

А. С. УРМАЕВ

ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ НА АНАЛОГОВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ

Под редакцией С. В. ЕМЕЛЬЯНОВА

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
высших технических учебных заведений*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1974

Основы моделирования на аналоговых вычислительных машинах. А. С. Урмаев. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука». М., 1974, 320 стр.

В учебном пособии в систематическом изложении даны основы программирования аналоговых вычислительных машин (АВМ) для решения инженерно-технических задач. В книге изложены принципы функционирования АВМ и основных операционных блоков; приведены общие методы программирования АВМ, а также рассмотрены методы решения конкретных классов инженерных задач ряда инженерно-технических дисциплин: теоретической механики, физики, электроники, физической химии, сопротивления материалов, линейного программирования и ряда других. Материал учебного пособия иллюстрирован большим числом примеров и содержит значительное количество задач для самостоятельного решения.

Учебное пособие предназначено для студентов всех специальностей технических вузов и может быть использовано преподавателями инженерных и специальных кафедр при подготовке лекционной и практической части курсов, ориентированных на использование АВМ. Книга также может быть полезной инженерно-техническим работникам, использующим в своей деятельности АВМ.

Книга содержит 179 рис., библи. 35 назв.

© Издательство «Наука», 1974.

У 20204—095 24-74
053(02)-74

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора	7
Предисловие автора	9
Введение	11

ГЛАВА 1. АВМ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

§ 1. Введение	13
§ 2. Два типа АВМ	14
§ 3. Вопросы	18

ГЛАВА 2. СТРУКТУРНЫЕ АНАЛОГОВЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

§ 1. Состав и назначение основных частей АВМ	19
§ 2. Операционный усилитель (ОУ)	22
§ 3. Блок суммирования (сумматор)	24
§ 4. Блоки интегрирования (интегратор и интегросумматор)	29
§ 5. Примеры математического описания структурных схем АВМ, состоящих из линейных блоков	33
§ 6. Блок (схема) программного управления	39
§ 7. Блоки нелинейных функций (функциональные преобразователи)	42
§ 8. Блок перемножения	43
§ 9. Обращение функций, выполнение операций деления и извлечения корня	44
§ 10. Некоторые диодные блоки АВМ	48
§ 11. Блоки дифференцирования	53
§ 12. Задачи и вопросы	54

ГЛАВА 3. ТОЧНОСТЬ АВМ

§ 1. Источники ошибок АВМ	57
§ 2. Ошибки операционных блоков	60
§ 3. Добротность АВМ	66
§ 4. Вопросы	67

ГЛАВА 4. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ АВМ

§ 1. Язык и этапы программирования	68
§ 2. Масштабирование зависимых переменных	78
§ 3. Масштабирование независимой переменной	86
§ 4. Вопросы	88

ГЛАВА 5. ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ НА АВМ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Вычислительные возможности	89
§ 2. Устойчивость решений дифференциальных уравнений	91
§ 3. Общий метод программирования АВМ для уравнений, разрешенных относительно старшей производной	97
§ 4. Программирование АВМ для уравнений, не разрешенных относительно старшей производной	102
§ 5. Программирование АВМ для уравнений, содержащих в правой части производные	105
§ 6. Чувствительность решений к изменению параметров	107
§ 7. Формы получения решений дифференциальных уравнений на АВМ	110
§ 8. Масштабирование зависимых переменных по методу масштабных задач. Пример	112
§ 9. Вопросы и задачи	118

ГЛАВА 6. РЕДУКЦИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ К ЗАДАЧЕ КОШИ

§ 1. Краевые задачи	122
§ 2. Методы проб	122
§ 3. Линейные краевые задачи (метод комбинаций)	125
§ 4. Вопросы	127

ГЛАВА 7. ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ НА АВМ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

§ 1. Уравнения в частных производных	128
§ 2. Выражения производных через значения функции	130
§ 3. Аппроксимация уравнения в частных производных системой обыкновенных дифференциальных уравнений	135
§ 4. Пример программирования АВМ для исследования нестационарного распределения температуры	137
§ 5. Интерполирование при воспроизведении решений уравнений в частных производных	139
§ 6. Задачи	140

ГЛАВА 8. ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ НА АВМ ЗАДАНЫХ ФУНКЦИЙ НЕЗАВИСИМОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Задачи, связанные с воспроизведением функций	143
§ 2. Воспроизведение многократно дифференцируемых функций, заданных аналитически	144
§ 3. Воспроизведение функций, заданных таблично, графически или сложным аналитическим выражением	150
§ 4. Воспроизведение разрывных и кусочно-дифференцируемых функций	152
§ 5. Пример составления полной программы АВМ для воспроизведения заданной функции	161
§ 6. Исследование заданных функций с помощью АВМ	164
§ 7. Задачи	166

Г Л А В А 9. ЭЛЕМЕНТЫ НЕПРЕРЫВНОЙ ЛОГИКИ

§ 1. Булева алгебра выбора	173
§ 2. Условные операторы присваивания и их реализация на АВМ	178
§ 3. Некоторые применения булевой алгебры выбора	182
§ 4. Задачи	188

Г Л А В А 10. МЕТОД ГРАДИЕНТА И НЕКОТОРЫЕ СВЯЗАННЫЕ С НИМ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА АВМ

§ 1. Дифференциальные уравнения наискорейшего спуска и подъема	189
§ 2. Метод неявных функций	196
§ 3. Решения систем уравнений	202
§ 4. Определение экстремумов функционалов при ограничениях	212
§ 5. Задачи	221

Г Л А В А 11. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 1. Движение материальной точки, брошенной под углом к горизонту в сопротивляющейся среде	223
§ 2. Встреча снаряда с подвижной целью	226
§ 3. Круговой математический маятник	229
§ 4. Движение материальной точки по кеплерову эллипсу	233

Г Л А В А 12. ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ

§ 1. Дифференциальные уравнения движения	236
§ 2. Структурные схемы АВМ, воспроизводящие одномерное движение	238
§ 3. Пример программирования АВМ для исследования движения частицы	239
§ 4. Задачи	240

Г Л А В А 13. КИНЕТИКА ГОМОГЕННЫХ ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ

§ 1. Реакции первого порядка	241
§ 2. Сложные реакции	244
§ 3. Контроль функционирования АВМ. Масштабирование	246
§ 4. Задачи	250

Г Л А В А 14. ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕМАТИКИ КРИВОШИПНО-ШАТУННОГО МЕХАНИЗМА

§ 1. Основные понятия кинематики механизмов	251
§ 2. Составление программ для АВМ	252
§ 3. Задачи	255

Г Л А В А 15. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

§ 1. Основные законы теории электрических цепей	256
§ 2. Линейные цепи	258
§ 3. Параметрические цепи	261
§ 4. Нелинейные цепи	263

Г Л А В А 16. РЕШЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ИГР ПОРЯДКА $2 \times m$

§ 1. Основные понятия теории игр	264
§ 2. Игры порядка $2 \times m$ и их решение на АВМ	267
§ 3. Задачи	272

Г Л А В А 17. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКОГО ИЗГИБА БАЛОК

§ 1. Дифференциальные уравнения плоского изгиба	273
§ 2. Структурные схемы АВМ, воспроизводящие плоский изгиб	277
§ 3. Масштабирование переменных	280
§ 4. Редукция краевых задач плоского изгиба к задачам Коши	281
§ 5. Эпюры силы и моментов — гладкие функции	283
§ 6. Эпюры силы и моментов — разрывные функции	291

Г Л А В А 18. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 1. Постановка задач линейного программирования	298
§ 2. Градиентные методы решения	299
§ 3. Пример	301
§ 4. Задачи	303

Приложение. Краткое описание аналоговой вычислительной машины типа МН-7	304
Литература	315
Предметный указатель	317

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Среди разнообразных тенденций применения вычислительной техники в высшей школе теперь все более доминирует одна. Она связана с моделированием на ЭВМ процессов, изучаемых студентами в инженерных и специальных дисциплинах. Облекаясь в форму непрерывного использования ЭВМ на всех стадиях обучения, эта тенденция — не дань моде, а насущная потребность сегодняшнего дня. Умение работать на ЭВМ — элемент технической грамотности современного инженера. Однако успешное решение проблемы внедрения ЭВМ во вузе требует глубокого переосмысливания методики, содержания и организации всего учебного процесса в целом и ни в коей мере не ограничивается только созданием достаточно развитого парка технических средств ЭВМ. Осознанное применение ЭВМ студентами при исследовании и проектировании в инженерных и специальных дисциплинах возможно лишь когда курсы по программированию предшествуют этим дисциплинам, а само преподавание программно и методически ориентировано на использование ЭВМ как в практическом, так и в теоретическом плане. Особенно эффективно применение в учебном процессе аналоговой вычислительной техники для моделирования процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Такое моделирование на АВМ позволяет студенту исследовать сущность изучаемого явления во всей его полноте и математической строгости и вырабатывает у учащихся прочные навыки и современную методологию математического моделирования производственных процессов.

Настоящая книга является одним из учебных пособий, программно и методически обеспечивающих непрерывное применение ЭВМ при подготовке специалистов широкого профиля в области управления.

В отличие от традиционного построения руководств по моделированию на АВМ, здесь для понимания учебного материала не требуется предварительного знакомства читателя с курсами электротехники, электроники и теории автоматического регулирования. Все изложение построено в основном на базе курса математики обычного вуза. Эта методическая переориентация в выборе нового, математического, основания для построения курса моделирования соответствует современному уровню развития вычислительных средств. Для современного

использования ЭВМ определяющим является именно математический аспект организации работы машины и методов решения на ней задач, а не электронно-физический субстрат вычислительной системы.

По содержанию в книге можно выделить три части. Первая часть (гл. 1—3) касается принципиальных вопросов функционирования структурных АВМ. Вторая часть (гл. 4—10) посвящена методам программирования работы АВМ. Как известно, классом задач, наиболее успешно реализуемых на АВМ, являются обыкновенные дифференциальные уравнения, заданные в форме задачи Коши. Поэтому возможность эффективного использования АВМ для решения какой-либо задачи иного класса в значительной мере зависит от удачно найденного для нее математического эквивалента в форме задачи Коши. Изложение методов такой математической «перепостановки» задач представляет собой основное содержание второй части. Третья часть книги (гл. 11—18) — более прикладная. В ней получают дальнейшее развитие методы из второй части применительно к моделированию конкретных процессов, изучаемых в теоретической механике, теоретической физике, электротехнике, физической химии, теории машин и механизмов, сопротивлении материалов и в ряде других дисциплин. Эта структура пособия позволяет осветить с единых методических позиций вопросы моделирования применительно к большинству инженерных дисциплин вуза.

Изложенные в книге некоторые методы и частные методики моделирования отдельных процессов в литературе освещаются впервые. Они в значительной мере явились результатом работы научно-методического семинара, проводимого автором в течение последних лет в МИСиС (Московский институт стали и сплавов) для профессорско-преподавательского состава инженерных и специальных кафедр.

Выход в свет предлагаемого учебного пособия позволит в определенной степени сократить существующий разрыв между традиционными курсами математики и программирования ЭВМ, с одной стороны, и инженерными дисциплинами вуза — с другой стороны.

Задуманная как учебник по курсу «Программирование АВМ» для студентов «кибернетических» специальностей, эта книга может использоваться студентами всех специальностей технических вузов, начиная с третьего — четвертого семестров, аспирантами, инженерами и преподавателями вузов.

С. В. Емельянов

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Предлагаемый вниманию читателя курс моделирования на АВМ по характеру изложения ориентирован на студентов первого — второго курсов технических вузов.

В полном объеме, кроме прикладных глав 11—13, материал книги отражает программу годового курса, читаемого в течение ряда последних лет в Московском институте стали и сплавов будущим специалистам в области управления.

В сокращенном объеме (§§ 1, 2 гл. 1; §§ 1—9 гл. 2; §§ 1, 2*), 3 гл. 3; §§ 1*, 2*, 3* гл. 4; §§ 1, 3, 4, 7*, 8 гл. 5; §§ 1, 2 гл. 6; §§ 1, 2, 5 гл. 8) материал пособия соответствует семестровому курсу, читаемому в МИСиС с 1969 г. студентам всех специальностей на втором или третьем семестре. По своему целевому назначению такой курс должен дать студентам теоретические основы для понимания основных идей, принципов и методов, обеспечивающих последующее использование АВМ при изучении инженерных и специальных дисциплин.

Эта направленность пособия соответствует наиболее эффективной сфере применения АВМ: воспроизведению решений обыкновенных дифференциальных уравнений, являющихся основным математическим аппаратом исследования в большинстве инженерных дисциплин.

В связи с отсутствием в учебной литературе методов моделирования на АВМ инженерных задач автор включил дополнительные главы с 11 по 18, посвященные этим вопросам. Материалы дополнительных глав можно использовать для лабораторного практикума как при изучении курса моделирования, так и при изучении соответствующих инженерных дисциплин.

Овладение курсом моделирования на АВМ требует самостоятельного решения задач на машине. Поэтому в пособии содержится значительное число задач, упражнений и подробно разобранных примеров.

В примерах разработана коммутационных схем ориентированная на конкретную АВМ, в качестве которой выбрана отечественная машина типа МН-7, получившая массовое распространение в высшей школе.

*) Содержание параграфов, отмеченных звездочкой, в семестровом курсе излагается частично.

Настоящее пособие было создано автором в Московском институте стали и сплавов в коллективе, возглавляемом чл.-корр. АН СССР С. В. Емельяновым, которому автор многим обязан за заботу, внимание и добрые советы. Они сыграли определяющую роль как при разработке настоящего пособия, так и в выборе его основных программно-методических концепций.

Автор выражает глубокую признательность своим коллегам по педагогической деятельности И. Е. Базилевичу, Э. М. Браверману, Л. З. Румшискому за советы и замечания по материалам рукописи пособия.

А. С. Урмаев

ВВЕДЕНИЕ

Электронные вычислительные машины принято делить на два класса в зависимости от способа представления перерабатываемой информации и в зависимости от способа переработки информации.

