независимых уравнений вида (2.36) недоопределена и, следовательно, один из потенциалов можно задать произвольно.

Подставим выражения (2.36) удельных стоимостей через потенциалы в формулу (2.34), получим

$$\delta_{ij} = c_{ij} - c_{ik} + c_{lk} - \ldots + c_{st} - c_{sj} = c_{ij} -$$
$$- \alpha_i - \beta_k + \alpha_l + \beta_k - \ldots + \alpha_s + \beta_t - \alpha_s - \beta_j = c_{ij} - \alpha_i - \beta_j.$$

Таким образом, оценка свободной клетки (i, j) равна

$$\delta_{ij} = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j). \qquad (2.37)$$

Пример 2.11. Решить транспортную задачу, данные которой приведены в табл. (2.26). В первом ее столбце указаны запасы груза в четырех пунктах отправления, а в первой строке – потребности пунктов назначения. В левых верхних углах остальных клеток таблицы помещены удельные стоимости перевозок.

Убедившись в том, что модель рассматриваемой задачи закрытая, распределим груз по методу наименьшей стоимости. Исходное базисное

решение заносим в табл. 2.27. Стоимость полученного плана перевозок равна $z = 50\cdot12 + 5\cdot3 + 75\cdot3 + 35\cdot7 + 15\cdot5 + 5\cdot6 + 20\cdot5 = 1290$.

Таблица 2.26

a_i \ b_j	90	15	20	80
55	12	8	6	3
75	9	4	5	3
50	7	5	10	10
25	6	8	5	9

Таблица 2.27

a_i \ b_j	90	15	20	80
55	12 / 50	8	6	3 / 5
75	9	4	5	3 / 75
50	7 / 35	5 / 15	10	10
25	6 / 5	8	5 / 20	9

Для оценки свободных клеток табл. 2.27 по методу потенциалов в соответствии с формулой (2.36) составим для базисных (!) клеток табл. 2.27 систему уравнений

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + \beta_1 = 12, && \alpha_1 + \beta_4 = 3,\\ &\alpha_3 + \beta_1 = 7,\ \alpha_3 + \beta_2 = 5, && \alpha_2 + \beta_4 = 3,\\ &\alpha_4 + \beta_1 = 6, && \alpha_4 + \beta_3 = 5, \end{aligned} \qquad (2.38)$$

из которой найдем потенциалы α_i, β_j, $i, j = 1, 2, 3, 4$.

Положим в системе (2.38) $\alpha_1 = 6$, тогда из уравнений 1-й строки $\beta_1 = 6$, $\beta_4 = -3$. Далее, используя ранее вычисленные значения, из 2-й строки системы (2.38) получим $\alpha_2 = 6$, из 3-й – $\alpha_3 = 1$, $\beta_2 = 4$, из 4-й – $\alpha_4 = 0$, $\beta_3 = 5$. Запишем эти потенциалы в табл. 2.28.

Заметим, что для вычисления потенциалов нет необходимости выписывать систему (2.38). Можно в табл. 2.28 задать один из потенциалов и, двигаясь в табл. 2.28 через базисные клетки, вычислить последовательно остальные потенциалы, используя равенство (2.36).

Вычислим по формуле (2.37) оценку каждой свободной клетки табл. 2.28 и занесем ее в правый нижний угол клетки:

$\delta_{12} = c_{12}-(\alpha_1+\beta_2) = 8-(6+4) = -2$, $\delta_{13} = c_{13}-(\alpha_1+\beta_3) = 6-(6+5) = -5$,
$\delta_{21} = c_{21}-(\alpha_2+\beta_1) = 9-(6+6) = -3$, $\delta_{22} = c_{22}-(\alpha_2+\beta_2) = 4-(6+4) = -6$,
$\delta_{23} = c_{23}-(\alpha_2+\beta_3) = 5-(6+5) = -6$, $\delta_{33} = c_{33}-(\alpha_3+\beta_3) = 10-(1+5) = 4$,
$\delta_{34} = c_{34}-(\alpha_3+\beta_4) = 10-(1-3) = 12$, $\delta_{42} = c_{42}-(\alpha_4+\beta_2) = 8-(0+4) = 4$,
$\delta_{44} = c_{44}-(\alpha_4+\beta_4) = 9-(0-3) = 12$.

Оценки свободных клеток, как и потенциалы, удобно вычислять непосредственно в таблицах, используя формулу (2.37).

Выберем в табл. 2.28 свободную клетку (2, 2) с отрицательной оценкой $\delta_{22} = -6$ (см. замечание на с. 76). Построим цикл пересчета этой клетки, означим его так, чтобы вершина цикла в клетке (2, 2) имела знак +. Отрицательным вершинам цикла соответствуют значения базисных неизвестных $x^-_{11} = 50$, $x^-_{24} = 75$, $x^-_{32} = 15$. Находим

$$x_o = \min\{x^-_{11}, x^-_{24}, x^-_{32}\} = \min\{50, 75, 15\} = x^-_{32} = 15.$$

Так как минимум достигается в клетке (3, 2), то, осуществив сдвиг по циклу пересчета на 15, клетку (3, 2) удаляем из числа базисных (она становится свободной). Клетка (2, 2) становится базисной, при этом $x_{22} = 15$. Переходим к табл. 2.29.

Таблица 2.28

α_i \ β_j	$\beta_1 = 6$	$\beta_2 = 4$	$\beta_3 = 5$	$\beta_4 = -3$
$\alpha_1 = 6$	12 − 50	8 −2	6 −5	3 + 5
$\alpha_2 = 6$	9 −3	4 + −6	5 −6	3 − 75
$\alpha_3 = 1$	7 + 35	5 − 15	10 4	10 12
$\alpha_4 = 0$	6 5	8 4	5 20	9 12

Таблица 2.29

α_i \ β_j	$\beta_1 = 5$	$\beta_2 = -3$	$\beta_3 = 4$	$\beta_4 = -4$
$\alpha_1 = 7$	12 − 35	8 4	6 −5	3 + 20
$\alpha_2 = 7$	9 −3	4 15	5 + −6	3 − 60
$\alpha_3 = 2$	7 50	5 6	10 4	10 12
$\alpha_4 = 1$	6 + 5	8 10	5 − 20	9 12

Снова вычисляем потенциалы, задав какой-нибудь из них, например $\alpha_1 = 7$. Затем вычисляем оценки свободных клеток. Выберем в табл. 2.29 свободную клетку (2, 3) с отрицательной оценкой $\delta_{23} = -6$. Построив для этой клетки цикл пересчета, осуществляем сдвиг по нему на

$$x_o = \min\{x^-_{11}, x^-_{24}, x^-_{43}\} = \min\{35, 60, 20\} = x^-_{43} = 20.$$

Клетка (2, 3) становится базисной вместо клетки (4, 3), которая становится свободной. Переходим к табл. 2.30.

Вычислим потенциалы и оценки свободных клеток. В табл. 2.30 одна свободная клетка (2, 1) имеет отрицательную оценку $\delta_{21} = -3$. По циклу пересчета этой клетки осуществляем сдвиг на

$$x_o = \min\{x^-_{11}, x^-_{24}\} = \min\{15, 40\} = x^-_{11} = 15.$$

Клетка (2, 1) становится базисной вместо клетки (1, 1), которая становится свободной. Переходим к табл. 2.31.

Таблица 2.30

α_i \ β_j	$\beta_1 = 7$	$\beta_2 = -1$	$\beta_3 = 0$	$\beta_4 = -2$
$\alpha_1 = 5$	12 / 15 (−)	8 / 4	6 / 1	3 / 40 (+)
$\alpha_2 = 5$	9 / −3 (+)	4 / 15	5 / 20	3 / 40 (−)
$\alpha_3 = 0$	7 / 50	5 / 6	10 / 10	10 / 12
$\alpha_4 = -1$	6 / 25	8 / 10	5 / 6	9 / 12

Таблица 2.31

α_i \ β_j	$\beta_1 = 9$	$\beta_2 = 4$	$\beta_3 = 5$	$\beta_4 = 3$
$\alpha_1 = 0$	12 / 3	8 / 4	6 / 1	3 / 55
$\alpha_2 = 0$	9 / 15	4 / 15	5 / 20	3 / 25
$\alpha_3 = -2$	7 / 50	5 / 3	10 / 7	10 / 9
$\alpha_4 = -3$	6 / 25	8 / 7	5 / 3	9 / 9

Все оценки свободных клеток табл. 2.31 положительны, следовательно, табл. 2.31 содержит оптимальное решение, в котором $x_{14} = 55$, $x_{21} = 15$, $x_{22} = 15$, $x_{23} = 20$, $x_{24} = 25$, $x_{31} = 50$, $x_{41} = 25$. Остальные неизвестные равны нулю. Общая стоимость перевозок по этому плану будет наименьшей по сравнению с любым другим планом. Она равна $z = 55 \cdot 3 + 15 \cdot 9 + 15 \cdot 4 + 20 \cdot 5 + 25 \cdot 3 + 50 \cdot 7 + 25 \cdot 6 = 1035$.

Замечание 4. Если оценка одной из свободных клеток в таблице с оптимальным решением равна нулю, то может оказаться, что оптимальное решение не единственно. Например для задачи, решение которой привело к табл. 2.32, бесконечное множество оптимальных решений дает табл. 2.33. Частное решение определяется значениями параметра θ, $0 \le \theta \le 40$. При $\theta = 0$, $\theta = 40$ решение будет базисным.