Машины одного типа получили название «цифровые вычислительные машины» (ЦВМ). В них информация представляется дискретно в виде чисел, заданных последовательностью цифр. При этом в понятие «число» вкладывается достаточно широкий смысл. В роли чисел в ЦВМ могут выступать и слова какого-либо языка, а в роли цифр — буквы (символы) какого-либо алфавита. Так же широко понимается и сам процесс вычисления на ЦВМ. Вычисление — это не только выполнение арифметических операций, а вообще любая обработка исходных данных. В этом смысле к вычислениям относят и работу ЦВМ по редактированию и переработке каких-либо текстов, например, автоматический перевод с одного языка на другой.

Информация в ЦВМ перерабатывается с помощью программы. Программный способ обуславливает принципиальную универсальность ЦВМ. С помощью ЦВМ автоматизируется любая область человеческой деятельности, основанная на обработке информации. ЦВМ способны решить любую задачу, для которой существует программа ее решения. Всякая программа представляет конечную последовательность арифметических и логических операций, последовательное выполнение которых приводит к получению требуемых результатов для заданной совокупности исходных данных. При переходе от решения одной задачи к решению другой в ЦВМ необходимо ввести лишь новую программу и новые исходные данные. При этом, вообще говоря, не возникает потребности вносить какие-либо изменения в работу отдельных устройств, образующих ЦВМ, или менять способ взаимодействия этих устройств. Структура ЦВМ (способ соединения ее частей) остается неизменной и не зависит от решаемой задачи.

Машины другого типа называют «аналоговые вычислительные машины» (АВМ). В этих машинах перерабатываемая информация представляется в непрерывной форме в виде меняющихся во времени физических величин (аналоговых величин). Конструктивно АВМ состоит из отдельных частей, называемых

операционными блоками. Каждый блок выполняет какую-либо одну математическую операцию. Для получения решения некоторой задачи на АВМ операционные блоки соединяют между собой в соответствии с формульной, аналитической зависимостью решаемой задачи. Поэтому при переходе от решения одной задачи к решению другой разрушаются ранее сделанные соединения между блоками и устанавливаются новые. Таким образом, в противоположность ЦВМ структура (блоки и способы их соединения) АВМ определяется решаемой задачей. В этом смысле АВМ называют *принципиально специализированными* вычислительными машинами, а используемый в них способ переработки информации — *структурным*. Информация в ЦВМ обрабатывается последовательно, а в АВМ — параллельно.

Сфера применения АВМ менее широкая, чем ЦВМ. Наибольший эффект дает использование АВМ для воспроизведения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Легкость и простота получения решений этих уравнений с помощью АВМ привели в последнее время даже к созданию особого, нового типа *гибридных, аналого-цифровых* вычислительных машин, сочетающих в себе достоинства обоих классов вычислительных машин.

Первые сведения об использовании для счета аналоговых приспособлений относятся к IV тысячелетию до н. э. и связаны с эпохой шумерийско-аккадских рабовладельческих государств Месопотамии. Вавилоняне, более поздние жители Месопотамии, знали подобие и применяли в землемерном деле аналоговые приспособления, использующие свойство сторон прямоугольного треугольника. Лишь спустя более тысячи лет это свойство было доказано Пифагором.

В более поздний период в 80 г. до н. э. греками был построен планетарий с системой аналоговых вычислительных приспособлений, построенных на базе модели солнечной системы, созданной Клавдием Птолемеем.

АВМ в виде интегрирующего устройства впервые были построены и описаны в 1876 г. братьями Дж. и У. Томпсон. Независимо от них в 1903 г. академиком Крыловым и в 1931 г. американцем Бушем были построены механические интегрирующие устройства — дифференциальные анализаторы.

Появление современных АВМ обязано успехам в развитии радиоэлектроники и связано с изобретением и усовершенствованием в 1950 г. усилителя постоянного тока.

АВМ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

§ 1. Введение

Моделирование есть особая форма эксперимента. В обычном эксперименте средства экспериментального исследования взаимодействуют непосредственно с самим объектом исследования. При моделировании такого прямого контакта нет. Здесь экспериментируют не с самим объектом, а с его заменителем, который называют *моделью*. Сам же объект исследования принято называть *оригиналом*. Решение математических и инженерных задач на АВМ сводится к эксперименту с некоторой физической системой, которая сознательно построена таким образом, что ее математическое описание одинаково с задачей, подлежащей решению. В этом смысле решение задач на АВМ называют моделированием, а саму аналоговую вычислительную машину называют моделью. Возможность создания таких моделей определяется сходством математического описания явлений, различных по своей физической сущности. Приведем несколько примеров.

В механике известен закон: «Изменение кинетической энергии ($T = \frac{mv^2}{2}$) твердого тела равно работе внешних сил, приложенных к телу». Применительно к силе трения F_{τ} , препятствующей движению тела, закон выражается уравнением

$$F_{\tau} = - \frac{dT}{dx},$$

где x — перемещение.

В физике в разделе «Теплота» изучаются явления, связанные с переносом тепла, иначе говоря, с тепловыми потоками. Тепловой поток g_{τ} в направлении x связан с изменением температуры T в этом направлении и описывается законом Фурье:

$$g_{\tau} = - \lambda \frac{dT}{dx},$$

где λ — коэффициент теплопроводности.

В разделе «Электричество» изучается дифференциальный закон Ома, который связывает перенос количества электричества в единицу времени (ток i) через проводник, имеющий погонное сопротивление ρ , с изменением величины падения напряжения

u по длине проводника x :

$$i = - \frac{1}{\rho} \frac{du}{dx}.$$

В физической химии в разделе «Кинетика» один из основных законов — закон Фика, связывающий перенос количества вещества (поток вещества g_n) в некотором направлении x с изменением концентрации C вещества в этом направлении:

$$g_n = - D \frac{dC}{dx},$$

где D — некоторая постоянная.

Во всех этих физических законах легко замечается одинаковая форма математических выражений, тогда как физическая сущность процессов различна. Такие одинаковые по форме математические соотношения называют *изоморфными*. Они отличаются лишь материальным, физическим содержанием входящих в них символов.

Математический изоморфизм различных физических систем позволяет одни системы исследовать с помощью других. Так можно в лабораторных условиях изучать тепловые процессы на механической модели. Целесообразность построения именно механической модели может диктоваться целым рядом обстоятельств, таких как простота и относительная дешевизна модели, удобство постановки различных экспериментов, соображениями техники безопасности и т. д. Но важно то, что механическая модель должна быть достаточно представительным заменителем оригинала с тем, чтобы наблюдения и выводы о поведении механической модели позволили бы качественно и количественно охарактеризовать процессы, протекающие в тепловой системе — оригинале.

На этом принципе математического изоморфизма основана работа аналоговых вычислительных машин.

Вообще *аналоговой вычислительной машиной* можно называть любую физическую систему, в которой между непрерывно изменяющимися физическими величинами существуют определенные математические соотношения, аналогичные зависимостям исследуемой физической системы или решаемой математической задачи.

§ 2. Два типа АВМ

В процессе своей исторической эволюции к настоящему моменту времени возникло два типа аналоговых вычислительных машин. Предмет моделирования в них различен. Первые моделируют по операциям математические уравнения, подлежащие решению. Вторые моделируют исследуемую физическую систему

по ее отдельным составным частям. Поэтому часто еще говорят, что на машинах первой группы проводят *математическое моделирование*, а на машинах второй группы — *физическое моделирование*.

АВМ первой группы получили название *структурные АВМ* или *счетно-решающие устройства*. Они конструктивно состоят из отдельных *операционных блоков*, каждый из которых воспроизводит какую-либо одну математическую операцию: сложение, умножение, интегрирование, дифференцирование, преобразование функций и т. д., другими словами, операционные блоки структурной АВМ изоморфны математическим операциям. В соответствии с видом решаемых уравнений из таких блоков создается схема АВМ, почленно отображающая математические операции решаемого уравнения. На рис. 1.1, а) показана схема структурной АВМ, содержащая два интегратора. Каждый интегратор функционирует так, что при поступлении на его вход некоторой физической переменной на его выходе вырабатывается физическая величина, представляющая собой интеграл от входной переменной по независимой переменной, роль которой в АВМ разных типов выполняют различные физические величины. В электронных АВМ *независимой переменной* является физическая переменная *время*. Задание начального значения выходной переменной осуществляется заранее до начала интегрирования, и это отмечено на схеме интегратора входящей стрелкой с соответствующей надписью.

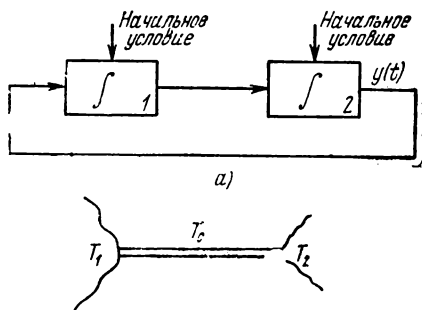


Рис. 1.1.

Обозначим выходную переменную интегратора 2 через $y(t)$ и покажем, что схема рис. 1.1, а) воспроизводит решение дифференциального уравнения $\frac{d^2y}{dt^2} = y$.

Действительно, если на выходе интегратора 2 вырабатывается переменная $y(t)$, то на его входе (с выхода интегратора 1) должна действовать переменная $\frac{dy}{dt}$. Но поскольку эта переменная сама является выходом интегратора 1, на входе интегратора 1 должна действовать производная по времени от $\frac{dy}{dt}$, т. е. $\frac{d^2y}{dt^2}$. Факт существования связи с выхода интегратора 2 на вход интегратора 1 математически эквивалентен

равенству $\frac{d^2y}{dt^2} = y$. Дифференциальные уравнения такого типа описывают стационарное распределение температуры по длине однородного стержня, помещенного в некоторую среду с постоянной температурой T_0 (рис. 1.1, б)). На концах стержня поддерживается фиксированная температура T_1 и T_2 . Общее решение уравнения имеет вид $y(t) = A \operatorname{sh} t + B \operatorname{ch} t$, где A и B — постоянные, зависящие от заданных начальных или граничных условий.

АВМ второй группы получили название *модель-аналог*. Это устройства, воспроизводящие решение задачи в ее физической постановке, на основе метода аналогий.

В модель-аналоге при моделировании производится расчленение частей, образующих модель, не по отдельным математическим операциям, а по физическим элементам. При этом физические элементы модели математически изоморфны физическим элементам, которые образуют объект исследования.

На рис. 1.2, а) — в) изображена тепловая система и ее гидравлическая и электрическая модели-аналоги. Сопоставление этих моделей показывает, что аналогом температуры T в гидравлической модели является гидравлический напор H , а в электрической — электрическое напряжение U ; аналогом теплового сопротивления R_T является гидравлическое сопротивление соединительных трубок R_r и электрическое сопротивление резистора R_s .

Аналогом теплоемкости C_T является S — площадь горизонтального сечения сосудов, в электрической модели аналогом теплоемкости является электрическая емкость конденсаторов C_s .

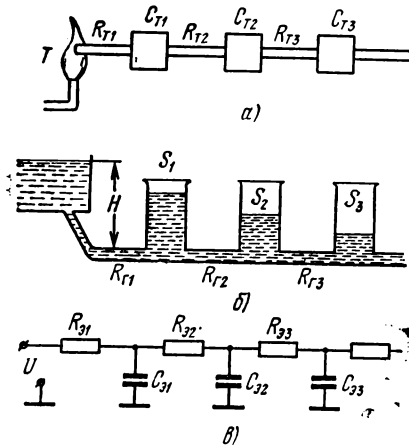


Рис. 1.2.

Показанные электрические и гидравлические модели-аналоги тепловой системы позволяют исследовать распределение в ней температуры. Если потребуется исследовать иную тепловую систему, например, с большим числом тепловых сопротивлений и теплоемкостей, то для этого достаточно увеличить количество сообщающихся сосудов или электрических цепочек $R_s C_s$. Такой простой переход от моделирования одного варианта тепловой системы к моделированию ее другого варианта внешне создаст впечатление решения задачи распределения тем-

пературы «без математики». Но это не так. По существу же здесь заранее доказан математический изоморфизм систем уже на уровне отдельных физических элементов и в неявном виде сформулированы правила такой компоновки модели-аналога из элементов, что математический изоморфизм распространяется и на всю модель в целом. Таким образом, сохраняется непосредственное соответствие между физическими элементами системы-оригинала и ее модели. Все подлежащие исследованию элементы физической системы представлены в модели соответствующими физическими элементами-аналогами.

При решении на структурной АВМ математических задач, описывающих поведение некоторой физической системы, обычно выбирается наиболее простая схема соединения операционных блоков, реализующая требуемые математические соотношения. Такая модель математической задачи экономно представляет поведение исходной физической системы в целом, однако в большинстве случаев уже не отражает непосредственного поведения каждого из элементов этой системы.

Структурные АВМ более универсальны. Модель-аналоги более специализированы, и их конструкции определяются специфическими особенностями физических систем, подлежащих исследованию.

Решению задач на структурной АВМ предшествует процесс анализа исходных математических данных задачи и выявления способа соединения отдельных операционных блоков АВМ. Этот процесс называют *программированием* АВМ. При программировании разрешаются две проблемы.

Первая — организационная — состоит в том, что совокупность блоков АВМ организуется в *вычислительную систему* путем установления *связей* между отдельными блоками. Наличие связи указывает на факт передачи результата математической операции с выхода одного операционного блока на входы других.

Вторая проблема программирования — представление исходных математических переменных физическими величинами, путем выбора соответствующих *масштабов*.

Результат программирования — *программа* — представляется в виде так называемой *структурной схемы*, на которой условными обозначениями показаны используемые операционные блоки, а в виде линий изображены связи между блоками.

Имеющиеся сходство решения математических задач на АВМ с экспериментом особенно сильно проявляется в способах получения результата. Решение задачи как результат работы АВМ сводится к измерению значений физических величин измерительными приборами; к регистрации изменения во времени физических величин с помощью записывающих приборов; к наблюдению

за изменением физических величин с помощью специальной осциллоскопической аппаратуры.

К настоящему моменту времени удобными для построения и решения задач оказались электронные АВМ, хотя исторически первыми были механические АВМ. Главные причины использования электронных АВМ определяются их высокой надежностью; быстротой решения задачи; наличием хорошо развитой электронной аппаратуры измерения, регистрации и визуального наблюдения.

В электронных структурах АВМ электрическое напряжение постоянного тока является физической величиной, представляющей в некотором масштабе математические переменные решаемой задачи. Поэтому электрическое напряжение в АВМ называют *машинной переменной*.

Связи между блоками в электронных АВМ реализуются посредством электрических проводников, по которым осуществляется передача электрического напряжения с выходов одних блоков на входы других.

§ 3. Вопросы

1. В чем состоит сущность математического изоморфизма физических законов?
2. Что общего между аналоговым способом решения задач на АВМ и экспериментом?
3. Какие из перечисленных приборов работают по аналоговому принципу действия: логарифмическая линейка, счетчик расхода электроэнергии, фотоэкспонометр?
4. Что общего и в чем различие между структурными АВМ и моделями-аналогами?
5. В чем смысл программирования АВМ?
6. Что такое машинная переменная и как она связана с математической переменной?

СТРУКТУРНЫЕ АНАЛОГОВЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

§ 1. Состав и назначение основных частей АВМ

Количество и типы имеющихся операционных блоков в АВМ характеризуют вычислительные возможности машины. Чем больше число блоков и чем разнообразнее их математические возможности, тем решение более сложных задач может произвести машина. Здесь сложность задачи понимается как число математических операций, необходимых для ее решения. В соответствии с этим принято классифицировать структурные АВМ по трем классам, в зависимости от числа операционных блоков:

- 1 класс — *малые* АВМ (до 20 блоков)
- 2 класс — *средние* АВМ (20—60 блоков)
- 3 класс — *большие* АВМ (свыше 60 блоков)

Кроме того, большие АВМ отличаются от других наличием развитых дополнительных устройств, облегчающих работу на машине. К ним относятся устройства автоматического цифрового программирования и контроля, системы автоматического измерения и регистрации напряжения в виде графопостроителей и цифрпечатающих устройств и т. д.

По типовому составу операционных блоков структурные АВМ можно разделить на *специализированные* и *неспециализированные (универсальные)*. Специализированные АВМ ориентированы на решение некоторого узкого класса задач. Состав операционных блоков специализированной АВМ по количеству и по типам блоков, а также по различным вспомогательным устройствам обеспечивает наиболее эффективное решение именно задач данного класса. Существуют АВМ, в которых специализация доведена до уровня одной задачи. Машина все время непрерывно решает одну и ту же задачу для различных исходных данных. В таких машинах коммутация (соединение) операционных блоков выполнена жестко раз и навсегда. Эти машины нашли широкое применение в различного рода системах автоматического управления объектами и процессами.

Качественно состав оборудования неспециализированных АВМ примерно одинаков. На рис. 2.1 изображена схема основных функциональных частей, образующих АВМ. Остановимся на назначении частей.

1. *Операционные блоки* предназначены для выполнения математических операций.

2. *Поле набора (коммутации)* обеспечивает организацию необходимых соединений между отдельными операционными блоками с помощью электрических проводников, заканчивающихся однопольными вилками. Эти проводники называют *коммутационными шнурами*. Шнуры своими вилками вставляются

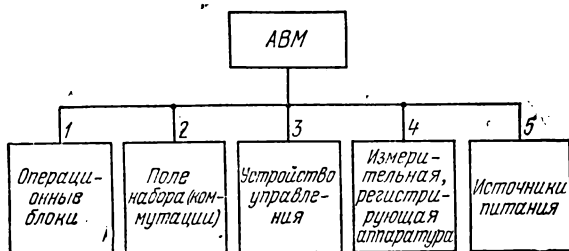


Рис. 2.1.

в специальные гнезда на наборном поле АВМ и тем самым осуществляют электрическое соединение отдельных блоков. Конструкция наборного поля в ряде АВМ съемная, что позволяет проводить необходимую коммутацию вне машины. Это обеспечивает эффективное использование АВМ путем совмещения во времени процесса решения одной задачи и набора другой. В большинстве малых АВМ коммутационное поле не является съемным.

3. *Устройство управления* обеспечивает взаимодействие во времени всех частей АВМ. Человек-оператор, работающий на АВМ, с помощью панели или пульта управления настраивает устройство управления на работу в одном из четырех режимов.

Первый режим — *подготовка*. В этом режиме производится установка требуемых характеристик и параметров операционных блоков.

Второй режим — *решения задачи*. Он может протекать как в виде однократного решения заданной задачи, так и в виде многократного автоматического повторения этого решения. Такое повторение называется периодизацией.

Третий режим — *автоматическое прерывание решения* по исполнении некоторого условия или по команде человека-оператора. Этот режим обычно используется для фиксации и измерения значений машинных переменных или для изменения коммутации между блоками АВМ.

Четвертый режим — *возврат машины в исходное состояние*. Потребность в этом возникает, когда необходимо повторить воспроизведение решения задачи при однократном режиме работы на АВМ.

4. *Измерительная и регистрирующая аппаратура* представляет собой стрелочные измерительные приборы типа вольтметров, цифровые вольтметры и печатающие вольтметры. Они служат для измерения машинных переменных при фиксации решения и для настройки операционных блоков при подготовке машины к решению задачи. Аппаратура визуального наблюдения в большинстве своем представляет собой многолучевые осциллоскопы с длительным послесвечением экрана, что позволяет одновременно наблюдать во времени достаточно большое число машинных переменных. Часто используются шлейфовые осциллографы для графической записи картины изменения машинных переменных на специальных светочувствительных бумажных лентах.

5. *Источники питания* служат для преобразования напряжений промышленной частоты в номиналы электрического напряжения, необходимые для работы всех частей машины. В АВМ к источникам питания предъявляются высокие требования по стабильности номиналов напряжения. Изменение номиналов при решении задач на АВМ воспринимается как изменение машинной переменной.

На рис. 2.2 представлен состав основных операционных блоков АВМ. Блоки суммирования (сумматоры) осуществляют

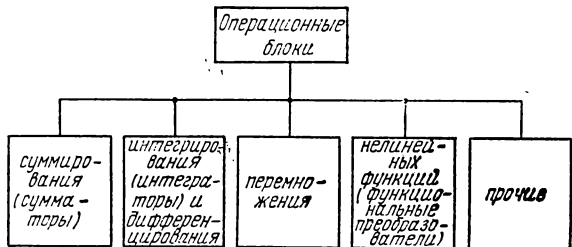


Рис. 2.2.

суммирование входных переменных. Блоки интегрирования (*интеграторы*) производят интегрирование входной переменной по переменной *время*, соответственно, блок *дифференцирования* — дифференцирует входную переменную. Блок *перемножения* воспроизводит произведение двух входных напряжений. Блоки *нелинейных функций (функциональные преобразователи)* осуществляют преобразование функций. Кроме того, имеется группа блоков, к которым относятся источники напряжений, блоки запаздывания, блоки программного управления, релейные блоки и т. д. Операционные блоки АВМ в свою очередь являются составными. Конструктивно они состоят из радиодеталей (резисторов, конденсаторов) и приборов (диодов, электромагнитных реле, усилителей электрических напряжений).

§ 2. Операционный усилитель (ОУ)

ОУ — составной элемент большинства операционных блоков. Усилитель производит усиление электрического напряжения.

В дальнейшем ОУ будем изображать схемой, представленной на рис. 2.3. Здесь e_g — входное напряжение, $u_{\text{вых}}$ — выходное напряжение, K — коэффициент усиления ОУ по напряжению. Операционный усилитель обладает рядом свойств, которые важно знать при работе на АВМ.

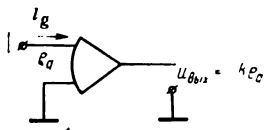


Рис. 2.3.

1. Коэффициент усиления ОУ по напряжению велик: $K \geq 4 \cdot 10^4$, а в некоторых высококачественных АВМ используются усилители с коэффициентом усиления до 10^8 .

2. Входное и выходное напряжения ОУ имеют разные знаки или, как говорят, инверсны. Это очень важное свойство ОУ и его сознательно добиваются при конструировании усилителей путем построения ОУ из нечетного числа каскадов (обычно трех).

3. Область изменения выходного напряжения ОУ ограничена диапазоном $-E_{\text{max}} \leq u_{\text{вых}} \leq E_{\text{max}}$. Ограниченность интервала изменения машинных переменных требует при подготовке математической задачи к решению на АВМ проводить масштабирование математических переменных так, чтобы соответствующие им электрические напряжения не выходили бы из этого диапазона. В интервале $\pm E_{\text{max}}$ усилитель обладает хорошей линейностью. За пределами $\pm E_{\text{max}}$ возникают так называемые нелинейные искажения, вносящие ошибки в выполнении математических операций. В ламповых АВМ обычно $E_{\text{max}} = 100$ вольт, а в полупроводниковых — 10 В или 30 В.

4. Вход ОУ (точка «а») «потенциально заземлен». Слово-сочетание «потенциально заземлен» означает, что напряжение на входе усилителя очень мало и электрический потенциал точки «а» практически совпадает с потенциалом общей точки схемы, называемой «земля». Для оценки численного значения потенциала точки «а» воспользуемся выражением $u_{\text{вых}} = -e_g K$, отсюда

$e_g = -\frac{u_{\text{вых}}}{K}$. При максимальном $u_{\text{вых}} = 100$ В и минимальном $K = 4 \cdot 10^4$ получаем $e_g = -2,5$ мВ.

5. ОУ сознательно сконструирован так, что в нем практически отсутствует входной ток i_g , т. е. первый каскад не потребляет тока.

Входной ток исчисляется по закону Ома $i_g = \frac{e_g}{R_{\text{вх}}}$ и зависит от входного напряжения e_g , которое мало, и входного сопротивления ОУ $R_{\text{вх}}$, которое велико. Численное значение

$R_{\text{вх}}$ определяется сопротивлением изоляции между входными контактами ОУ.

6. ОУ обладает инерционностью. Она проявляется в том, что выходная переменная $u_{\text{вых}}(t)$ не повторяет мгновенное изменение входной $e_g(t)$. И это различие между переменными тем сильнее, чем больше скорость изменения входного напряжения e_g . На рис. 2.4, а) показана входная переменная в виде прямоугольной ступеньки

$$e_g(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } t < 0, \\ x_0 & \text{для } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{для } t > T. \end{cases}$$

Соответствующая и достаточно типичная картина изменения выходной величины показана на рис. 2.4, б), из которого видно, что выходное значение усилителя — $x_0 K$ появляется не сразу, а спустя некоторое время. Кроме того, форма выходной переменной отличается от входной. Причина здесь в том, что принятая зависимость входной и выходной переменных в виде равенства $u_{\text{вых}} = -e_g K$ приближенна и тем точнее, чем меньше скорость изменения $e_g(t)$. Детальное исследование электрических процессов в электронной схеме ОУ приводит к дифференциальному уравнению, связывающему выходную переменную с входной. Такие исследования — предмет изучения специальных дисциплин типа прикладной электроники или теоретической радиотехники. В курсе программирования АВМ инерционность ОУ обычно не принимается во внимание, ибо ОУ для АВМ специально конструируются так, чтобы инерция усилителя была мала и не вносила бы дополнительных погрешностей в выполнение математических операций. Однако, когда скорость изменения машинных переменных велика, приходится в каком-то виде учитывать инерционность усилителя. Для того, чтобы сделать это точнее, нужно рассмотреть дифференциальное уравнение, описывающее работу ОУ. Но можно инерционность усилителя учесть приближенно, считая, что ОУ обладает *запаздыванием* и *последствием*. На рис. 2.4, в) показана такая идеализированная приближенная картина. Выходная переменная копирует

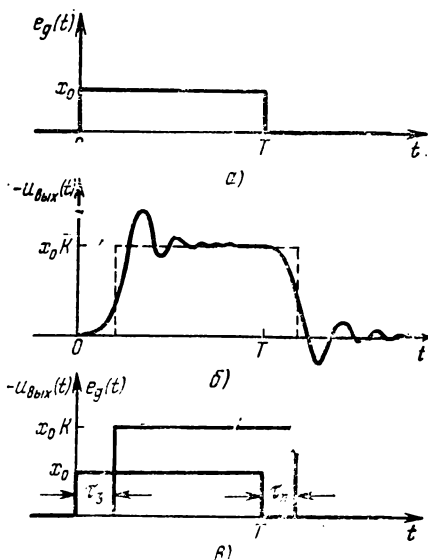


Рис. 2.4.

входную по форме с некоторым запаздыванием τ_d . После окончания действия входной переменной (момент времени T) на выходе ОУ еще в течение некоторого времени τ_n выходное напряжение сохраняется. Этот интервал времени τ_n называют временем последствия.

7. Большинство ОУ обладают *напряжением дрейфа нуля*. Дрейф нуля проявляется в медленном изменении выходного напряжения даже при накоротко замкнутых входных клеммах усилителя (т. е. при $e_g=0$). Изменения выходного напряжения можно рассматривать как некоторое эквивалентное изменение входного напряжения, которое и называют «дрейфом нуля». Причинами дрейфа является медленное изменение эмиссионных способностей ламп, изменение номиналов источников питания, колебания температуры и влажности окружающей среды и ряд других факторов. Дрейф нуля — источник вычислительных погрешностей АВМ. В процессе решения задачи на АВМ приходится периодически проверять уход нулей усилителей и в случае необходимости выставлять нули с помощью специально предусмотренных устройств. Обычно для АВМ невысокой точности дрейф на выходе не должен превышать 1—2 мВ за 10 минут. Существуют схемы ОУ, в которых не возникает напряжения дрейфа нуля.

Далее предстоит исследовать электрические процессы в операционных блоках АВМ, содержащих ОУ, с целью выявления математических операций, реализуемых блоками. Для простоты математического описания работа ОУ будет учитываться приближенно, идеализировано. В большинстве случаев мы будем считать, что ОУ обладает бесконечно большим коэффициентом усиления, безынерционен и не имеет дрейфа нуля. Погрешности, вызванные такой идеализацией, будут рассмотрены отдельно при изучении точности АВМ.