Таблица 2.32

α_i \ β_j	$\beta_1 = 6$	$\beta_2 = 5$	$\beta_3 = 4$	$\beta_4 = 4$
$\alpha_1 = 0$	7 / 1	5 / 40 (+)	4 / 40 (−)	8 / 4
$\alpha_2 = 3$	10 / 1	8 / 50 (−)	8 / 1	7 / 50 (+)
$\alpha_3 = 4$	11 / 1	10 / 1	8 / 0 (+)	8 / 60 (−)
$\alpha_4 = 2$	8 / 45	9 / 2	6 / 25	10 / 4

Таблица 2.33

a_i \ b_j	45	90	65	110
80	7	5 / 40+θ	4 / 40−θ	8
100	10	8 / 50−θ	8	7 / 50+θ
60	11	10	8 / θ	8 / 60−θ
40	8 / 45	9	6 / 25	10

Глава 3. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

§ 3.1. Правила построения двойственных задач

С каждой задачей ЛП сопряжена так называемая двойственная задача, которая формулируется на основе данной задачи по определенным правилам. Напомним, что общая задача ЛП состоит в следующем:

1) требуется найти максимум или минимум линейной формы (целевой функции);

2) на неизвестные (переменные) накладываются ограничения в виде неравенств (нестрогих) или уравнений;

3) некоторые неизвестные (возможно и все) неотрицательны.

Условимся в задаче на максимум записывать ограничения-неравенства, если такие имеются, в форме "≤", т.е.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i,$$

а в задаче на минимум - в форме "≥". Нужного смысла неравенства всегда можно добиться, умножив обе части неравенства на -1.

Приведем правила построения двойственных задач, применение которых можно проследить на задачах, сформулированных на с. 82-83.

1. Каждому ограничению основной задачи соответствует неизвестное в двойственной задаче, причем, если это ограничение в виде неравенства, то соответствующее неизвестное неотрицательно; если ограничение в виде уравнения, то соответствующее неизвестное произвольно (т.е. не является неотрицательным).

2. Каждому неизвестному в основной задаче соответствует ограничение в двойственной задаче, причем, если неизвестное неотрицательно, то соответствующее ограничение дается в виде неравенства; если неизвестное произвольно, то соответствующее ограничение - в виде уравнения.

3. Матрица коэффициентов при неизвестных в системе ограничений двойственной задачи транспонирована по отношению к матрице коэффициентов при неизвестных в системе ограничений основной задачи.

4. Если основная задача на максимум (минимум), то двойственная задача на минимум (максимум), причем свободные члены в системе ограничений основной задачи являются коэффициентами при неизвестных в линейной форме двойственной задачи, а коэффициенты в линейной форме основной задачи являются свободными членами в системе ограничений двойственной задачи.

Задача А (на максимум)

Общая задача ЛП

$$
\begin{array}{l}
a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n \le b_1, \\
a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n \le b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{l1} \cdot x_1 + a_{l2} \cdot x_2 + \ldots + a_{ln} \cdot x_n \le b_l, \\
a_{l+1,1}x_1 + a_{l+1,2}x_2 + \ldots + a_{l+1,n}x_n = b_{l+1}, \\
a_{l+2,1}x_1 + a_{l+2,2}x_2 + \ldots + a_{l+2,n}x_n = b_{l+2}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m, \\
\quad x_1 \ge 0, \\
\quad x_2 \ge 0, \\
\quad \ldots \\
\quad x_k \ge 0, \\
\quad x_{k+1} \text{ произвольно}, \\
\quad x_{k+2} \text{ произвольно}, \\
\quad \ldots\ldots\ldots \\
\quad x_n \text{ произвольно}, \\
z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n \ (\max).
\end{array}
$$

Задача, двойственная к канонической задаче ЛП

$$
\begin{array}{l}
a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \le c_1, \\
a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \le c_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \le c_n, \\
y_i \text{ произвольно}, \ i = 1, 2, \ldots, m, \\
z = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \ (\max).
\end{array}
$$

Задача, двойственная к канонической задаче ЛП в матричной форме

$$A^TY \le C,$$

вектор Y произволен,

$$z = B^TY \ (\max).$$

Симметричные взаимно

$$A \cdot X \le B,$$

$$X \ge 0,$$

$$z = C^TX \ (\max).$$

Задача В (на минимум)

Общая задача ЛП

$$
\begin{aligned}
&y_1 \ge 0,\\
&y_2 \ge 0,\\
&\dots\\
&y_l \ge 0,\\
&y_{l+1} \text{ произвольно},\\
&y_{l+2} \text{ произвольно},\\
&\dots\dots\dots\\
&y_m \quad \text{произвольно},\\
&a_{11}\cdot y_1 + a_{21}\cdot y_2 + \dots + a_{m1}\cdot y_m \ge c_1,\\
&a_{12}\cdot y_1 + a_{22}\cdot y_2 + \dots + a_{m2}\cdot y_m \ge c_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{1k}\cdot y_1 + a_{2k}\cdot y_2 + \dots + a_{mk}\cdot y_m \ge c_k,\\
&a_{1,k+1}y_1 + a_{2,k+1}y_2 + \dots + a_{m,k+1}y_m = c_{k+1},\\
&a_{1,k+2}y_1 + a_{2,k+2}y_2 + \dots + a_{m,k+2}y_m = c_{k+2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{1n}\cdot y_1 + a_{2n}\cdot y_2 + \dots + a_{mn}\cdot y_m = c_n,\\
w = {} & b_1\cdot y_1 + b_2\cdot y_2 + \dots + b_m\cdot y_m \ (\min).
\end{aligned}
$$

Каноническая задача ЛП

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m.\\
&x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \dots,\ x_n \ge 0,\\
w = {} & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \ (\min).
\end{aligned}
$$

Каноническая задача ЛП в матричной форме

$$
\begin{aligned}
A\cdot X &= B,\\
X &\ge 0,\\
w &= C^T X \ (\min).
\end{aligned}
$$

двойственные задачи

$$
\begin{aligned}
A^T Y &\ge C,\\
Y &\ge 0,\\
w &= B^T Y \ (\min).
\end{aligned}
$$

Матричные неравенства вида $U \le V$ $(U \ge V)$, использующиеся в матричной записи задач (см. с. 82-83), означают, что элементы матрицы $V - U$ $(U - V)$ неотрицательны.

Из приведенных правил вытекает, что если для некоторой задачи построить двойственную, а затем для построенной задачи сформулировать двойственную, то в результате получим первоначальную задачу.

Пример 3.1. Сформулировать задачу, двойственную к следующей задаче:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\ge 5, \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 4, \\ 4x_1 - 3x_2 &\le 8, \\ z = 2x_1 + x_2 &\ (\max). \end{aligned}$$

Поскольку данная задача на максимум, то все ограничения в форме неравенств должны иметь вид "≤". Первое из неравенств в системе ограничений этому требованию не удовлетворяет. Умножим обе его части на -1, получим

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 &\le -5, \quad \vdots\ y_1 \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 4, \quad \vdots\ y_2 \qquad (3.1) \\ 4x_1 - 3x_2 &\le 8, \quad \vdots\ y_3 \\ z = 2x_1 + x_2 &\ (\max). \qquad (3.2) \end{aligned}$$

Система ограничений (3.1) содержит 3 неравенства. Каждому из них соответствует неотрицательное неизвестное в двойственной задаче, т.е. y_1, y_2, y_3. Неизвестное x_1 в задаче (3.1), (3.2) произвольно, следовательно, в двойственной задаче ему соответствует ограничение в виде уравнения, т.е.

$$-y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 2.$$

Коэффициенты в этом уравнении и свободный член взяты из столбца коэффициентов при неизвестном x_1 в системе неравенств (3.1) и форме (3.2). Аналогично получается уравнение

$$-2y_1 + 3y_2 - 3y_3 = 1,$$

соответствующее неизвестному x_2. Наконец, коэффициенты формы w в двойственной задаче совпадают с элементами столбца свободных членов в системе (3.1), т.е.

$$w = -5y_1 + 4y_2 + 8y_3.$$

Таким образом, получаем задачу, двойственную к данной задаче:

$$\begin{aligned} -y_1 + 2y_2 + 4y_3 &= 2, \\ -2y_1 + 3y_2 - 3y_3 &= 1, \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 &\ge 0, \\ w = -5y_1 + 4y_2 + 8y_3&\ (\min). \end{aligned}$$

Пример 3.2. Сформулировать задачу, двойственную к следующей задаче:

$$\begin{aligned} &2x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 10,\\ &x_1 + 6x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 \ge 8,\\ &2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 \le 4,\\ &x_1 \ge 0, \quad x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\\ &z = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 \ (\min). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Поскольку задача на минимум, то неравенство (3.3) в системе ограничений следует привести к виду "≥", умножив обе его части на -1. Получим задачу

$$\begin{array}{l|l} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 10, & y_1\\ x_1 + 6x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 \ge 8, & y_2\\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 \ge -4, & y_3\\ x_1 \ge 0, \quad x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0, & \end{array} \tag{3.4}$$

$$z = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 \ (\min). \tag{3.5}$$

По числу ограничений в задаче (3.4), (3.5) двойственная задача содержит три неизвестных y_1, y_2, y_3, причем неизвестное y_1 произвольно, так как соответствует 1-му ограничению в системе (3.4), которое является уравнением. Неизвестные y_2, y_3 неотрицательны, поскольку соответствуют неравенствам в системе (3.4). В двойственной задаче система ограничений состоит из трех неравенств вида "≤" (они соответствуют неотрицательным неизвестным x_1, x_3, x_4) и двух уравнений (они соответствуют произвольным неизвестным x_2, x_5). В двойственной задаче требуется найти максимум формы w. Учитывая пункты 3, 4 правил о коэффициентах при неизвестных, свободных членах, получим задачу, двойственную к задаче (3.4), (3.5):

$$\begin{aligned} &2y_1 + y_2 - 2y_3 \le 2,\\ &-3y_1 + 6y_2 + y_3 = -1,\\ &y_1 - y_2 - 3y_3 \le 1,\\ &-3y_1 + 2y_2 + y_3 \le -3,\\ &-y_1 + y_2 - 2y_3 = 1,\\ &y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\\ &w = 10y_1 + 8y_2 - 4y_3 \ (\max). \end{aligned}$$