§ 3. Блок суммирования (сумматор)

Электрическая схема, представленная на рис. 2.5, а), осуществляет суммирование входных напряжений с одновременным умножением их на некоторые постоянные коэффициенты. Покажем это, рассмотрев электрические процессы в этой схеме, и определим величины коэффициентов через параметры элементов схемы.

Схема имеет два входа и один выход. Входные напряжения u_1 и u_2 через резисторы R_1 и R_2 поступают на вход ОУ. Операционный усилитель охвачен *отрицательной обратной связью* с помощью резистора R_0 , с.

Вообще принято говорить, что некоторая схема охвачена *обратной связью*, если ее выходная переменная вновь подается

на вход схемы. Совокупность элементов, через которые осуществляется передача выходной величины на вход, называют *цепью обратной связи*. В данном случае роль цепи обратной связи играет резистор $R_{o.c.}$. Если переменная, подаваемая с выхода на вход схемы, увеличивает результирующую величину

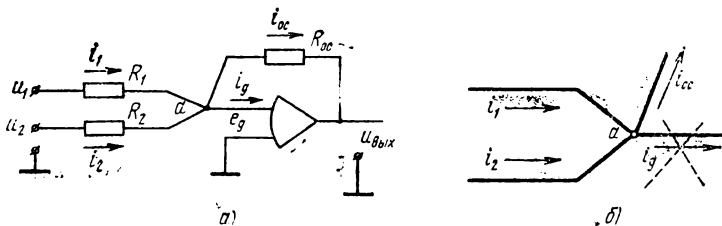


Рис. 2.5.

входной переменной, то связь называют *положительной*. Когда же организация обратной связи приводит к уменьшению результирующей величины входной переменной, связь называют *отрицательной*. В рассматриваемой схеме связь отрицательная из-за инвертирующего свойства ОУ.

Рассмотрим подробнее узел «а» этой схемы. Он показан на рис. 2.5, б) более крупно. Для любого узла электрической цепи справедлив закон Кирхгофа, согласно которому алгебраическая сумма токов, втекающих и вытекающих из узла, равна нулю. В соответствии с этим для узла «а» имеем уравнение токов $i_{o.c.} + i_g = i_1 + i_2$, где $i_{o.c.}$ — ток, оттекающий от узла «а» через резистор обратной связи $R_{o.c.}$; $i_g \approx 0$ — ток, оттекающий от узла «а» на вход ОУ; i_1 — ток, протекающий через резистор R_1 , i_2 — через резистор R_2 .

Теперь выразим каждый ток через сопротивление резистора и величину потенциалов на его концах по закону Ома:

$$\frac{e_g - u_{\text{вых}}}{R_{o.c.}} = \frac{u_1 - e_g}{R_1} + \frac{u_2 - e_g}{R_2},$$

где $e_g = -\frac{u_{\text{вых}}}{K} \approx 0$ — напряжение на входе ОУ. Подставив значение $e_g = 0$, получаем

$$u_{\text{вых}} = -\frac{R_{o.c.}}{R_1} u_1 - \frac{R_{o.c.}}{R_2} u_2. \quad (2.1)$$

Если обозначить $\alpha_1 = R_{o.c.}/R_1$, $\alpha_2 = R_{o.c.}/R_2$, то

$$u_{\text{вых}} = -(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2).$$

Таким образом, доказано, что схема, изображенная на рис. 2.5, а), осуществляет суммирование переменных u_1 , u_2 , умноженных на постоянные коэффициенты α_1 , α_2 .

Рассмотрим теперь более общую схему суммирования, в которой число входов увеличено с двух до n . Для такой схемы уравнение токов будет:

$$\sum_{j=1}^n \frac{u_j - e_g}{R_j} = \frac{e_g - u_{\text{вых}}}{R_{o.c}}. \quad (2.2)$$

С учетом того, что $e_g \approx 0$, получаем математическое выражение в виде суммы произведений

$$u_{\text{вых}} = - \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j, \quad (2.3)$$

где $\alpha_j = R_{o.c}/R_j$ называют *коэффициентом передачи по j -му входу*. Следует обратить внимание на то, что коэффициенты передачи сумматора — безразмерные величины и выражаются в виде отношения сопротивлений. Коэффициенты передачи можно еще выразить иначе, не через сопротивления, а через входное и выходное напряжения сумматора. Если все входные напряжения сумматора за исключением одного равны нулю, т. е.

$$u_i = \begin{cases} 0 & j \neq m, \\ u_m \neq 0, & j = m, \end{cases}$$

то формула (2.3) превращается в такую: $u_{\text{вых}} = -\alpha u_m$, из которой следует

$$\alpha_m = \left| - \frac{u_{\text{вых}}}{u_{\text{вх}}} \right|.$$

Другими словами, коэффициент передачи сумматора по какому-либо входу есть абсолютная величина отношения выходного напряжения к входному, при условии, что все остальные входные напряжения этого сумматора равны нулю.

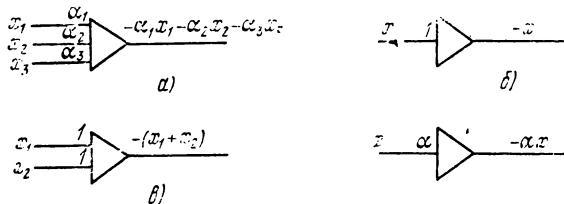


Рис. 2.5.

На структурных схемах сумматор изображают в виде треугольников, показанных на рис. 2.6. На верхнем рис. 2.6, а) представлен сумматор на три входа. Коэффициенты передачи указываются около каждого входа. Схема рис. 2.6, б) интересна тем, что ее коэффициент передачи равен единице, вследствие

чего она изменяет лишь знак входной переменной x . Потребность в изменении знака некоторой переменной возникает довольно часто при решении задач на АВМ так, что эта схема получила даже специальное название: *инвертор*. Используя инвертор, всегда можно операцию вычитания свести к операции сложения. На рис. 2.6, в) показан сумматор на два входа. На рис. 2.6, г) изображена схема с одним входом. Эта схема осуществляет умножение входной переменной x на постоянный коэффициент α . Схему рис. 2.6, г) называют *масштабным усилителем*.

У сумматоров, изображенных на рис. 2.6, коэффициенты передачи — неизменные, фиксированные числа. Для получения произвольного коэффициента передачи по некоторому входу сумматора на этот вход устанавливают потенциометр так, как показано на рис. 2.7, а). Рассмотрим работу сумматора с потенциометром на входе.

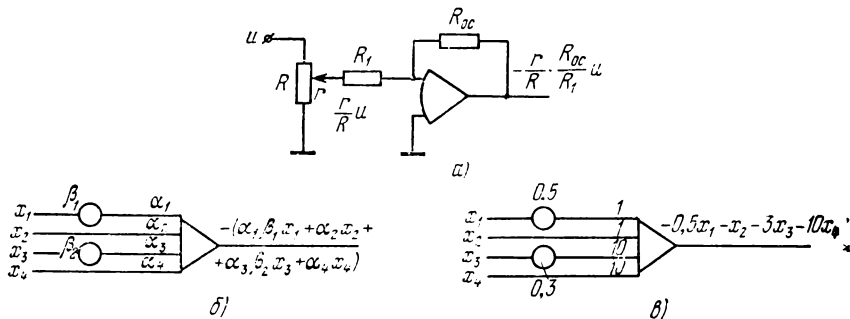


Рис. 2.7.

Входное напряжение делится потенциометром в отношении r/R , где R — полное сопротивление потенциометра, а r — сопротивление части от общей точки до движка. Выходное напряжение потенциометра является входным для последующей схемы, так что на входе усилителя будем иметь напряжение $u_{\text{вх}} = -\frac{r}{R} \frac{R_{oc}}{K_1} u$ или $u_{\text{вх}} = -\beta \alpha u$, где $\beta = r/R$ называют *коэффициентом передачи потенциометра*. В зависимости от положения движка потенциометра величина β меняется в интервале $0 \leq \beta \leq 1$. При этом общий коэффициент передачи сумматора вместе с потенциометром меняется в границах $0 \leq \alpha \beta \leq \alpha$.

На структурных схемах потенциометр изображают в виде кружка, около которого проставляется величина коэффициента передачи. На рис. 2.7 показаны для примера сумматоры с потенциометрами на входе. Если число входов сумматора будет n и на каждом из его входов будет потенциометр, то такой

сумматор реализует выражение

$$u_{\text{вых}} = - \sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_j u_j. \quad (2.4)$$

Операционный усилитель, охваченный отрицательной обратной связью, обладает одним очень важным свойством. Это свойство состоит в том, что алгебраическая сумма входных переменных усилителя равна нулю. При этом усилитель функционирует так, что разрешает некоторое неявное уравнение относительно переменной, которая проходит по цепи отрицательной обратной связи усилителя с выхода на его вход. Покажем, как это свойство проявляется в сумматоре, для чего достаточно уравнение (2.1) преобразовать к следующему виду:

$$\frac{u_{\text{вых}}}{R_{\text{о.с}}} + \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} = 0. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) представляет собой алгебраическую сумму входных переменных. Это уравнение имеет неявную форму относительно $u_{\text{вых}}$.

Очень часто усилитель с большим коэффициентом усиления используется в схемах АВМ самостоятельно. При этом его на структурных схемах обозначают так, как показано на рис. 2.8, а).

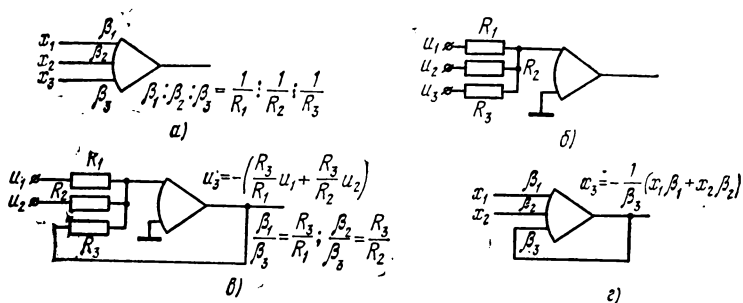


Рис. 2.8.

Самостоятельное применение ОУ означает, что он играет роль отдельного операционного блока, а не составной части какого-либо другого операционного блока. Как любой операционный блок, ОУ в этих случаях имеет и самостоятельную вычислительную функцию, которая состоит в том, что сумма входных переменных ОУ инвертируется и умножается на коэффициент передачи, численно равный K , другими словами, ОУ выполняет роль масштабного усилителя.

На рис. 2.8, б) представлен электрический эквивалент схемы рис. 2.8, а). Коэффициенты $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ удовлетворяют следующему,

отношению:

$$\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \frac{1}{R_3}.$$

Если с выхода ОУ организовать отрицательную обратную связь, как это показано на рис. 2.8, а), получается обычный сумматор на два входа. При этом роль резистора обратной связи играет входной резистор R_3 . На структурных схемах АВМ такой сумматор, у которого роль резистора обратной связи выполняет один из входных резисторов, изображают так, как показано на рис. 2.8, з).

При практической работе на АВМ важно уметь достаточно точно установить коэффициенты передачи сумматора. В тех случаях, когда величины сопротивлений резисторов обратной связи и входных фиксированы, установка коэффициентов передачи не вызывает трудностей и сводится к подбору сопротивления R и сопротивления $R_{о.с}$ так, чтобы требуемый коэффициент передачи был равен отношению $R_{о.с}/R$.

Несколько усложняется процедура установки коэффициента передачи при наличии потенциометра на входе сумматора. В этих случаях на вход потенциометра подается некоторое постоянное напряжение $u_{вх}$ (обычно 10 или 100 вольт) и измеряется напряжение на выходе сумматора. Изменяя положение движка потенциометра, добиваются значения выходного напряжения сумматора, равного $u_{вых} = -\alpha u_{вх}$, где α — требуемый коэффициент передачи.

Чем точнее при установке коэффициентов производится измерение напряжений, тем точнее можно установить коэффициент передачи. В АВМ наряду с обычными методами измерения напряжений с помощью вольтметра используется еще более точный компенсационный метод измерения. Основу схемы компенсационного измерения составляет прецизионный источник эталонного напряжения и нуль-индикатор, в качестве которого может быть использован гальванометр, ламповый вольтметр или осциллоскоп. Нуль-индикатор

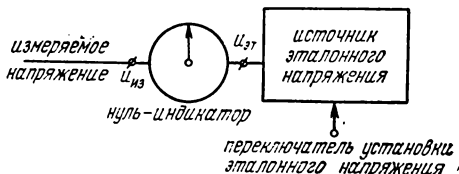


Рис. 2.9.

включается между измеряемым напряжением и выходом источника эталонного напряжения (рис. 2.9). Изменяя положение переключателя установки величины эталонного напряжения, добиваются нулевого положения стрелки индикатора, что соответствует равенству $u_{из} = u_{эт}$. Значение $u_{эт}$ прочитывается на градуировке переключателя величины эталонного напряжения.

§ 4. Блоки интегрирования (интегратор и интегросумматор)

Докажем, что схема, изображенная на рис. 2.10, а), осуществляет интегрирование входной величины напряжения $u(t)$ по переменной t , где t — физическая величина — время.

Схема состоит из ОУ, охваченного отрицательной обратной связью через конденсатор емкостью C . Входная переменная $u(t)$ подается через резистор R .

Прежде всего вспомним два важных факта из раздела физики «Электричество»:

— величина заряда конденсатора (количество электричества Q) прямо пропорциональна емкости конденсатора и напряжению u_c , приложенному к конденсатору $Q = Cu_c$;

— электрический ток есть скорость изменения количества электричества: $i = \frac{dQ}{dt}$.

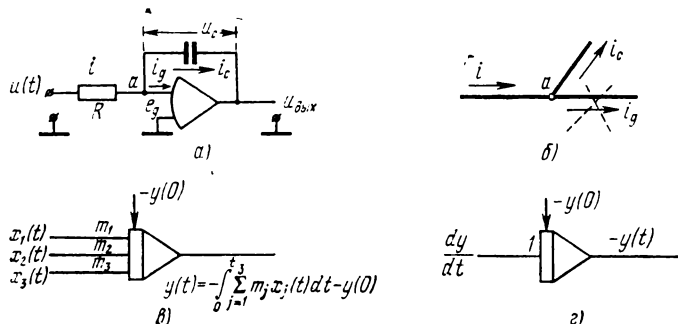


Рис. 2.10.

Отсюда ток, протекающий через конденсатор C (схема рис. 2.10, а)), будет равен

$$i_c = \frac{dQ}{dt} = C \frac{d(e_g - u_{\text{вых}})}{dt}.$$

В соответствии с законом Кирхгофа для точки «а» можно записать уравнение токов $i = i_c$ (рис. 2.10, б). Выразим токи через напряжения:

$$\frac{u_{\text{вх}} - e_g}{R} = C \frac{d(e_g - u_{\text{вых}})}{dt}, \quad (2.6)$$

где $e_g = -\frac{u_{\text{вых}}}{K} \approx 0$. Подставив значение $e_g = 0$ в (2.6), получаем дифференциальное уравнение относительно $u_{\text{вых}}(t)$:

$$\frac{du_{\text{вых}}(t)}{dt} = -m u_{\text{вых}}(t), \quad (2.7)$$

где $m = 1/RC$.

Поскольку выходная величина схемы на рис. 2.10, а) есть $u_{\text{вых}}(t)$, то последнее уравнение (2.7) целесообразно переписать в эквивалентной интегральной форме

$$u_{\text{вых}}(t) = -m \int_0^t u_{\text{вх}}(t) dt + u_0, \quad (2.8)$$

где u_0 — постоянная интегрирования.

Таким образом доказано, что схема рис. 2.10, а) действительно осуществляет интегрирование входной переменной по переменной t (время), или, что то же самое, воспроизводит решение дифференциального уравнения (2.7). Осталось выяснить математический и физический смысл постоянной интегрирования. Для этого рассмотрим величину выходного напряжения в момент времени, равный нулю:

$$u_{\text{вых}}(0) = -m \int_0^0 u_{\text{вх}}(t) dt + u_0 \quad \text{или} \quad u_{\text{вых}}(0) = u_0.$$

Итак, математически постоянная интегрирования является значением переменной $u_{\text{вых}}(t)$ в момент времени, равный нулю. Физически же появление на выходе усилителя в момент $t=0$ конечного напряжения означает, что конденсатор был предварительно до интегрирования заряжен до напряжения u_0 .

Теперь рассмотрим более общую схему интегрирования. Пусть интегратор имеет n входов, на которых действуют входные напряжения $u_1, u_2, u_3, \dots, u_j, \dots, u_n$. В соответствии с законом Кирхгофа справедливо уравнение токов

$$\sum_{j=1}^n \frac{u_j - e_c}{R_j} = C \frac{d(e_c - u_{\text{вых}})}{dt}. \quad (2.9)$$

Величина e_c мала, поэтому $u_{\text{вых}}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{du_{\text{вых}}}{dt} = -\sum_{j=1}^n \frac{u_j(t)}{R_j C}. \quad (2.10)$$

Интегрируя уравнение (2.10), получим

$$u_{\text{вых}}(t) = -\int_0^t \sum_{j=1}^n m_j u_j(t) dt + u_0, \quad (2.11)$$

или, в силу линейности интеграла,

$$u_{\text{вых}}(t) = -\sum_{j=1}^n m_j \int_0^t u_j(t) dt + u_0, \quad (2.12)$$

где $m_j = 1/R_j C$ называют коэффициентом передачи интегратора по j -му входу.

Из формул (2.11) и (2.12) следует, что интегратор с несколькими входами одновременно с операцией интегрирования производит суммирование. Поэтому такие интеграторы называют интеграторами суммирования. На структурных схемах интеграторы принято обозначать так, как показано на рис. 2.10, в) и г).

Коэффициент передачи интегратора в отличие от коэффициента передачи сумматора имеет размерность $[с^{-1}]$. Это следует из того, что размерность R — $[Ом]$, а C — $[с \cdot А \cdot В^{-1}]$. Такая размерность коэффициента передачи интегратора указывает на связь величины значений коэффициентов m_j с длительностью интегрирования АВМ. Коэффициент передачи интегратора влияет на скорость изменения выходного напряжения интегратора. В дальнейшем мы раскроем связь величины коэффициента передачи с продолжительностью интегрирования при рассмотрении вопроса о представлении математических перемешных машинными переменными.

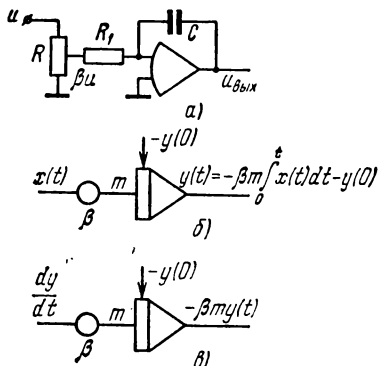


Рис. 2.11.

Так же, как и на выходе сумматоров, на входе интеграторов подключают потенциометры. С их помощью можно устанавливать любые численные значения коэффициентов передачи из некоторого фиксированного диапазона. Когда на входе интегратора стоит потенциометр с коэффициентом передачи β , то результирующий коэффициент передачи будет $m\beta$ (рис. 2.11, а), где $0 \leq \beta \leq 1$. На структурных схемах интегратор с потенциометром на входе изображается так, как это показано на рис. (2.11, б) и в)).

При практической работе на АВМ необходимо уметь задавать коэффициенты передачи интеграторов, начальные условия интегрирования и понимать особенности работы интегратора в различных режимах. Остановимся на этом подробнее.

1. Режим установки коэффициентов. Установка требуемых коэффициентов передачи интегратора внешне производится тем же способом, что и установка коэффициентов сумматора. На вход также подается некоторое фиксированное напряжение $u_{\text{вх}}$, а на выходе, меняя положение движка входного потенциометра, добиваются напряжения $-m u_{\text{вх}}$, где m — требуемый коэффициент. В этом режиме интегратор автоматически или оператором превращается в сумматор (рис. 2.12, а)), т. е. конденсатор обратной связи интегратора заменяется некоторым резистором с сопротивлением, обеспечивающим такие же численные значения коэффициентов передачи. В этом смысле конденсатор емкостью 1 мкФ эквивалентен резистору с сопротивлением в 1 МОм. Если такое превращение интегратора в сумматор не произвести, то, естественно, с выхода интегратора будет поступать не постоянное напряжение, а линейно нарастающее, представляющее собой интеграл от входной постоянной величины. Установить в таких условиях требуемый коэффициент передачи затруднительно.

2. Режим задания начальных условий (режим — исходное состояние). Начальные условия задаются от потенциометров задания начальных условий. Электрическое напряжение, снимаемое с выхода потенциометра, заряжает конденсатор до требуемой величины напряжения. При этом для того, чтобы избежать влияния других схем на работу интеграторов, производится отключение всех входных резисторов с автоматическим заземлением их общей точки так, как это показано на рис. 2.12, б). Состояние, в котором пребывает интегратор при установленном начальном условии и отключенных входных резисторах, называют *исходным состоянием интегратора*.

3. Режим интегрирования. Этот режим начинается по сигналу «пуск», по которому автоматически отключаются потенциометры задания начальных условий, а входные резисторы подключаются ко входу усилителя (рис. 2.12, в)). Начинается процесс интегрирования.

4. Режим фиксации решения. Используется для прерывания интегрирования так, чтобы значения всех переменных сохранились бы такими, какими они были в момент прерывания интегрирования. В режиме фиксации решения оператор может производить измерения значений машинных переменных. Этот режим используется и в тех случаях, когда при прерывании следует

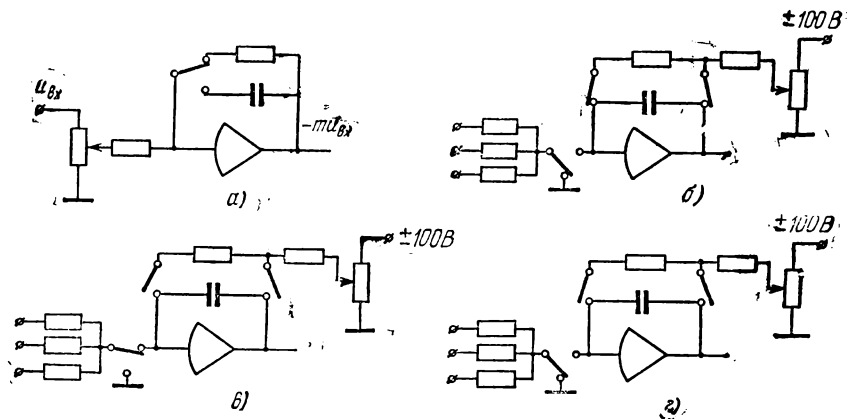


Рис. 2.12.

изменить схему соединения блоков АВМ. При переводе интеграторов в режим фиксации решения входные цепи автоматически отключаются. Значение выходных напряжений интеграторов остаются постоянными. Конденсатор, оставаясь заряженным, сохраняет значение машинной переменной (рис. 2.12, г). По сигналу пуск процесс интегрирования продолжается с того места, где было фиксировано решение. По сигналу *исходное состояние* машина переходит в режим задания начальных условий.

§ 5. Примеры математического описания структурных схем АВМ, состоящих из линейных блоков

Пример 1. На рис. 2.13, а) — в) представлены три схемы сумматоров. Требуется найти зависимость выходной переменной от входных.

Схема рис. 2.13, а) представляет собой сумматор на n входов. На каждом входе этого сумматора имеется потенциометр. Выходная переменная сумматора в соответствии с (2.4) равна

$$y_a = - \sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_j x_j. \quad (2.13)$$

Схема рис. 2.13, б) представляет собой сумматор на $n+t$ входов. На первые n входов подаются переменные x_1, x_2, \dots, x_n . Оставшиеся t входов использованы для организации обратной связи с выхода сумматора на его вход. Выходная переменная

сумматора в соответствии с (2.4) равна

$$y_0 = - \sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_j x_j - y_0 \sum_{k=1}^m \beta_k^* \alpha_k^*.$$

Разрешая последнее уравнение относительно y_0 , получаем

$$y_0 = - \frac{\sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_j x_j}{1 + \sum_{k=1}^m \beta_k^* \alpha_k^*}. \quad (2.14)$$

Схема рис. 2.13, а) представляет собой сумматор, построенный на базе ОУ, который охвачен обратной связью по m входам. На n входов этого усилителя поступают переменные x_1 ,

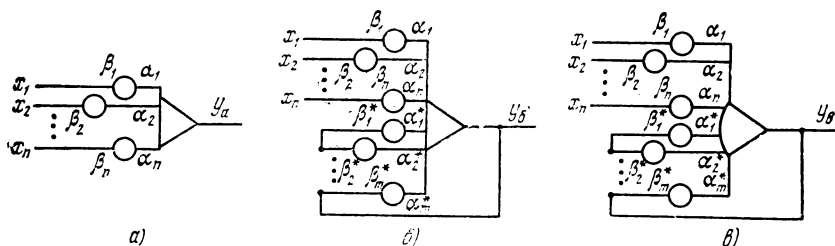


Рис. 2.13.

x_2, \dots, x_n . Для того чтобы найти выражение выходной переменной от входных, следует вспомнить, что ОУ, охваченный отрицательной обратной связью, функционирует так, что алгебраическая сумма всех его входных переменных равна нулю. Поэтому имеем

$$\sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_j x_j + y_0 \sum_{k=1}^m \beta_k^* \alpha_k^* = 0$$

и далее искомое

$$y_0 = - \frac{\sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_j x_j}{\sum_{k=1}^m \beta_k^* \alpha_k^*}. \quad (2.15)$$

Полученные результаты (2.13), (2.14), (2.15) отличаются друг от друга лишь постоянными множителями. Для первой схемы постоянный множитель равен единице: $A_a = 1$. Для второй схемы множитель равен $A_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^m \beta_k^* \alpha_k^*\right)^{-1}$ и может из-

меняться в диапазоне $\left(1 + \sum_{k=1}^m \alpha_k^*\right)^{-1} \leq A_0 \leq 1$. Левая граница достигается, когда все $\beta_k^* = 1$ ($k=1, 2, \dots, m$), правая граница — когда все $\beta_k^* = 0$. Для схемы рис. 2.13, в) множитель равен $A_v = \left(\sum_{k=1}^m \beta_k^* \alpha_k^*\right)^{-1}$ и может изменяться в диапазоне: $\left(\sum_{k=1}^m \alpha_k^*\right)^{-1} \leq A_v \leq \infty$.

Левая граница достигается, когда все $\beta_k^* = 1$, а правая — когда все $\beta_k^* = 0$.

Из рассмотренных схем следует важный практический прием умножения суммы на число. Если сумму $\sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_j x_j$ необходимо умножить на постоянное число, то достаточно организовать обратную связь в сумматоре по схеме рис. 2.13, б) или в). Эффект умножения суммы на число в рассмотренных схемах имеет простой физический смысл. При организации обратных связей параллельно резистору обратной связи подключаются входные резисторы сумматора. Это приводит к изменению результирующего сопротивления резистора обратной связи, что математически в соответствии с (2.1) эквивалентно умножению суммы на число.

Перейдем теперь к структурным схемам, содержащим сумматоры и интеграторы.

Пример 2. Найти дифференциальное уравнение, которым описывается структурная схема АВМ, изображенная на рис. 2.14, а).