Пример 3.3. Сформулировать задачу, двойственную к следующей канонической задаче:

$$\begin{array}{l|l} 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 6, & y_1\\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 4, & y_2\\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1, & y_3 \end{array} \tag{3.6}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,$$
$$w = 4x_1 + 6x_2 - x_3 + 2x_4\ (\min). \qquad (3.7)$$

Задача (3.6), (3.7) имеет 3 уравнения в системе ограничений (3.6), следовательно, двойственная задача содержит 3 произвольных неизвестных y_1, y_2, y_3. Поскольку все 4 неизвестных в исходной задаче неотрицательны и эта задача на минимум, то все 4 ограничения в двойственной задаче, соответствующие неизвестным x_1, x_2, x_3, x_4, имеют форму неравенств вида "≤" и двойственная задача - на максимум. Итак, получим задачу, двойственную к задаче (3.6), (3.7)

$$\begin{aligned} 3y_1 + 2y_2 + y_3 &\leq 4, \\ -y_1 - 4y_2 - y_3 &\leq 6, \\ 4y_1 + 5y_2 + 2y_3 &\leq -1, \\ 2y_1 + y_2 - 3y_3 &\leq 2, \\ w = 6y_1 + 4y_2 - y_3\ &(\max). \end{aligned}$$

§ 3.2. Основные теоремы двойственности

Теоремы двойственности устанавливают связь между свойствами взаимно двойственных задач. Пусть

$$X = [x_1\ \ x_2\ \ \ldots\ \ x_n]^T,\quad Y = [y_1\ \ y_2\ \ \ldots\ \ y_m]^T$$

некоторые допустимые решения взаимно двойственных задач соответственно A (на максимум формы z) и B (на минимум формы w) (формы задач см. на с. 82-83). Для любой пары допустимых решений X, Y этих взаимно двойственных задач справедливо основное неравенство двойственности

$$z(X) \leq w(Y). \qquad (3.8)$$

Для симметричных задач, например, неравенство (3.8) следует из следующей цепочки соотношений:

$$z(X) = C^TX = X^TC \leq X^TA^TY = (AX)^TY \leq B^TY = w(Y).$$

Теорема 3.1. (Первая теорема двойственности).

1. Если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то другая задача также имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения форм совпадают.

2. Если одна из взаимно двойственных задач неразрешима из-за неограниченности формы, то множество допустимых решений другой задачи пусто.

Из пункта 1 теоремы 3.1 следует, что допустимые решения X^* и Y^* являются оптимальными, каждое в своей задаче, в том и только в

том случае, когда выполняется равенство

$$z(X^*) = w(Y^*) = C^T X^* = B^T Y^*.$$

Теорема 3.2. (Вторая теорема двойственности - о дополнительной нежесткости).

Для того чтобы два допустимых решения

$$X^* = [x_1^* \quad x_2^* \quad \ldots \quad x_n^*]^T, \quad Y^* = [y_1^* \quad y_2^* \quad \ldots \quad y_m^*]^T$$

взаимно двойственных задач А и В были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{aligned} &(a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \ldots + a_{in}x_n^* - b_i)\cdot y_i^* = 0, \\ &(a_{1j}y_1^* + a_{2j}y_2^* + \ldots + a_{mj}y_m^* - c_j)\cdot x_j^* = 0, \\ &i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Заметим, что $(m + n)$ равенств (3.9) связывают неравенства, уравнения и соответствующие им неизвестные двойственных задач. Они могут быть полезны только в тех случаях, когда связывают ограничения-неравенства и соответствующие им неотрицательные неизвестные в двойственной задаче. Теорема 3.2 позволяет найти оптимальное решение задачи ЛП, если известно оптимальное решение задачи, двойственной к ней. Проиллюстрируем это на следующем примере.

Пример 3.4. Рассмотрим задачу из примера 2.6 (с. 56)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\le 68, \\ x_1 + 6x_2 &\le 66, \\ 7x_1 + 4x_2 &\le 105, \\ x_1 \ge 0, \; x_2 &\ge 0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$z = 5x_1 + 6x_2 \; (\max), \tag{3.11}$$

оптимальное решение которой равно $x_1^* = 11$, $x_2^* = 7$, $\max z = 97$.

Задача, двойственная к задаче (3.10), (3.11), формулируется следующий образом:

$$\begin{aligned} 3y_1 + y_2 + 7y_3 &\ge 5, \\ 5y_1 + 6y_2 + 4y_3 &\ge 6, \\ y_1 \ge 0, \; y_2 \ge 0, \; y_3 &\ge 0, \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$w = 68y_1 + 66y_2 + 105y_3 \; (\min). \tag{3.13}$$

Найдем оптимальное решение $Y^* = [y_1^* \quad y_2^* \quad y_3^*]^T$ задачи (3.12), (3.13), зная оптимальное решение задачи (3.10), (3.11).

Согласно теореме 3.2 оптимальные решения

$$X^* = [x_1^* \quad x_2^*]^T, \; Y^* = [y_1^* \quad y_2^* \quad y_3^*]^T$$

этих задач связаны равенствами

$$(3x_1^* + 5x_2^* - 68)\cdot y_1^* = 0, \qquad (3.14)$$

$$(x_1^* + 6x_2^* - 66)\cdot y_2^* = 0, \qquad (3.15)$$

$$(7x_1^* + 4x_2^* - 105)\cdot y_3^* = 0, \qquad (3.16)$$

$$(3y_1^* + y_2^* + 7y_3^* - 5)\cdot x_1^* = 0, \qquad (3.17)$$

$$(5y_1^* + 6y_2^* + 4y_3^* - 6)\cdot x_2^* = 0. \qquad (3.18)$$

Поскольку $x_1^* = 11$, $x_2^* = 7$ отличны от нуля, то для выполнения равенств (3.17), (3.18) необходимо, чтобы в этих равенствах выражения в скобках равнялись нулю, т.е.

$$\begin{aligned} 3y_1^* + y_2^* + 7y_3^* &= 5, \\ 5y_1^* + 6y_2^* + 4y_3^* &= 6. \end{aligned} \qquad (3.19)$$

Равенства (3.14), (3.16) выполняются за счет того, что выражения в скобках обращаются в нуль при подстановке значений $x_1^* = 11$, $x_2^* = 7$, поэтому на основе этих равенств нельзя сделать никакого заключения относительно y_1^*, y_3^*. В равенстве (3.15) выражение в скобках при подстановке значений $x_1^* = 11$, $x_2^* = 7$ принимает значение $11+6\cdot 7-66= -13$, отличное от нуля, поэтому для выполнения этого равенства необходимо $y_2^* = 0$. Полагая в системе (3.19) $y_2^* = 0$, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} 3y_1^* + 7y_3^* &= 5, \\ 5y_1^* + 4y_3^* &= 6, \end{aligned}$$

из которой находим $y_1^* = 22/23$, $y_3^* = 7/23$. В итоге получаем оптимальное решение задачи (3.12), (3.13) $Y^* = [22/23 \quad 0 \quad 7/23]^T$. Значение формы $w(Y^*)$ равно $97 = z(X^*)$. Это по теореме 3.1 еще раз свидетельствует о том, что X^* и Y^* представляют собой пару оптимальных решений для рассмотренных взаимно двойственных задач.

Пример 3.5. Найдем оптимальное решение задачи, двойственной к задаче примера 2.9 (с. 64). Формулировки этих задач таковы:

Основная задача	Двойственная задача
$3x_1 + x_2 \ge 17,$	$3y_1 + 5y_2 + y_3 + 5y_4 \le 7,$
$5x_1 + 3x_2 \ge 47,$	$y_1 + 3y_2 + y_3 + 12y_4 \le 6,$
$x_1 + x_2 \ge 13,$	$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0,$
$5x_1 + 12x_2 \ge 100.$	$w = 17y_1 + 47y_2 + 13y_3 + 100y_4$ (max).
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$	
$z = 7x_1 + 6x_2$ (min);	

Используя теорему 3.1, путем тех же рассуждений, что и в при-

мере 3.3, приходим к системе (3.20), из которой находим оптимальное решение двойственной задачи $Y^* = [0 \quad 1/2 \quad 9/2 \quad 0]^T$, $\max w = 82$.

$$\begin{aligned} 3y_1 + 5y_2 + y_3 + 5y_4 &= 7, \\ y_1 + 3y_2 + y_3 + 12y_4 &= 6, \\ y_1 \qquad\qquad\qquad &= 0, \\ y_4 &= 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

§ 3.3. Экономическая интерпретация двойственных задач

Связь между двойственными задачами, устанавливаемая теоремами двойственности, имеет содержательную интерпретацию в следующей экономической задаче [12, 119].

Задача производственного планирования с n технологиями и одним продуктом

Пусть в производстве некоторого продукта используются производственные факторы (ресурсы) $S_1, S_2, \ldots, S_m$, которые имеются в количествах $b_1, b_2, \ldots, b_m$ соответственно. Под производственными факторами можно понимать сырье, оборудование, трудовые ресурсы, электроэнергию и т.д. Существует n технологий $T_1, T_2, \ldots, T_n$ получения продукта. Известны затраты (удельные затраты) a_{ij} i-го вида S_i производственных факторов и получаемый объем c_j продукта при единичной интенсивности j-й технологии T_j, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Под единичной интенсивностью понимается применение технологии в течение некоторого промежутка времени, принятого за единицу. Требуется найти интенсивности использования технологий, при которых продукт будет производиться в наибольшем объеме.

Рассмотрим математическую постановку задачи. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ неизвестные пока интенсивности технологий $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Ограничения, накладываемые объемами производственных факторов, задаются системой линейных неравенств

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\le b_m. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Эти неравенства составлены в предположении, что затраты каждого производственного фактора пропорциональны интенсивности технологий. Естественно, что интенсивности технологий должны быть неотрицательны, т.е.

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0. \tag{3.22}$$

Объем производимого продукта равен

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \ (\max). \qquad (3.23)$$

Итак, математическая задача состоит в том, чтобы среди неотрицательных решений системы линейных неравенств (3.21) найти решение, дающее максимум линейной форме z (3.23).

В задаче, двойственной к задаче (3.21)-(3.23), неотрицательные переменные $y_1, y_2, \ldots, y_m$, соответствующие неравенствам (3.21), интерпретируются как удельные цены на производственные факторы $S_1, S_2, \ldots, S_m$. При этом стоимость единицы готового продукта считается равной единице.

Рассмотрим j-ю технологию T_j. Величина

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{mj}y_m$$

есть стоимость затрат всех производственных факторов при единичной интенсивности технологии T_j. Естественно считать, что стоимость продукта не может превосходить стоимости затрат на его производство. Это приводит к неравенству

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{mj}y_m \geq c_j$$

и, следовательно, к системе неравенств для всех технологий

$$\begin{aligned} &a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ &a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n, \end{aligned} \qquad (3.24)$$

где

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ \ldots,\ y_m \geq 0. \qquad (3.25)$$

Потребуем, чтобы общая стоимость всех производственных факторов была минимальной, т.е.

$$w = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \ (\min). \qquad (3.26)$$

Таким образом, получили задачу (3.24) - (3.25), двойственную к задаче (3.21) - (3.23).

Выясним теперь, как интерпретируются теоремы 3.1, 3.2 двойственности. Пункт 1 теоремы 3.1 означает, что общая стоимость производственных факторов совпадает со стоимостью произведенного продукта, если в обеих задачах взяты оптимальные решения. По теореме 3.2 равенство

$$(a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \ldots + a_{in}x_n^* - b_i)\cdot y_i^* = 0$$

из системы (3.9) связывает затраты i-го производственного фактора при оптимальных интенсивностях технологий и его оптимальную цену.

Если $y_i^* > 0$, т.е. цена i-го фактора не равна нулю, то в рассматриваемом равенстве выражение в скобках должно равняться нулю, т.е. i-й фактор используется полностью. С другой стороны, если i-й фактор используется не полностью, т.е.

$$a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \ldots + a_{in}x_n^* < b_i,$$

то его цена равна нулю, т.е. $y_i^* = 0$. Вывод: только те факторы имеют цену, т.е. $y_i^* > 0$, которые используются полностью.

По теореме 3.2 равенство

$$(a_{1j}y_1^* + a_{2j}y_2^* + \ldots + a_{mj}y_m^* - c_j)\cdot x_j^* = 0$$

из системы (3.9) связывает удельные затраты по j-й технологии при оптимальных ценах на факторы и интенсивность j-й технологии в оптимальном решении задачи (3.21) - (3.23). Если стоимость затрат при единичной интенсивности j-й технологии больше стоимости полученного продукта, т.е.

$$a_{1j}y_1^* + a_{2j}y_2^* + \ldots + a_{mj}y_m^* > c_j,$$

то $x_j^* = 0$, т.е. такая технология не используется. С другой стороны, если $x_j^* > 0$, т.е. j-я технология используется с интенсивностью x_j^*, то стоимость затрат по этой технологии совпадает со стоимостью полученного по ней продукта, т.е.

$$a_{1j}y_1^* + a_{2j}y_2^* + \ldots + a_{mj}y_m^* = c_j.$$

Вывод: используются только те технологии, у которых стоимость затрат совпадает со стоимостью произведенного продукта. Другими словами, убыточные технологии не используются.

Пример 3.6. Рассмотрим из примера 2.4 задачу об использовании сырья, оптимальное решение которой равно $x_1^* = 11$, $x_2^* = 7$. Оптимальное решение двойственной к ней задачи найдено в примере 3.4 и равно $y_1^* = 22/23$, $y_2^* = 0$, $y_3^* = 7/23$. При оптимальном плане производства сырье второго вида используется не полностью, поэтому цена сырья этого вида равна нулю, т.е. $y_2^* = 0$.

Пример 3.7. Три производственных фактора S_1, S_2, S_3, которые имеются в количествах $b_1 = 32$, $b_2 = 25$, $b_3 = 31$, используются для производства некоторого продукта тремя технологиями T_1, T_2, T_3. Удельные затраты этих факторов и выход продукта при единичных интенсивностях технологий задаются матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Найдем интенсивности x_1, x_2, x_3 технологий, дающие максимальный общий выход продукции, и дадим экономическую интерпретацию данной задачи и задачи, двойственной к ней.

Математическая формулировка этих задач такова:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 32, & 2y_1 + y_2 + 3y_3 &\ge 3, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\le 25, & y_1 + 3y_2 + 3y_3 &\ge 5, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &\le 31, & 2y_1 + 4y_2 + y_3 &\ge 9, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 &\ge 0, & y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 &\ge 0, \end{aligned}$$

$$z = 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 \ (\max); \qquad w = 32y_1 + 25y_2 + 31y_3 \ (\min).$$

Анализируя оптимальные решения этих задач

$$X^* = [9 \quad 0 \quad 4]^T, \ Y^* = [0 \quad 24/11 \quad 3/11]^T,$$

приходим к следующим выводам. 1-й производственный фактор S_1 используется не полностью, поэтому его цена равна нулю, $y_1^* = 0$, т.е. производственный фактор, имеющийся в избытке, "не ценится". Факторы S_2, S_3, цены которых $y_2^* = 24/11$, $y_3^* = 3/11$ отличны от нуля, используются полностью. Для 2-й технологии T_2 издержки при единичной интенсивности равны

$$y_1^* + 3y_2^* + 3y_3^* = 1\cdot 0 + 3\cdot 24/11 + 3\cdot 3/11 = 81/11 > 5$$

и превышают стоимость продукции, равную 5, поэтому убыточая технология T_2 не используется, т.е. $x_2^* = 0$. Интенсивности остальных технологий отличны от нуля, поэтому издержки по этим технологиям при единичной интенсивности совпадают со стоимостью произведенной продукции.

Задача производственного планирования с m ингредиентами и n технологиями

В предыдущей задаче неявно предполагалось, что

$$a_{ij} \ge 0,\ b_i > 0,\ c_j > 0,\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Если эти условия нарушаются, то экономическая интерпретация задач (3.21) - (3.23), (3.24) - (3.26) может быть приспособлена к новым условиям. В этом случае не различаются производственные факторы и продукт. Считается, что в процессе производства участвуют m ингредиентов (ингредиент - составная часть чего-либо), которые могут расходоваться по одним и производиться по другим из n технологий.

Если $a_{ij} > 0$, то i-й ингредиент S_i расходуется в количестве a_{ij} при единичной интенсивности j-й технологии T_j, если $a_{ij} < 0$, то производится в количестве $|a_{ij}|$. Если $a_{ij} = 0$, то ингредиент S_i в технологии T_j не используется.

Пусть как и ранее x_j - интенсивность технологии T_j, $j = 1, 2,$

... , n. Рассмотрим величину

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n.$$

Если через a_i^- обозначить сумму слагаемых, входящих в нее и соответствующих положительным (!) коэффициентам a_{ij}, а через $(-a_i^+)$ - отрицательным, то эта величина может быть представлена в виде

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = a_i^- - a_i^+,$$

где a_i^- обозначает количество ингредиента S_i, которое будет израсходовано в процессе производства, а a_i^+ - произведено. При таких обозначениях i-е неравенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i$$

в системе (3.21) примет вид $a_i^- - a_i^+ \le b_i$.

Если $b_i > 0$, то ингредиент S_i имеется в количестве b_i и может быть израсходован в количестве большем, чем произведен, но не более, чем на b_i. Если $b_i \le 0$, то, учитывая, что $a_i^+ - a_i^- \ge -b_i$, ингредиент S_i должен быть произведен в количестве большем, чем израсходован, но не менее, чем $|b_i|$.

Рассмотрим коэффициенты формы (3.23). Положительный коэффициент c_j означает доход, который дает технология T_j при единичной интенсивности. Отрицательный коэффициент означает убыток. Если $c_j = 0$, то технология T_j не дает ни дохода , ни убытка. Необходимость использования в производстве технологий, дающих убыток, объясняется тем, что по ним, возможно, получают ингредиенты, которые расходуются при других технологиях.