Схема состоит из цепочки последовательно включенных четырех интеграторов. Величины a, b, c, d, e — постоянные. Для определения искомого дифференциального уравнения обозначим выходную переменную интегратора 1 через $y(t)$ (рис. 2.14, б)). Тогда на вход интегратора 1 должна поступать с выхода интегратора 2 переменная $-y'(t)$, с выхода интегратора 3 — переменная $+y''(t)$, с выхода интегратора 4 — переменная $-y'''(t)$. На входе же интегратора 4 должна действовать переменная $+y^{IV}(t)$. Смена знаков переменных на входе каждого интегратора определяется его инвертирующими свойствами. Но по условиям задачи известно, что на входе четвертого интегратора действует постоянная e , поэтому имеем равенство $y^{IV}(t) = e$, которое и представляет собой искомого дифференциальное уравнение. В окончательном виде с учетом начальных условий получим:

$$y^{IV}(t) = e,$$

$$y'''(0) = -d, \quad y''(0) = c, \quad y'(0) = -b, \quad y(0) = a.$$

Дифференциальным уравнением типа $y^{IV}(t) = e$ описываются процессы плоского изгиба балки постоянной жесткости под действием сплошной нагрузки постоянной интенсивности. Такие балки показаны на рис. 2.14, в) и г). На рис. 2.14, в) изображена консольно закрепленная балка, на рис. 2.14, г) балка опирается краями на опоры. При изгибе балок y соответствует величине прогиба балки, y' — углу поворота сечения балки, y'' пропорциональна изгибающему моменту, y''' соответствует поперечной

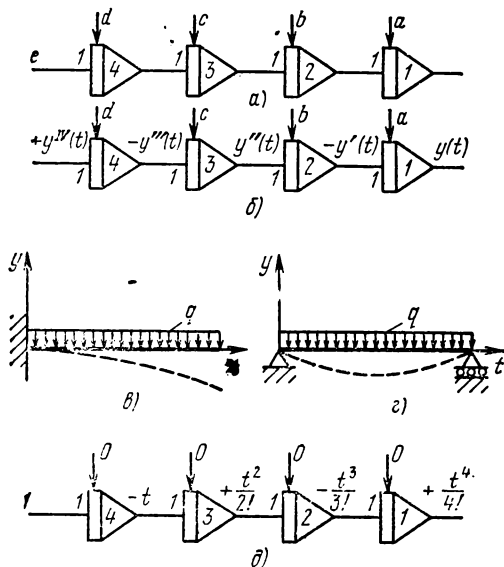


Рис. 2.14.

силе и, наконец, y^{IV} соответствует величине постоянной плотности нагрузки q . Машинной переменной «время» соответствует переменная, представляющая текущую длину балки.

Аналитическое решение этого дифференциального уравнения есть полином четвертой степени. Убедимся в этом для случая, когда $e=1$, $a=b=c=d=0$ (рис. 2.14, д)). На входе интегратора 4 действует постоянная величина 1. На его выходе будет интеграл от этой величины, т. е. $-t$. На выходе интегратора 3 будет интеграл от $-t$, т. е. $+\frac{t^2}{2!}$, на выходе интегратора 2 переменная $-\frac{t^3}{3!}$ и на выходе интегратора 1 переменная $+\frac{t^4}{4!}$. Если задать соответствующие значения начальных условий, то в принципе можно с помощью структурной схемы рис. 2.14, д) воспроизвести любой многочлен степени не выше четырех. В самом общем случае цепочка из n последовательно включенных ин-

теграторов способна воспроизвести, путем надлежащего подбора начальных условий, любой многочлен степени не выше n .

Пример 3. Найти дифференциальное уравнение, которым описывается схема на рис. 2.15, а).

Обозначим переменную на выходе интегратора 1 через $y(t)$ (рис. 2.15, б)). На входе интегратора 1 будет переменная

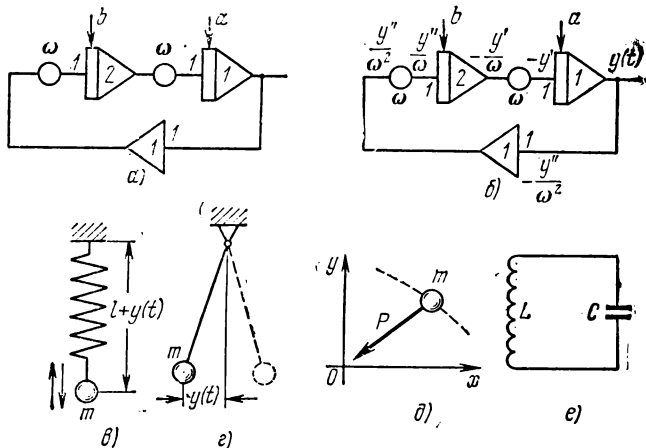


Рис. 2.15.

$-y'(t)$. На входе потенциометра будет переменная, равная $-\frac{y'(t)}{\omega}$, на входе интегратора 2 — переменная $+\frac{y''(t)}{\omega}$, на выходе инвертора — переменная $+\frac{y''(t)}{\omega^2}$, на входе инвертора будет $-\frac{y''(t)}{\omega^2}$. Эта последняя переменная равна $y(t)$, так как выходная переменная интегратора 1 поступает прямо на вход инвертора 1. Отсюда с учетом начальных условий получаем искомого дифференциальное уравнение

$$y''(t) = -\omega^2 y(t),$$

$$y(0) = a, \quad y'(0) = -b\omega.$$

Уравнение этого типа описывает незатухающие гармонические колебания, исследование которых проводится во многих областях техники. На рис. 2.15, в) — е) изображены некоторые колебательные системы, различные по физической природе, для которых схема рис. 2.15, а) может служить моделью. На рис. 2.15, в) показаны продольные колебания тяжелой материальной точки, подвешенной к пружине. Колебания $y(t)$ возникают относительно положения равновесия материальной точки. Положение равновесия удалено от точки подвеса пружины на

расстояние l . На рис. 2.15, *з*) показан физический маятник, совершающий малые колебания $y(t)$ относительно положения равновесия. На рис. 2.15, *д*) показано движение материальной точки под действием притягивающего центра с силой P , пропорциональной расстоянию до точки $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Изменение во времени координат точки $x(t)$, $y(t)$ описывается уравнениями $y''(t) = -\omega^2 y(t)$, $x''(t) = -\omega^2 x(t)$. На рис. 2.15, *е*) показан колебательный контур, состоящий из индуктивности L и конденсатора C . Конденсатор предварительно заряжен до некоторого напряжения. Дифференциальное уравнение напряжения конденсатора во времени при его разряде на индуктивность. В общем виде решение дифференциального уравнения гармонических колебаний имеет вид $y(t) = -b \sin \omega t + a \cos \omega t$, где a и b — постоянные, определяемые начальными условиями.

Пример 4. Найти дифференциальное уравнение, описывающее структурную схему, изображенную на рис. 2.16, *а*).

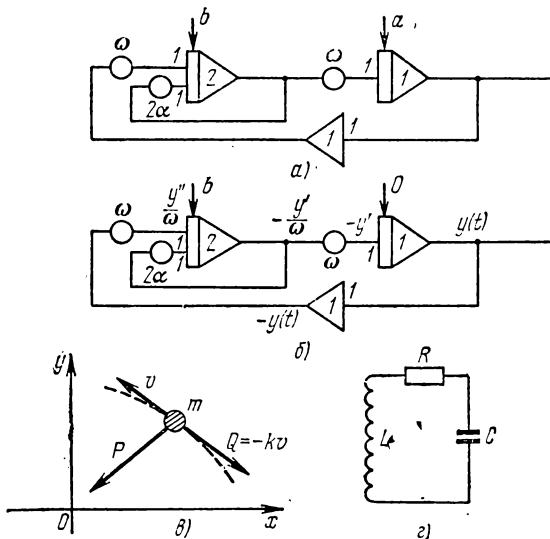


Рис. 2.16.

Как и раньше, обозначим выходную переменную интегратора 1 (рис. 2.16, *б*)) через $y(t)$, тогда, идя по схеме справа налево, на входе интегратора 2 должны иметь величину $+\frac{y''(t)}{\omega}$. В силу существования обратной связи с выхода интегратора 2 на свой вход через потенциометр с коэффициентом передачи 2α и обратной связи с выхода интегратора 1 на вход интегратора

тора 2 через инвертор 1 и потенциометр, величина $\frac{y''(t)}{\omega}$ должна равняться $-y(t)\omega - 2\alpha\frac{y'(t)}{\omega}$. С учетом начальных условий получаем искомое дифференциальное уравнение

$$y''(t) + 2\alpha y'(t) + \omega^2 y(t) = 0,$$

$$y(0) = a, \quad y'(0) = -b\omega.$$

Это уравнение описывает затухающие колебания. В случае ω , изображенном на рис. 2.16, ω , затухание вызвано сопротивлением окружающей среды с силой, пропорциональной скорости движения материальной точки. В схеме рис. 2.16, ε) затухание вызвано введением в контур резистора сопротивлением R , на котором часть первоначальной электрической энергии конденсатора постепенно теряется, превращаясь в тепловую. В общем виде аналитическое решение дифференциального уравнения затухающих гармонических колебаний имеет вид $y(t) = A \exp(-\alpha t) \sin(\omega_1 t + \psi_0)$, где $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$ ($\alpha < \omega$), а A и ψ_0 — некоторые постоянные, определяемые по начальным условиям.

§ 6. Блок (схема) программного управления

Схему, представленную на рис. 2.17, называют *схемой программного управления*. Схема содержит ОУ, который охвачен отрицательной обратной связью через диод D . На выходе ОУ подключена обмотка реле P . Контакты этого реле находятся в устройстве управления машины, а также выведены на коммутационное поле машины.

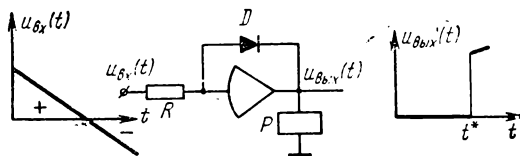


Рис. 2.17.

Рассмотрим работу схемы. Величина напряжения на выходе ОУ определяется выражением $u_{\text{вых}}(t) = -\frac{R_d}{R} u_{\text{вх}}(t)$, где R_d — сопротивление диода. Но величина R_d различна в зависимости от того, открыт диод или заперт приложенным к нему напряжением. Для случая, показанного на рисунке, пока входное напряжение положительно, диод открыт и его сопротивление мало. После момента времени t^* , когда входное напряжение пе-

решло из положительной области в отрицательную, диод запирается и его сопротивление становится очень большим. Поэтому на выходе ОУ до момента времени t^* напряжение практически равно нулю, а в момент времени t^* возникает скачок напряжения. Величина этого скачка ограничивается сопротивлением обмотки реле P , которое подключено параллельно диоду, так как входная точка ОУ потенциально заземлена. В момент появления скачка срабатывает реле P , в результате чего замыкаются его нормально разомкнутые контакты и размыкаются его нормально замкнутые контакты.

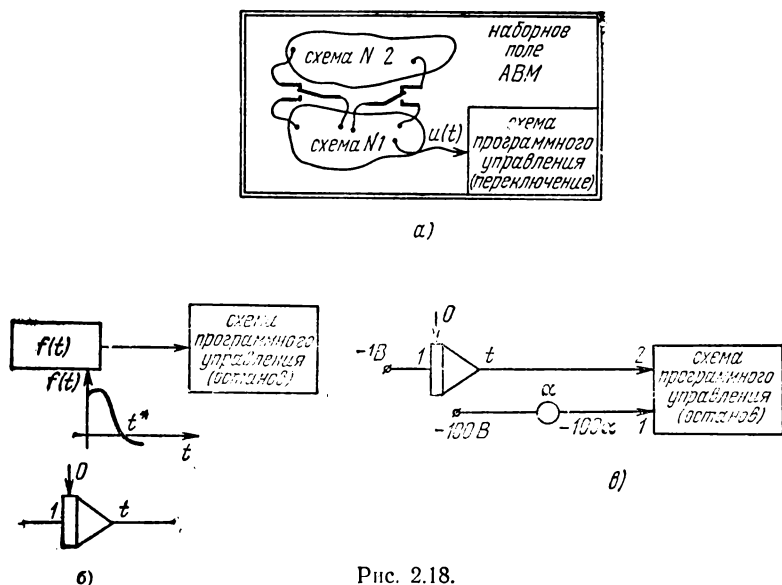


Рис. 2.18.

Схема программного управления может работать в одном из двух режимов в зависимости от используемых групп контактов. Контакты реле, находящиеся в устройстве управления АВМ, могут быть использованы для автоматического останова работы машины или, как говорят, для автоматического прерывания процесса решения. Контакты реле, находящиеся на наборном поле АВМ, могут быть использованы для автоматического изменения коммутационной схемы.

Под автоматическим изменением коммутационной схемы (переключением) обычно понимают следующее. Пусть на наборном поле АВМ собрана схема, содержащая две схемы № 1 и № 2 (рис. 2.18, а). Одна из машинных переменных $u(t)$, выработанная схемой № 1, поступает на вход схемы программного управления. Схемы № 1 и № 2 соединены между собой через

контакты реле P . В зависимости от знака переменной $u(t)$ эти контакты либо замкнуты, либо разомкнуты. Так что в зависимости от знака переменной $u(t)$ схемы № 1 и № 2 функционируют совместно как единое целое или порознь.

В таких случаях, когда строение некоторой схемы АВМ автоматически изменяется в зависимости от выполнения или невыполнения некоторого условия, принято говорить, что имеет место *система с переменной структурой*. Схема программного управления, работая в режиме переключения, составляет основу для создания вычислительных систем с переменной структурой.

Если полярность включения диода в схеме программного управления будет обратной, то появление скачка напряжения на выходе ОУ произойдет в момент перехода входного напряжения из отрицательной области в положительную.

При увеличении числа входов схемы программного управления с одного до n срабатывание схемы будет происходить в момент, когда меняется знак суммы

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} u_i(t),$$
 где R_i — величина сопротивления i -го входного резистора.

В качестве примера использования схемы программного управления для прерывания работы АВМ покажем ее применение для нахождения корней алгебраических и трансцендентных уравнений. На рис. 2.18, б) дана схема АВМ, содержащая блок, воспроизводящий произвольную функцию $f(t)$, схему программного управления и интегратор, вырабатывающий на выходе напряжение, численно равное времени от начала пуска машины. В момент времени t^* , когда $f(t)$ переходит через нуль, процесс воспроизведения $f(t)$ прерывается, а напряжение на выходе интегратора оказывается равным корню уравнения $f(t) = 0$.