Таким образом, получаем следующую экономическую интерпретацию задачи (3.21) - (3.23): следует найти такие неотрицательные интенсивности x_1, x_2, ... , x_n технологий, чтобы обеспечить максимум прибыли или, в крайнем случае, минимум убытка.

В двойственной задаче (3.24) - (3.26) неизвестные y_1, y_2,..., y_m интерпретируются как цены, выраженные в тех же единицах, что и доход (убыток), причем, если $b_i > 0$, то слагаемое b_iy_i увеличивает общую стоимость ингредиентов

$$w = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m,$$

а если $b_i < 0$, то уменьшает ее. Неравенство вида

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{mj}y_m \ge c_j$$

из системы (3.24) означает, что суммарная оценка технологии T_j при ее единичной интенсивности не может быть меньше дохода c_j ($c_j \ge 0$) или, в худшем случае, убытка ($c_j < 0$).

Таким образом, в задаче (3.24) - (3.26) требуется найти допустимый вариант цен $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ингредиентов $S_1, S_2, \ldots, S_m$, при котором общая стоимость ингредиентов минимальна.

Рассмотрим экономическую интерпретацию теорем 3.1, 3.2 двойственности. Пункт 1 теоремы 3.1 означает, что минимальная общая стоимость ингредиентов равна максимальной прибыли от применения оптимального варианта интенсивностей технологий. Равенство

$$(a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \ldots + a_{in}x_n^* - b_i)\cdot y_i^* = 0 \qquad (3.27)$$

из системы (3.9) (теорема (3.2)) при $y_i^* > 0$ влечет равенство

$$a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \ldots + a_{in}x_n^* = b_i,$$

или в других обозначениях

$$a_i^- - a_i^+ = b_i. \qquad (3.28)$$

При $b_i > 0$ равенство (3.28) означает, что запас b_i ингредиента S_i будет полностью израсходован в процессе производства. При $b_i \le 0$ к концу производственного процесса ингредиент S_i будет в количестве $|b_i|$, хотя до начала производства он отсутствовал. С другой стороны, если выражение в скобках в равенстве (3.27) не обращается в нуль, т.е. $a_i^- - a_i^+ < b_i$ (это значит, что разность израсходованного и произведенного в процессе прозводства ингредиента S_i не достигает предельного допустимого уровня b_i), то $y_i^* = 0$. Другими словами, "ценятся" ($y_i^* > 0$) только те ингредиенты, которые "жестко" ограничивают производство.

Из равенства

$$(a_{1j}y_1^* + a_{2j}y_2^* + \ldots + a_{mj}y_m^* - c_j)\cdot x_j^* = 0 \qquad (3.29)$$

системы (3.9) (теорема (3.2)) при $x_j^* > 0$ следует

$$a_{1j}y_1^* + a_{2j}y_2^* + \ldots + a_{mj}y_m^* = c_j.$$

Это означает, что оценка издержек по технологии T_j при ее единичной интенсивности равна ее доходу c_j (при $c_j \ge 0$) или убытку $|c_j|$ (при $c_j < 0$). Если в равенстве (3.29) выражение в скобках отлично от нуля, т.е.

$$a_{1j}y_1^* + a_{2j}y_2^* + \ldots + a_{mj}y_m^* > c_j,$$

то $x_j^* = 0$. Это означает, что технология T_j убыточна и поэтому не применяется в производстве, ее интенсивность x_j^* равна нулю. Итак, в оптимальном варианте применяются только неубыточные технологии.

Как указывалось выше, положительные цены ($y_i^* > 0$) имеют только те ингредиенты, которые сдерживают производство, так как расходуются полностью. Влияние запасов b_i этих ингредиентов на макси-

мальное значение формы $z(X^*)$ позволяют выяснить теорема 3.1 и теорема 3.3, которая формулируется ниже. По теореме 3.1 максимальное значение равно

$$z(X^*) = b_1y_1^* + b_2y_2^* + \ldots + b_my_m^*.$$

Теорема 3.3. (Об оценках). Оптимальные значения y_i^*, $i = 1, 2, \ldots, m$ неизвестных в двойственой задаче равны производным

$$\frac{\partial}{\partial b_i}(z(X^*)) = y_i^*, \ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Значения неизвестных $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*$ в оптимальном решении двойственной задачи Л.В.Канторович назвал объективно обусловленными оценками. Их роль ясна из экономической интерпретации взаимно двойственных задач и теорем двойственности. Из теоремы 3.3 следует, что, если величины b_i изменятся на малые величины Δb_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, то соответствующее изменение максимального значения $z(X^*)$ приблизительно равно

$$\Delta z(X^*) \approx y_1^*\cdot\Delta b_1 + y_2^*\cdot\Delta b_2 + \ldots + y_m^*\cdot\Delta b_m.$$

Из последнего приближенного равенства видно, как влияет изменение величин $b_1, b_2, \ldots, b_m$ на изменение величины максимума z.

Рассмотрим в связи с этим результаты решений задач, обсуждавшихся в примерах 3.6, 3.7. В задаче об использовании сырья (см. примеры 2.4, 2.6, 3.4) объективно обусловленые оценки трех видов сырья соотвественно равны $y_1^* = 22/23$, $y_2^* = 0$, $y_3^* = 7/23$. Поскольку $y_2^* = 0$, то небольшое изменение запасов сырья 2-го вида не повлияет на общий максимальный доход. Если же изменить запасы 1-го и 3-го видов сырья на единицу, то вклад такого изменения запаса сырья 1-го вида в изменение дохода существеннее, чем у 2-го, так как $y_1^*:y_3^* = 22:7$.

В примере 3.7 объективно обусловленные оценки трех производственных факторов соответственно равны $y_1^* = 0$, $y_2^* = 24/11$, $y_3^* = 3/11$. Малое изменение объема 1-го фактора не влияет на максимальный объем выпускаемого продукта, поскольку этот фактор имеется в избытке. Влияние 2-го фактора на изменение максимального объема выпускаемого продукта существеннее, чем 3-го, так как $y_2^*:y_3^* = 24:3 = 8$.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ И ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Серия А

1. В задачах 1 - 10 решить систему линейных уравнений методом Гаусса, преобразовывая расширенную матрицу системы.

2. В задачах 11 - 20 для трех отраслей даны матрица A коэффициентов прямых затрат, столбец Y объемов конечных продуктов, столбец V удельных прибавленных стоимостей для трех отраслей. Найти объемы производств, матрицу косвенных затрат 1-го порядка и равновесные цены продукции отраслей. Составить межотраслевой баланс.

3. В задачах 21 - 30 заданы векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$, $\bar{b}$ своими координатами в некотором базисе. Показать, что векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{b}$ в этом базисе, решив соответствующую систему линейных уравнений по формулам Крамера.

4. В задачах 31 - 40 в таблице вида табл. 3.1. приведены данные о предприятии, производящем продукцию двух видов P_1, P_2 из сырья трех видов S_1, S_2, S_3. Запасы сырья равны соответственно b_1, b_2, b_3. Расход i-го вида сырья S_i на единицу j-го вида продукции P_j равен a_{ij}. Доход, получаемый предприятием от реализации единицы j-го вида продукции, равен c_j. Найти план производства, обеспечивающий предприятию максимум дохода. Решить задачу геометрическим способом и симплекс-методом. Найти оптимальное решение двойственной задачи, дать экономическую интерпретацию.

Таблица 3.1

b_i	P_1	P_2
b_1	a_{11}	a_{12}
b_2	a_{21}	a_{22}
b_3	a_{31}	a_{32}
c_j	c_1	c_2

5. В задачах 41 - 50 нужно решить транспортную задачу, данные которой сведены в таблицу вида табл. 3.2. В ней a_1, a_2, a_3, a_4 - запасы груза в пунктах отправления, b_1, b_2, b_3, b_4 - потребности в грузе в пунктах назначения, c_{ij} - стоимость перевозки единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения. Распределительным методом найти план перевозок, имеющий минимальную стоимость.

Таблица 3.2

a_i \ b_j	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}
a_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}
a_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}
a_4	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}

6. В задачах 51 - 60 требуется методом искусственного базиса найти неотрицательное базисное решение системы линейных уравнений.

Варианты задач серии А

1. $$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= -15, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 15, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= -20. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 61, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 18, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 50. \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 4, \\ 6x_1 - x_2 + 3x_3 &= 43, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= -7. \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 18, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 33, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 57. \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 12, \\ 5x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= -33, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 &= 19. \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} 4x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= -44, \\ 6x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= -25, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -19. \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 - x_3 &= 24, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 34, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= -16. \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= -14, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -7, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= -32. \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 12, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -1, \\ 6x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 27. \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 15, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 36, \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 58. \end{aligned}$$

11. $$A = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 48 \\ 96 \\ 144 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0{,}80 \\ 4{,}07 \\ 1{,}25 \end{bmatrix}.$$

12. $$A = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 108 \\ 162 \\ 216 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 2{,}38 \\ 2{,}64 \\ 0{,}29 \end{bmatrix}.$$

13. $$A = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 117 \\ 39 \\ 39 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1{,}32 \\ 3{,}66 \\ 2{,}58 \end{bmatrix}.$$

14. $$A = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 92 \\ 46 \\ 184 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1{,}61 \\ 2{,}44 \\ 0{,}31 \end{bmatrix}.$$

15. $$A = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 88 \\ 44 \\ 132 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 3{,}61 \\ 0{,}62 \\ 1{,}26 \end{bmatrix}.$$

16. $$A = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 78 \\ 26 \\ 104 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1{,}87 \\ 0{,}59 \\ 1{,}85 \end{bmatrix}.$$

17. $A = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 108 \\ 36 \\ 72 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0{,}93 \\ 0{,}27 \\ 1{,}68 \end{bmatrix}.$

18. $A = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 110 \\ 70 \\ 160 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1{,}18 \\ 4{,}19 \\ 0{,}80 \end{bmatrix}.$

19. $A = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 144 \\ 48 \\ 240 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 2{,}66 \\ 1{,}10 \\ 3{,}26 \end{bmatrix}.$

20. $A = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 180 \\ 108 \\ 72 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 2{,}59 \\ 2{,}69 \\ 0{,}49 \end{bmatrix}.$

21. $\bar{a}_1 = (1, -3, 2, 0)$,
$\bar{a}_2 = (2, -3, 4, 1)$,
$\bar{a}_3 = (3, -1, 2, 4)$,
$\bar{a}_4 = (1, 2, 2, 1)$,
$\bar{b} = (5, -8, 6, 5)$.

22. $\bar{a}_1 = (2, 4, 8, 3)$,
$\bar{a}_2 = (2, 3, 5, 3)$,
$\bar{a}_3 = (-1, -1, -3, -2)$,
$\bar{a}_4 = (1, 2, 4, 2)$,
$\bar{b} = (-1, 4, 8, -1)$.

23. $\bar{a}_1 = (2, 1, 0, 1)$,
$\bar{a}_2 = (1, -3, 2, 4)$,
$\bar{a}_3 = (-5, 0, -1, -7)$,
$\bar{a}_4 = (1, -6, 2, 6)$,
$\bar{b} = (8, 9, -5, 0)$.

24. $\bar{a}_1 = (1, 2, 2, 1)$,
$\bar{a}_2 = (2, 1, 3, 7)$,
$\bar{a}_3 = (3, 2, 2, 3)$,
$\bar{a}_4 = (4, 3, 1, 2)$,
$\bar{b} = (10, 6, 2, 12)$.

25. $\bar{a}_1 = (8, 3, 4, 0)$,
$\bar{a}_2 = (6, 3, 2, 4)$,
$\bar{a}_3 = (5, 2, 3, 5)$,
$\bar{a}_4 = (2, 1, 1, 2)$,
$\bar{b} = (4, 0, 7, 4)$.

26. $\bar{a}_1 = (2, -1, 1, 3)$,
$\bar{a}_2 = (6, -3, 2, 5)$,
$\bar{a}_3 = (6, -2, 4, 3)$,
$\bar{a}_4 = (4, 0, 1, 2)$,
$\bar{b} = (2, -1, 10, -1)$.

27. $\bar{a}_1 = (2, 3, -1, -3)$,
$\bar{a}_2 = (1, -2, 5, -1)$,
$\bar{a}_3 = (-1, 1, -2, 2)$,
$\bar{a}_4 = (3, -3, 4, -5)$,
$\bar{b} = (6, 11, 5, -7)$.

28. $\bar{a}_1 = (2, -3, 4, -5)$,
$\bar{a}_2 = (1, -2, 3, -2)$,
$\bar{a}_3 = (3, -4, 1, -2)$,
$\bar{a}_4 = (4, -5, 6, -5)$,
$\bar{b} = (-3, 5, 5, 7)$.

29. $\bar{a}_1 = (5, 2, -1, 4)$,
$\bar{a}_2 = (2, 1, -2, 4)$,
$\bar{a}_3 = (4, 3, -2, 4)$,
$\bar{a}_4 = (-4, -2, 3, -5)$,
$\bar{b} = (3, 8, -7, 10)$.

30. $\bar{a}_1 = (4, 2, 0, 1)$,
$\bar{a}_2 = (3, 3, -1, 0)$,
$\bar{a}_3 = (9, -1, -1, 2)$,
$\bar{a}_4 = (-4, -3, 4, 1)$,
$\bar{b} = (-2, 14, 6, 1)$.

31.

b_i	P_1	P_2
55	3	5
45	1	5
60	5	2
c_j	5	6

32.

b_i	P_1	P_2
56	4	1
77	2	7
89	5	6
c_j	3	5

33.

b_i	P_1	P_2
65	3	5
55	5	2
65	5	4
c_j	6	7

34.

b_i	P_1	P_2
55	1	5
70	4	5
42	3	2
c_j	6	5

35.

b_i	P_1	P_2
68	5	6
36	3	2
36	1	4
c_j	5	8

36.

b_i	P_1	P_2
49	5	3
55	3	5
27	3	1
c_j	7	6

37.

b_i	P_1	P_2
48	1	4
75	5	3
80	5	4
c_j	4	7

38.

b_i	P_1	P_2
59	4	5
48	1	6
39	3	2
c_j	3	7

39.

b_i	P_1	P_2
65	2	5
75	5	2
67	4	3
c_j	6	7

40.

b_i	P_1	P_2
60	5	2
80	5	6
44	1	4
c_j	7	5

41.

a_i \ b_j	40	85	25	50
35	9	3	6	5
70	4	10	11	8
65	2	2	3	9
30	3	4	9	12

42.

a_i \ b_j	75	80	45	100
20	11	2	10	3
90	6	6	9	10
95	4	8	3	8
95	9	11	2	5

43.

a_i \ b_j	90	25	105	65
130	7	6	9	8
80	6	9	11	12
40	5	5	7	9
35	4	8	10	9

44.

a_i \ b_j	40	45	95	30
65	9	4	2	2
10	3	8	5	7
110	2	7	3	4
25	4	5	9	6

45.

a_i \ b_j	80	125	90	50
110	10	9	3	4
75	5	6	9	6
60	3	9	2	5
100	6	8	7	7

46.

a_i \ b_j	30	20	110	120
60	10	4	5	9
80	10	5	3	5
45	5	9	10	4
95	7	6	4	5

47.

a_i \ b_j	80	65	55	85
90	4	8	8	10
35	5	6	9	5
70	3	4	10	11
90	5	7	5	8

48.

a_i \ b_j	105	20	60	65
35	8	10	9	3
100	5	6	6	2
30	4	6	8	7
85	7	8	5	3

49.

a_i \ b_j	30	65	80	75
100	11	6	4	3
25	5	8	4	5
55	10	10	11	6
70	7	9	5	5

50.

a_i \ b_j	90	75	120	15
85	7	10	6	5
115	6	11	7	4
40	4	5	6	8
60	8	5	4	6

51. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 7. \end{aligned}$

52. $\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= -2, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 3. \end{aligned}$

53. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 6, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 3. \end{aligned}$

45. $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 &= -4, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= 6. \end{aligned}$

55. $\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 7, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1. \end{aligned}$

56. $\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 8x_4 &= -5, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 3. \end{aligned}$

57. $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= -2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= 6. \end{aligned}$

58. $\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= -4, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 8. \end{aligned}$

59. $\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 &= 7, \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1. \end{aligned}$

60. $\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 4, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 &= -6. \end{aligned}$

Серия В

1. В задачах 1 - 10 найти решение системы линейных уравнений по формулам Крамера.

2. В задачах 11 - 20 для трех отраслей даны матрица A коэффициентов прямых затрат, столбец Y объемов конечных продуктов, столбец V удельных прибавленных стоимостей для трех отраслей. Найти объемы производств, матрицу косвенных затрат 1-го порядка и равновесные цены продукции отраслей. Составить межотраслевой баланс.

3. В задачах 21 - 30 нужно выяснить, является ли система векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$ линейно зависимой. Если это так, то с какими коэффициентами эти векторы образуют нулевую линейную комбинацию?

4. В задачах 31 - 40 следует решить задачу об использовании сырья геометрическим способом и симплекс-методом. Найти оптимальное решение двойственной задачи, дать экономическую интерпретацию.

5. В задачах 41 - 50 решить транспортную задачу распределительным методом, оценивая свободные клетки по методу потенциалов.

6. В задачах 51 - 60 требуется методом искусственного базиса найти неотрицательное базисное решение системы линейных уравнений.

Варианты задач серии В

1. $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 25, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -6, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 0. \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 22, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 15. \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= -2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 23, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 12. \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - x_3 &= 8, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 &= 23, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 26. \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 48, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 31. \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= 7, \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 6. \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= -26, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= -5. \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -6, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= -22. \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= -7. \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= -20, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -5, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 2. \end{aligned}$

11. $A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 45 \\ 60 \\ 30 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 2,46 \\ 0,39 \\ 0,57 \end{bmatrix}.$

12. $A = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 66 \\ 132 \\ 66 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1,71 \\ 0,97 \\ 1,62 \end{bmatrix}.$

13. $A = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 72 \\ 48 \\ 72 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0,76 \\ 2,49 \\ 0,80 \end{bmatrix}.$

14. $A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 126 \\ 168 \\ 84 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 3,73 \\ 1,63 \\ 1,04 \end{bmatrix}.$

15. $A = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 112 \\ 84 \\ 84 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0,72 \\ 1,94 \\ 2,06 \end{bmatrix}.$

16. $A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 105 \\ 126 \\ 42 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1,95 \\ 0,69 \\ 1,08 \end{bmatrix}.$

17. $A = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 80 \\ 80 \\ 60 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1,58 \\ 0,54 \\ 3,30 \end{bmatrix}.$

18. $A = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,4 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 78 \\ 52 \\ 130 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1,06 \\ 2,59 \\ 2,67 \end{bmatrix}.$

19. $A = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 72 \\ 24 \\ 48 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0{,}34 \\ 0{,}88 \\ 1{,}66 \end{bmatrix}.$

20. $A = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 66 \\ 88 \\ 44 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 2{,}27 \\ 1{,}51 \\ 1{,}78 \end{bmatrix}.$

21. $\bar{a}_1 = (-1,\ 2,\ 0,\ 1)$,
$\bar{a}_2 = (-3,\ 1,\ 2,\ 2)$,
$\bar{a}_3 = (\ 3,\ 1,\ -2,\ 4)$,
$\bar{a}_4 = (-5,\ 7,\ 2,\ 10)$.