Часто схема программного управления используется для построения схемы, позволяющей прерывать процесс решения задачи в любой заранее заданный момент времени с целью фиксации значений машинных переменных. Схема представлена на рис. 2.18, в) и содержит интегратор, вырабатывающий напряжение $+t$, делитель напряжения, изображенный в виде кружка, и схему программного управления, работающую в режиме останова. Пусть коэффициент передачи делителя $\alpha = 0,1$, тогда с выхода делителя на вход 1 схемы программного управления поступает напряжение -10 В. На вход 2 этой схемы поступает напряжение $+t$. В момент времени, когда $-10 + t^* = 0$, произойдет автоматический останов машины. Так, меняя значения коэффициента передачи делителя α , можно добиться останова машины в любой момент времени до 100 секунд включительно. По существу при этом решается линейное алгебраическое уравнение $-10\alpha + t = 0$ относительно t .

В качестве примера использования схемы программного управления в режиме переключения покажем воспроизведение на АВМ функции с разрывами первого рода и кусочно-дифференцируемой функции. Схема представлена на рис. 2.19. Блок, вырабатывающий функцию $\sin \omega t$, соединен со схемой программного управления, осуществляющей переключение. На два контакта реле подается напряжение $+100$ и -100 вольт. Средний контакт нормально замкнут с верхним и нормально разомкнут с нижним контактами. Напряжение на этом контакте обозначено $u_{\text{вых}}$. Кроме того, это напряжение подается на интегратор, напряжение на выходе которого обозначено через $u_{2\text{вых}}$. Опишем работу схемы. В течение положительного полупериода функции $\sin \omega t$ (рис.

2.20, а)) обмотка реле схемы программного управления обесточена. Поэтому напряжения $+100$ В проходит через нормально замкнутый верхний контакт на средний контакт и $u_{1\text{вых}} = 100$ В. Во время отрицательного полупериода через обмотку реле протекает ток. Нижний нормально открытый контакт замкнут и $u_{2\text{вых}} = -100$ В (рис. 2.20, б)). Таким образом, с помощью схемы рис. 2.19 произошло преобразование функции $\sin \omega t$ в периодическую функцию — прямоугольную волну,

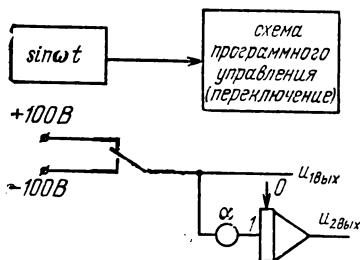


Рис. 2.19.

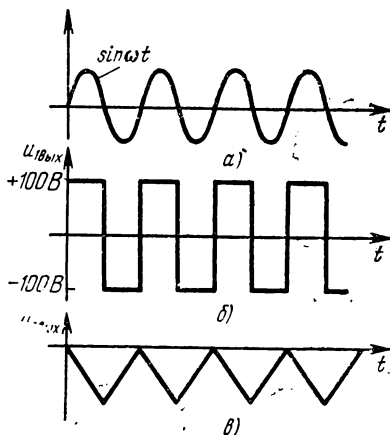


Рис. 2.20.

которая имеет разрывы первого рода в нулях функции $\sin \omega t$. Интегрирование прямоугольной волны приводит к получению периодической, кусочно-дифференцируемой функции, график которой состоит из треугольников (рис. 2.20, в)),

§ 7. Блоки нелинейных функций (функциональные преобразователи)

Функциональные преобразователи — это блоки АВМ, способные в явном виде воспроизводить некоторую функциональную зависимость $y = f(x, z)$. В большинстве АВМ функциональные преобразователи реализуют лишь функцию одного переменного $y = f(x)$, что вызвано практическими сложностями построения преобразователей от многих переменных. Преобразователи

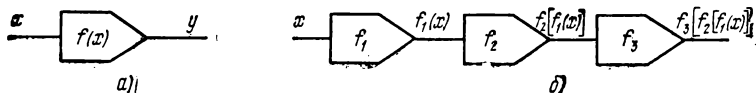


Рис. 2.21.

обозначают так, как это показано на рис. 2.21, а). Входное электрическое напряжение представляет аргумент, выходное напряжение — значение функции. Область изменения входного и выходного напряжений, как всегда в ламповых АВМ, ограничена рабочим интервалом ± 100 вольт, что накладывает определенные требования на класс воспроизводимых функций. Воспроиз-

водимые функции это — однозначные функции своего аргумента, причем область существования и область значений функции ограничены. Функции воспроизводятся не точно, а приближенно. Ошибки приближения вызваны двумя причинами: это погрешности аппроксимации исходной функции и технологическая точность изготовления отдельных радиоэлементов, образующих преобразователь.

Потребность в аппроксимации исходной функциональной зависимости связана с тем, что большинство функциональных блоков по своему принципу действия способны воспроизводить не саму функцию, а лишь ее кусочно-линейное приближение. Точность такого приближения зависит от кривизны функции и числа возможных интервалов линейного приближения. Число же интервалов определяется конструктивными особенностями блоков. Вообще в АВМ имеется значительное разнообразие типов функциональных блоков. В инструкции по эксплуатации каждой конкретной АВМ описываются принцип работы, методика настройки и способы включения функциональных преобразователей.

Функциональный преобразователь называют *универсальным*, если путем соответствующей настройки его можно использовать для воспроизведения произвольной функциональной зависимости.

Функциональный преобразователь называют *специализированным*, если он заранее раз и навсегда настроен на воспроизведение конкретной функциональной зависимости.

Когда имеется несколько функциональных преобразователей, реализующих функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ и т. д., то с помощью различных способов их включения удастся воспроизводить иные, порой более трудно реализуемые функции. Простейшая схема включения преобразователей — это схема включения их в последовательную цепочку. На выходе цепочки образуется суперпозиция функций (рис. 2.21, б).

§ 8. Блоки умножения

Блок умножения по входным переменным x и y должен вырабатывать их произведение $z = xy$. Теоретически блок умножения можно представить себе в виде функционального преобразователя от двух входных переменных. Однако из-за сложности аппаратного построения преобразователей от двух и более переменных обычно при создании блоков умножения идут иным путем: сводят выполнение операции умножения к выполнению других операций, легко реализуемых средствами АВМ с помощью сумматоров и функциональных преобразователей от одной входной переменной. Так в большинстве малых и

средних АВМ блоки перемножения построены в соответствии с одним из двух тождественных выражений:

$$xy = \frac{1}{4} [(x + y)^2 - (x - y)^2],$$

$$xy = \frac{1}{2} [(x + y)^2 - x^2 - y^2].$$

Для выполнения операции умножения здесь требуются сумматоры и функциональные преобразователи — *квадраторы*, осуществляющие возведения входной переменной во вторую степень.

На структурных схемах блок перемножения изображают так, как это показано на рис. 2.22, а), а когда в схеме важно подчеркнуть электрический характер машинных переменных — как на рис. 2.22, б).

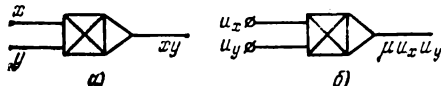


Рис. 2.22.

На входе схемы действуют два напряжения u_x и u_y , соответствующие переменным x и y . На выходе вырабатывается напряжение, пропорциональное их произведению $\mu u_x u_y$. Коэффициент пропорциональности μ называют схемным масштабом блока перемножения. Обычно для ламповых машин $\mu = 0,01$. Такое значение при максимальных абсолютных значениях сомножителей $u_x = u_y = 100$ В обеспечивает получение значений их произведения в допустимом диапазоне ± 100 В.

§ 9. Обращение функций, выполнение операций деления и извлечения корня

Пусть переменные x и y связаны между собой уравнением вида

$$F(x, y) = 0. \quad (2.16)$$

Когда между x и y существует взаимно однозначное соответствие и $F'_y(x, y) \neq 0$, то говорят, что уравнение (2.16) определяет y как однозначную неявную функцию от аргумента x . Аналогично при $F'_x(x, y) \neq 0$ уравнение (2.16) определяет x как однозначную неявную функцию от аргумента y .

Если наличный состав операционных блоков АВМ позволяет воспроизвести функцию $z = F(x, y)$, то неявное уравнение (2.16) всегда можно «аппаратурно» разрешить относительно любой переменной $y = f(x)$ или $x = \varphi(y)$ по так называемому *методу неявных функций*.

Суть метода состоит в том, что от конечного уравнения (2.16) переходят к дифференциальному. Если желательно полу-

чить значение y^* для заданного x^* , т. е. $y^* = f(x^*)$, то используют дифференциальное уравнение

$$y'(t) = -\rho F(x, y) \operatorname{sign}[F'_y(x, y)] \tag{2.17}$$

с начальным условием $y(0) = 0$. В этом уравнении коэффициент ρ — достаточно большое число; t — время; $y'(t)$ — производная переменной $y(t)$ по аргументу t ; $\operatorname{sign}[F'_y(x, y)]$ — знак частной производной $F'_y(x, y)$ по переменной y , равный

$$\operatorname{sign}[F'_y(x, y)] = \begin{cases} +1, & \text{если } F'_y(x, y) > 0, \\ -1, & \text{если } F'_y(x, y) < 0. \end{cases}$$

Основанием к переходу от неявного уравнения (2.16) к дифференциальному (2.17) могут служить такие рассуждения. Если для $x = x^* = \text{const}$ решение $y(t)$ уравнения (2.17) при $t \rightarrow \infty$ стремится к постоянной величине y^* , то y^* является искомым: $y^* = f(x^*)$. Действительно, если $y(t) \rightarrow y^*$ при $t \rightarrow \infty$, то $y'(t) \rightarrow 0$.

Следовательно, уравнение (2.17) превращается в конечное $F(x^*, y^*) = 0$. Для ускорения сходимости $y(t)$ к y^* в правой части уравнения (2.17) введен постоянный множитель ρ . Более строгое обоснование метода дано в § 2 гл. 10.

При аппаратурной реализации (2.17) на АВМ роль интегратора выполняет ОУ, в обратную связь которого включается конденсатор, как это показано на рис. 2.23, а). При этом, конечно,

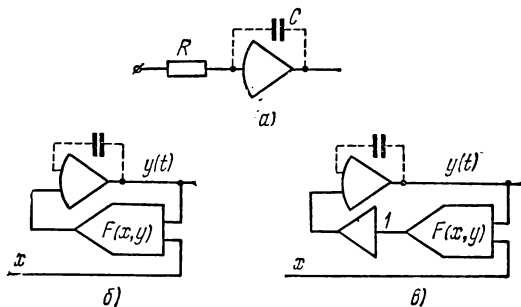


Рис. 2.23.

роль постоянного коэффициента ρ играет отношение $1/RC$. Численные значения R и C выбираются обычно настолько малыми, что величина ρ оказывается близкой значению K — коэффициенту усиления ОУ. Далее будем считать, что $\rho = K$. Полученный таким образом из ОУ интегратор охватывается отрицательной обратной связью через блок АВМ, воспроизводящий $F(x, y)$. Чтобы всегда имела место отрицательная обратная связь,

приходится в уравнении (2.17) учитывать знак частной производной $\text{sign}[F_y(x, y)]$.

На рис. 2.23, б) показана структурная схема для $F_y(x, y) > 0$. Рис. 2.23, в) соответствует случаю $F_y(x, y) < 0$. Когда же в области своего определения функция $F_y(x, y)$ не является знакопостоянной, структура схемы должна быть переменной.

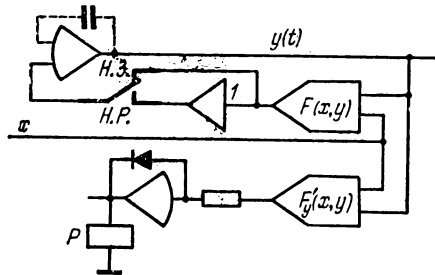


Рис. 2.24.

Соответствующая схема АВМ показана на рис. 2.24. В верхней части рисунка изображена схема, являющаяся объединением схем рис. 2.23, б) и в). Объединение производится с помощью двух контактов реле P программного управления. Через нормально замкнутый контакт реле P (Н. З.) осуществляется функционирование схемы, когда $F_y(x, y) > 0$, и соответственно — через нормально разомкнутый контакт (Н. Р.), когда $F_y(x, y) < 0$. В нижней части рисунка приведена схема программного управления, работающая в режиме переключения. На вход схемы поступает переменная $F_y(x, y)$ с выхода функционального преобразователя.

Метод неявных функций удобно использовать для *обращения функций*. Это значит, что по этому методу, располагая блоками, воспроизводящими, например, функции $y = \exp x$, $y = x^n$, $y = \sin x$, всегда можно путем надлежащего включения блоков образовать обратные функции $x = \ln y$, $x = \sqrt[n]{y}$, $x = \arcsin y$. Рассмотрим задачу обращения в общем виде. Пусть имеется функциональный преобразователь, вырабатывающий $y = f(x)$. Необходимо воспроизвести обратную функцию $x = \varphi(y)$. Для этого исходную функцию представим в виде неявного уравнения

$$F(x, y) = f(x) - y = 0,$$

которое разрешим относительно x . По методу неявных функций потребуется воспроизвести решение дифференциального уравнения

$$x' = -K[f(x) - y] \text{sign}[f_x(x)]$$

с начальным условием $x(0) = 0$. Структурные схемы АВМ для $f_x(x) > 0$ и $f_x(x) < 0$ представлены соответственно на рис. 2.25, а) и б). Из рисунков следует, что для обращения функции $y = f(x)$ функциональный преобразователь надлежит включить в обратную связь ОУ.

Аналогично по методу неявных функций выполняется ряд обратных операций. Так, большинство малых АВМ не имеют специальных блоков деления. Определение частного $z=x/y$ переменных x и y сводят к разрешению неявного уравнения $F(z)=$

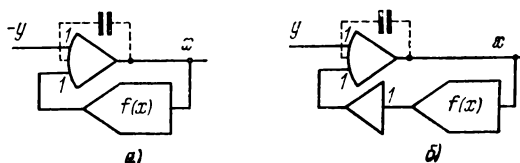


Рис. 2.25.