22. $\bar{a}_1 = (\ 0,\ 1,\ 1,\ -1)$,
$\bar{a}_2 = (\ 1,\ 3,\ 2,\ 1)$,
$\bar{a}_3 = (\ 1,\ -1,\ 1,\ 1)$,
$\bar{a}_4 = (\ 4,\ 7,\ 6,\ 5)$.

23. $\bar{a}_1 = (\ 1,\ 2,\ -1,\ 3)$,
$\bar{a}_2 = (\ 0,\ 1,\ -3,\ 1)$,
$\bar{a}_3 = (\ 2,\ -1,\ 0,\ 2)$,
$\bar{a}_4 = (\ 6,\ 1,\ 1,\ 9)$.

24. $\bar{a}_1 = (\ 2,\ -1,\ 1,\ 0)$,
$\bar{a}_2 = (\ 0,\ -2,\ 1,\ 2)$,
$\bar{a}_3 = (\ 1,\ 3,\ -1,\ -2)$,
$\bar{a}_4 = (\ 1,\ -9,\ 4,\ 4)$.

25. $\bar{a}_1 = (\ 2,\ -1,\ 3,\ 0)$,
$\bar{a}_2 = (-2,\ 1,\ -2,\ 4)$,
$\bar{a}_3 = (\ 4,\ 1,\ 3,\ -2)$,
$\bar{a}_4 = (\ 4,\ 1,\ 4,\ 2)$.

26. $\bar{a}_1 = (\ 1,\ 3,\ 1,\ 5)$,
$\bar{a}_2 = (-1,\ 2,\ 2,\ 1)$,
$\bar{a}_3 = (\ 3,\ -2,\ -1,\ 3)$,
$\bar{a}_4 = (\ 3,\ -4,\ 3,\ 3)$.

27. $\bar{a}_1 = (\ 2,\ 3,\ -4,\ 0)$,
$\bar{a}_2 = (-1,\ 3,\ 2,\ -6)$,
$\bar{a}_3 = (\ 0,\ 2,\ 0,\ -2)$,
$\bar{a}_4 = (\ 3,\ 4,\ -6,\ 2)$.

28. $\bar{a}_1 = (\ 1,\ -2,\ 0,\ 2)$,
$\bar{a}_2 = (\ 4,\ -1,\ 3,\ 2)$,
$\bar{a}_3 = (\ 4,\ 2,\ 5,\ 3)$,
$\bar{a}_4 = (-1,\ -2,\ -1,\ 5)$.

29. $\bar{a}_1 = (\ 1,\ -1,\ 2,\ 0)$,
$\bar{a}_2 = (\ 3,\ 1,\ 4,\ 3)$,
$\bar{a}_3 = (-5,\ 2,\ 1,\ -5)$,
$\bar{a}_4 = (\ 1,\ 3,\ 0,\ 3)$.

30. $\bar{a}_1 = (\ 3,\ -2,\ 1,\ 4)$,
$\bar{a}_2 = (\ 3,\ 3,\ 0,\ 2)$,
$\bar{a}_3 = (-3,\ -4,\ -4,\ 1)$,
$\bar{a}_4 = (-1,\ 2,\ -2,\ -1)$.

31.

b_1	P_1	P_2
70	1	7
54	3	2
41	2	3
c_j	3	7

32.

b_1	P_1	P_2
41	2	3
77	2	7
75	5	2
c_j	7	6

33.

b_1	P_1	P_2
98	2	7
62	3	2
76	4	1
c_j	2	5

34.

b_1	P_1	P_2
60	1	5
92	3	7
72	4	3
c_j	3	5

35.

b_1	P_1	P_2
45	1	3
83	3	5
75	5	2
c_j	7	5

36.

b_1	P_1	P_2
32	1	2
52	4	1
44	3	2
c_j	5	6

37.

b_1	P_1	P_2
65	5	2
75	5	4
105	5	7
c_j	7	4

38.

b_1	P_1	P_2
95	2	5
80	5	2
75	5	1
c_j	4	5

39.

b_1	P_1	P_2
32	1	4
29	2	3
45	5	2
c_j	8	7

40.

b_1	P_1	P_2
75	2	5
39	3	1
113	7	6
c_j	5	8

41.

a_i \ b_j	30	80	95	35
45	6	3	7	10
100	10	4	12	10
20	5	9	8	11
75	4	2	4	8

42.

a_i \ b_j	25	60	35	120
45	7	3	6	9
85	6	12	7	5
20	9	9	5	4
90	8	10	12	6

43.

$a_i \backslash b_j$	60	50	85	75
65	8	10	6	5
80	4	3	5	9
35	11	4	4	8
90	5	5	3	6

44.

$a_i \backslash b_j$	30	35	85	60
80	8	4	5	4
25	4	8	7	3
60	9	9	6	6
45	5	5	3	7

45.

$a_i \backslash b_j$	45	90	65	110
80	7	6	5	8
100	8	8	9	7
60	12	10	9	8
70	8	9	6	10

46.

$a_i \backslash b_j$	30	70	50	70
20	8	8	6	4
90	3	10	11	6
65	4	6	9	4
45	9	7	8	7

47.

$a_i \backslash b_j$	90	75	50	10
40	5	5	4	6
45	3	7	9	6
80	7	8	5	9
60	6	4	6	8

48.

$a_i \backslash b_j$	40	100	40	130
95	8	6	4	9
70	7	4	6	6
60	12	5	5	11
85	11	12	9	10

49.

$a_i \backslash b_j$	20	45	95	90
70	6	7	4	8
80	6	4	5	3
40	9	8	6	10
60	7	4	3	5

50.

$a_i \backslash b_j$	50	100	60	60
40	8	3	4	9
80	8	7	5	6
120	10	12	9	9
30	8	11	5	10

51. $$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= -3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5. \end{aligned}$$

52. $$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 5, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= -2. \end{aligned}$$

53. $$\begin{aligned} 4x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= -2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 9. \end{aligned}$$

54. $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 &= -8, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 &= 3. \end{aligned}$$

55. $$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 &= -5, \\ 5x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 5. \end{aligned}$$

56. $$\begin{aligned} 6x_1 - 5x_2 - 3x_3 - x_4 &= -3, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 10. \end{aligned}$$

57. $\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 7, \\ 6x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 2x_4 &= -4. \end{aligned}$

58. $\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 4x_4 &= -2, \\ 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 11. \end{aligned}$

59. $\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 8, \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 2x_4 &= -5. \end{aligned}$

60. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 9, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 6x_4 &= -3. \end{aligned}$

Серия С

1. В задачах 1 - 10 систему линейных уравнений представить в матричной форме $A \cdot X = B$ и решить ее с помощью обратной матрицы A^{-1}.

2. В задачах 11 - 20 для трех отраслей даны матрица A коэффициентов прямых затрат, столбец Y объемов конечных продуктов, столбец V удельных прибавленных стоимостей для трех отраслей. Найти объемы производств, матрицу косвенных затрат 1-го порядка и равновесные цены продукции отраслей. Составить межотраслевой баланс.

3. В задачах 21 - 30 нужно выяснить, является ли система векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ линейно зависимой. Если это так, то с какими коэффициентами эти векторы образуют нулевую линейную комбинацию?

4. В задачах 31 - 40 следует решить задачу об использовании сырья геометрическим способом и симплекс-методом. Найти оптимальное решение двойственной задачи, дать экономическую интерпретацию.

5. В задачах 41 - 50 решить транспортную задачу распределительным методом, оценивая свободные клетки по методу потенциалов.

6. В задачах 51 - 60 сформулировать задачу, двойственную к данной, решить ее геометрическим способом и найти оптимальное решение исходной задачи. Также решить данную задачу симплекс-методом.

Варианты задач серии С

1. $\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= -2, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 9, \\ x_1 + 2x_2 &= -5. \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 9, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= -13, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= -14. \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4, \\ 3x_2 + 4x_3 &= 9, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1. \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 13, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= -7, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 7. \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -4, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 &= 6, \\ 5x_1 - 5x_2 - 3x_3 &= 7. \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - x_3 &= 9, \\ -4x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 1, \\ -5x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= -1. \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 4, \\ 3x_1 + 4x_3 &= 17, \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -3. \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 5x_3 &= 4, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 &= 26, \\ -2x_1 + x_2 &= -12. \end{aligned}$

9. $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= -1, \\ 4x_1 \qquad - 2x_3 &= -10. \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 13, \\ 2x_1 \qquad - x_3 &= 12, \\ 3x_1 - x_2 \qquad &= 12. \end{aligned}$$

11. $$A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0 & 0,4 \\ 0,1 & 0,5 & 0,3 \\ 0,3 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 23 \\ 46 \\ 46 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 3,21 \\ 0,86 \\ 1,10 \end{bmatrix}.$$

12. $$A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 28 \\ 56 \\ 84 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1,69 \\ 0,64 \\ 2,71 \end{bmatrix}.$$

13. $$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 63 \\ 21 \\ 42 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0,19 \\ 1,08 \\ 2,86 \end{bmatrix}.$$

14. $$A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 28 \\ 28 \\ 70 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0,32 \\ 1,56 \\ 1,64 \end{bmatrix}.$$

15. $$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 45 \\ 30 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 3,16 \\ 1,46 \\ 0,31 \end{bmatrix}.$$

16. $$A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 26 \\ 52 \\ 26 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 2,44 \\ 0,22 \\ 0,72 \end{bmatrix}.$$

17. $$A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 24 \\ 72 \\ 48 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0,66 \\ 3,72 \\ 2,18 \end{bmatrix}.$$

18. $$A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 19 \\ 38 \\ 19 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1,12 \\ 1,86 \\ 0,23 \end{bmatrix}.$$

19. $$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,1 & 0,4 & 0 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 50 \\ 25 \\ 50 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 3,88 \\ 0,88 \\ 0,26 \end{bmatrix}.$$

20. $$A = \begin{bmatrix} 0 & 0,4 & 0,4 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 66 \\ 99 \\ 66 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0,61 \\ 0,41 \\ 1,62 \end{bmatrix}.$$

21. $\bar{a}_1 = (4, -2, 4, 3)$,
$\bar{a}_2 = (1, 2, 6, -3)$,
$\bar{a}_3 = (1, -2, -2, 3)$.

22. $\bar{a}_1 = (2, 6, 1, 3)$,
$\bar{a}_2 = (1, 3, -2, -1)$,
$\bar{a}_3 = (1, 3, 2, 3)$.

23. $\bar{a}_1 = (2, -3, 4, 1)$,
$\bar{a}_2 = (1, -2, 5, 4)$,
$\bar{a}_3 = (4, -5, 2, -5)$.

24. $\bar{a}_1 = (1, -2, 4, -3)$,
$\bar{a}_2 = (2, -3, 4, -5)$,
$\bar{a}_3 = (2, -1, -4, -3)$.

25. $\bar{a}_1 = (3, -1, 3, -5)$,
$\bar{a}_2 = (1, 3, -1, 1)$,
$\bar{a}_3 = (7, 6, 2, -5)$.

26. $\bar{a}_1 = (3, -3, -1, -5)$,
$\bar{a}_2 = (1, 3, -3, 1)$,
$\bar{a}_3 = (1, -6, 3, -5)$.

27. $\bar{a}_1 = (5, 3, -3, 7)$,
$\bar{a}_2 = (1, 3, 5, -9)$,
$\bar{a}_3 = (2, 3, 3, -5)$.

28. $\bar{a}_1 = (3, 1, 5, -2)$,
$\bar{a}_2 = (1, 5, 3, 2)$,
$\bar{a}_3 = (6, -5, 8, -8)$,

29. $\bar{a}_1 = (4, 3, -2, 1)$,
$\bar{a}_2 = (8, 5, -7, 3)$,
$\bar{a}_3 = (4, 5, 4, -1)$,

30. $\bar{a}_1 = (3, 2, -4, 7)$,
$\bar{a}_2 = (4, 2, -2, 2)$,
$\bar{a}_3 = (7, 3, -1, -2)$.

31.

b_1	P_1	P_2
49	4	3
70	3	7
33	3	1
c_j	3	5

32.

b_1	P_1	P_2
75	5	3
83	4	7
50	1	5
c_j	4	5

33.

b_1	P_1	P_2
65	5	2
91	6	5
39	1	3
c_j	3	4

34.

b_1	P_1	P_2
65	5	2
60	2	5
85	5	6
c_j	4	3

35.

b_1	P_1	P_2
91	7	2
68	3	5
66	1	6
c_j	4	3

36.

b_1	P_1	P_2
60	5	2
65	4	5
55	2	5
c_j	4	3

37.

b_1	P_1	P_2
66	5	4
33	1	3
24	2	1
c_j	3	4

38.

b_1	P_1	P_2
61	5	4
40	4	1
55	2	5
c_j	3	4

39.

b_1	P_1	P_2
50	1	5
55	2	5
85	5	2
c_j	3	4

40.

b_1	P_1	P_2
55	5	2
60	1	6
51	4	3
c_j	3	5

41.

a_i \ b_j	10	40	50	50
30	2	4	6	3
60	7	1	2	8
45	9	3	2	3
15	6	2	4	7

42.

a_i \ b_j	40	10	25	45
20	5	4	2	9
60	4	8	4	5
30	5	1	2	4
10	3	4	7	8

43.

a_i \ b_j	20	45	35	45
40	6	7	9	8
80	3	8	5	1
10	2	4	3	4
15	1	3	5	6

44.

a_i \ b_j	20	45	55	50
25	9	8	3	1
60	4	1	5	7
75	6	5	3	2
10	8	7	3	4

45.

a_i \ b_j	45	40	15	50
80	5	6	3	4
20	2	1	7	8
20	2	5	2	6
30	5	1	4	9

46.

a_i \ b_j	40	25	65	30
20	3	2	5	8
10	5	7	9	2
30	1	8	6	4
100	2	4	5	1

47.

$a_i \backslash b_j$	100	40	70	30
80	9	3	2	2
120	5	6	4	3
20	4	8	1	4
20	1	7	5	6

48.

$a_i \backslash b_j$	50	70	15	60
25	6	4	2	4
35	7	6	8	3
90	1	5	9	7
45	4	3	7	8

49.

$a_i \backslash b_j$	20	60	45	20
15	4	8	7	9
15	1	6	9	3
40	5	3	5	4
75	2	2	1	7

50.

$a_i \backslash b_j$	25	40	25	40
30	4	8	6	9
60	1	5	6	7
35	2	1	4	5
5	2	6	3	8

51.
$$-2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 2,$$
$$5x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 1,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$$
$$z = 30x_1 + 34x_2 + 18x_3 \ (\min).$$

52.
$$-3x_1 + x_2 + x_3 \geq 1,$$
$$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \geq 1,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$$
$$z = 4x_1 + 22x_2 + 4x_3 \ (\min).$$

53.
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 2,$$
$$5x_1 + x_2 - x_3 \geq 3,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$$
$$z = 45x_1 + 22x_2 + 2x_3 \ (\min).$$

54.
$$3x_1 - 4x_2 + 2x_3 \geq 3,$$
$$-x_1 + 7x_2 + 3x_3 \geq 2,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$$
$$z = 36x_1 + 21x_2 + 35x_3 \ (\min).$$

55.
$$-4x_1 + 9x_2 + x_3 \geq 2,$$
$$x_1 + 5x_2 - 2x_3 \geq 5,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$$
$$z = 2x_1 + 68x_2 + 5x_3 \ (\min)$$

56.
$$-5x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 2,$$
$$2x_1 + x_2 - 5x_3 \geq 1,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$$
$$z = 14x_1 + 14x_2 + 10x_3 \ (\min).$$

57.
$$x_1 + 5x_2 + 5x_3 \geq 2,$$
$$4x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 3,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$$
$$z = 44x_1 + 50x_2 + 25x_3 \ (\min).$$

58.
$$-x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 3,$$
$$4x_1 + 4x_2 - 3x_3 \geq 1,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$$
$$z = 24x_1 + 48x_2 + 2x_3 \ (\min).$$

59.
$$2x_1 + x_2 - x_3 \geq 4,$$
$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 5,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$$
$$z = 12x_1 + 16x_2 + 8x_3 \ (\min).$$

60.
$$-7x_1 + 8x_2 + x_3 \geq 5,$$
$$x_1 + 9x_2 - 5x_3 \geq 1,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$$
$$z = 2x_1 + 89x_2 + 5x_3 \ (\min).$$

Библиографический список

1. Кузнецов В.Г. Основы линейной алгебры и линейного программирования. Пермь, 1971.

2. Солодовников А.С. Введение в линейную алгебру и линейное программирование. М.: Просвещение, 1966.

3. Карпелевич Ф.И., Садовский Л.Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. М.: Физматгиз, 1963.

4. Калихман И.Л. Линейная алгебра и программирование. М.: Высшая школа, 1967.

5. Багриновский К.А., Бусыгин В.П. Математика плановых решений. М.: Наука, 1980.

6. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. М.: Высшая школа, 1976.

7. Ромакин М.И. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. М.: Высшая школа, 1963.

8. Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. Часть II. М.: Высшая школа, 1982.

9. Карасев А.И., Кремер Н.Ш., Савельева Т.И. Математические методы и модели в планировании. М.: Экономика, 1987.

10. Гасс С. Линейное программирование (методы и приложения). М.: Физматгиз. 1961.

11. Гершгорн А.С. Математическое программирование и его применение в экономических расчетах. М.: Экономика, 1968.

12. Ляшенко И.Н., Карагодова Е.А., Черникова Н.В., Шор Н.З. Линейное и нелинейное программирование. Киев: Вища школа, 1975.

13. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. М.: Экономика, 1967.

14. Математическая экономика на персональном компьютере / Под ред. М.Кубонива. М.: Финансы и статистика, 1991.

15. Кузнецов А.В., Холод Н.И., Костевич Л.С. Руководство к решению задач по математическому программированию. Минск: Вышейшая школа, 1978.

16. Математические методы анализа экономики/ Под ред. А.Я.Боярского. М.: Изд-во МГУ, 1983.

17. Канторович Л.В., Горстко А.Б. Оптимальные решения в экономике. М.: Наука, 1972.

Оглавление