$=zy-x$ относительно z , для чего по методу неявных функций на АВМ воспроизводится решение дифференциального уравнения $z'=-K[zy-x]\text{sign } y$, $z(0)=0$, которое для положительных значений переменной y будет иметь более простой вид:

$$z'=-K[zy-x], \quad z(0)=0.$$

Соответствующая структурная схема представлена на рис. 2.26, а), из которой видно, что выполнение операции деления сведено к

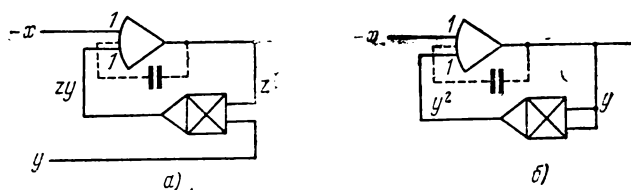


Рис. 2.26.

выполнению операции умножения с помощью блока умножения, включенного в обратную связь ОУ. Схема вырабатывает частное $z=\frac{x}{y}$ не сразу, а спустя некоторое время. Это запаздывание будет даже при постоянных x и y . Действительно, решая аналитически последнее дифференциальное уравнение, считая x и y фиксированными числами, имеем $z(t)=\frac{x}{y}[1-\exp(-Kyt)]$. Величина запаздывания составляет примерно $\frac{4}{Ky}$ секунд и тем меньше, чем больше K — коэффициент усиления ОУ.

Если переменная y будет отрицательной, схему АВМ на рис. 2.26, а) необходимо соответствующим образом изменить. Если же знак переменной y не определен заранее, схема должна иметь переменную структуру.

Выполнение операции извлечения квадратного корня удобно свести к разрешению неявного уравнения. Пусть необходимо реализовать функцию $y = \sqrt{x}$ от переменной x . Это равносильно разрешению неявного уравнения $F(y) = y^2 - x = 0$ относительно y , для чего на АВМ следует реализовать решение дифференциального уравнения

$$y' = -K[y^2 - x], \quad y(0) = 0,$$

которому соответствует структурная схема, показанная на рис. 2.26, б).

§ 10. Некоторые диодные блоки АВМ

Диоды обладают различным сопротивлением в зависимости от полярности приложенного напряжения. Это свойство позволяет, используя диоды, строить различные логические схемы как в цифровых, так и в аналоговых вычислительных машинах. В АВМ к этим схемам относятся: схема ограничения пределов изменения переменной; релейная бесконтактная схема; схема образования модуля функции; схемы выбора максимальной и минимальной величины и ряд других схем.

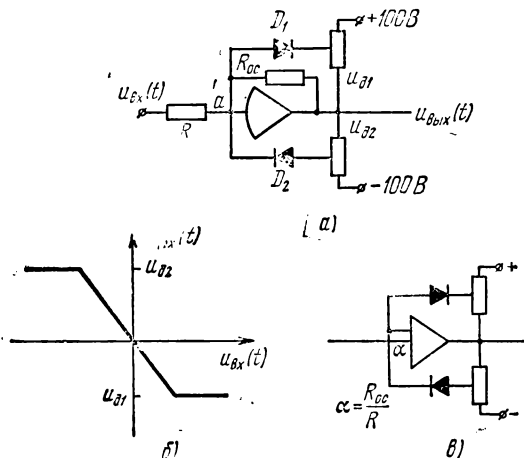


Рис. 2.27.

1. **Схема ограничения пределов.** Схема ограничения пределов изменения некоторой машинной переменной представлена на рис. 2.27, а). График зависимости $u_{вых}$ как функцию $u_{вх}$ называют *характеристикой вход-выход*. Характеристика изображена на рис. 2.27, б). Схема содержит масштабный усилитель, охваченный двумя обратными связями через потенциометры и диоды D_1 и D_2 .

Докажем, что схема обладает характеристикой, показанной на рис. 2.27, б). Пусть входное напряжение $u_{вх} = 0$, тогда и выходное напряжение $u_{вых} = 0$. Изменяя положение движков потенциометров, установим на верхнем напряжении $+u_{д1}$, а на нижнем $-u_{д2}$. Этими напряжениями диоды D_1 и D_2 заперты, так как точка «а» потенциально заземлена независимо от величины входного напряжения. При изменении входного напряжения напряжение $u_{вых}$ меняется согласно выражению $u_{вых} = -\frac{R_{o.c}}{K} u_{вх}$, которому на характеристике соответствует наклонный отрезок прямой.

Пусть $u_{вх}$ возрастает. Тогда $u_{вых}$ убывает. Величина напряжения, которым заперт D_1 , убывает. В момент времени, когда $u_{вых}$ достигает значения, равного $u_{д1}$, запирающее напряжение равно нулю. Диод D_1 открывается и своим малым сопротивлением шунтирует $R_{o.c}$. Дальнейшее изменение величины $u_{вых}$ при возрастании $u_{вх}$ оказывается невозможным. Этому на характеристике соответствует нижний горизонтальный луч.

Пусть $u_{вх}$ убывает. Тогда $u_{вых}$ возрастает до тех пор, пока $u_{вых}$ не сравняется со значением $u_{д2}$, после чего открывается диод D_2 , и дальнейшее убывание $u_{вх}$ не приводит к изменению величины $u_{вых}$. Этому на характеристике соответствует верхний горизонтальный луч.

При начертании структурных и коммутационных схем схему ограничения изображают так, как это показано на рис. 2.27, в).

2. Релейная бесконтактная схема. Релейная бесконтактная схема получается из схемы ограничения пределов путем ликвидации резистора обратной связи $R_{o.c}$ (рис. 2.28, а)). Формально

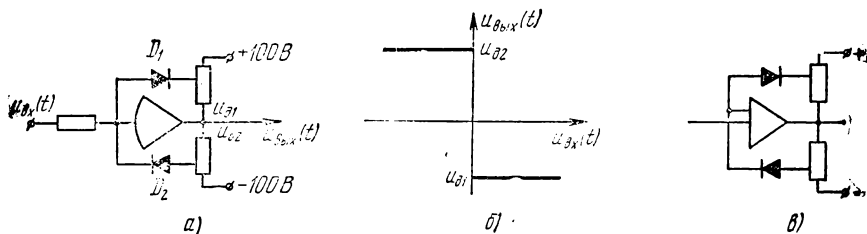


Рис. 2.28.

ликвидация резистора обратной связи равносильна приравнению $R_{o.c} = \infty$. В результате этого наклонный участок характеристики становится вертикальным (рис. 2.28, б)). Из характеристики следует, что схема реагирует на знак входного напряжения

$$u_{вых} = \begin{cases} u_{д2}, & \text{если } u_{вх} < 0, \\ u_{д1}, & \text{если } u_{вх} > 0. \end{cases}$$

Эту схему в аналоговой технике называют *идеальное реле* или *бесконтактная релейная схема* в отличие от схемы программного управления (режим переключения), которую называют контактной релейной схемой.

На рис. 2.28, в) дано изображение релейной схемы, используемой при начертании структурных и коммутационных схем.

В релейной схеме и в схеме ограничения пределов каждый из пределов в зависимости от положения движка потенциометра может изменяться в диапазоне от 0 до 100 вольт.

3. Схема выделения наибольших и наименьших значений. Пусть необходимо выделить из некоторой совокупности функций $x_1(t), x_2(t), \dots, x_j(t), \dots, x_n(t)$ значение той функции, которая в данный момент имеет наибольшее или наименьшее значение.

В математической символике такие операции выбора обычно записываются так:

$$y_{\max}(t) = \max\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_j(t), \dots, x_n(t)\},$$

$$y_{\min}(t) = \min\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_j(t), \dots, x_n(t)\}.$$

Ясно, что $y(t)$ может и не совпадать на всем интервале определения t с какой-либо одной из функций, указанной в скобках. Для иллюстрации на рис. 2.29, а) показана совокупность из пяти функций $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t)$ в виде прямых, и проведено выделение наибольших и наименьших значений на интервале $t \in [0, 1]$. Видно, что графиком $y_{\min}(t)$ служит ломаная, состоящая из пяти прямолинейных отрезков, а график $y_{\max}(t)$ состоит из двух отрезков.

На рис. 2.29, б) и в) изображены электрические схемы диодных блоков, выделяющих соответственно максимальные и минимальные значения. Величины $-E$ и $+E$ выбираются так, что $|-E| = +E > u_j$, где $j = 1, 2, \dots, n$.

Блок рис. 2.29, б) воспроизводит $u_{\text{вых}} = \max(u_1, u_2, \dots, u_n, -E) = \max(u_1, u_2, \dots, u_n)$. В самом деле, из n входных диодов открыт лишь тот, на входе которого действует наибольшее напряжение. Пусть это будет k -й вход, тогда $u_k > u_j$ для всех $j \neq k$.

Диод на k -м входе открыт, и $u_{\text{вых}} = \frac{R}{R_{\text{д. пр}} + R} \times u_k \approx u_k$, так как прямое сопротивление диода $R_{\text{д. пр}} \ll R$. По всем остальным входам $j \neq k$ диоды заперты напряжением $u_k - u_j$. Если выход диодного блока рис. 2.29, б) подать на вход масштабного усилителя так, как это показано на рис. 2.29, в), то

$$u_{\text{вых}} = - \frac{R_{\text{о.с}}}{R_1} \max \left\{ u_1, u_2, \dots, u_n, - \frac{R_1}{R_1 + R} E \right\}.$$

Рассуждая аналогично, можно показать, что блоки рис. 2.29, в) и д) соответственно реализуют выражения $u_{\text{вых}} = \min\{u_1, u_2, \dots$

$\dots, u_n, +E\} = \min\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ и

$$u_{1\text{вых}} = -\frac{R_{0.c}}{R_1} \min\left\{u_1, u_2, \dots, u_n, \frac{R_1}{R_1 + R} E\right\}.$$

4. Схема образования модуля. Пусть имеется некоторая функция $x(t)$. Необходимо воспроизвести функцию $y(t) = |x(t)|$. Существует много вариантов схем, осуществляющих операцию взятия модуля от функции. Рассмотрим две из них.

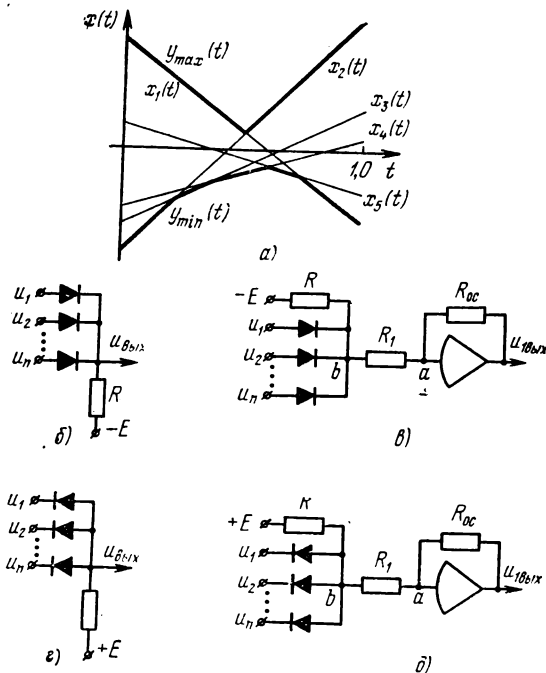


Рис. 2.29.

Первая схема показана на рис. 2.30, а). Основу схемы составляет операционный усилитель I , охваченный двумя параллельными цепями обратных связей. В обратных связях диоды включены в противоположных направлениях. Поэтому в зависимости от знака входного напряжения в проводящем состоянии находится только одна цепь. Проводящая цепь играет роль резистора обратной связи, величина сопротивления которого равна: $R'_{0.c} = R + R_{д. пр} \approx R$, где $R_{д. пр}$ — малое прямое сопротивление диода. Непроводящая цепь при этом имеет сопротивление $R''_{0.c} = R + R_{д.обр} \approx R_{д.обр}$, где $R_{д.обр}$ — обратное сопротивление диода, которое много больше R . Поэтому $R'_{0.c} \gg R''_{0.c}$ и их параллельное

сопротивление приблизительно равно R независимо от знака входного сигнала. Выходная величина ОУ всегда равна $u_1 = -u_{вх}(t)$. Выясним, за счет чего же на выходе сумматора 2 вырабатывается напряжение $u_2 = |u_{вх}(t)|$, а характеристика «вход-выход» имеет вид, показанный на рис. 2.30, б).

Пусть входное напряжение положительно ($u_{вх}(t) > 0$), тогда работает нижняя цепь обратной связи. Диод D_2 проводит, сопротивление его мало и поэтому напряжение на верхнем входе сумматора практически равно напряжению на выходе усилителя 1,

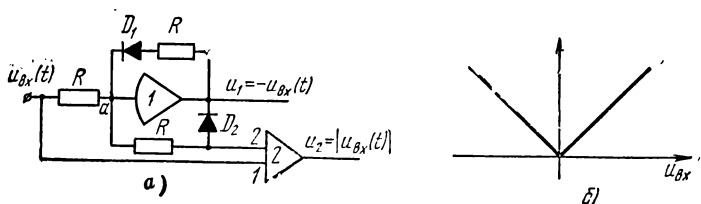


Рис. 2.30.

т. е. $u_1 = -u_{вх}$. На нижний вход сумматора подается входное напряжение $+u_{вх}$. На выходе сумматора вырабатывается сумма входных напряжений, которая с учетом коэффициентов передачи входов равна $u_2 = -u_{вх} + 2u_{вх} = +u_{вх}$.

Пусть входное напряжение отрицательно ($u_{вх}(t) < 0$). Тогда работает верхняя цепь. Диод D_2 заперт. Напряжение на верхнем входе сумматора 2 практически равно потенциалу суммирующей точки «а», которая потенциально заземлена. Поэтому на верхнем входе сумматора входное напряжение равно нулю. На нижний вход сумматора входное напряжение подается так, что на

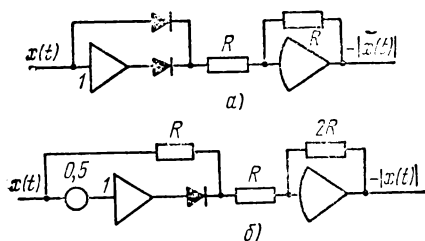


Рис. 2.31.

выходе сумматора будет $u_2 = -(u_{вх}) - 2 \cdot (0) = -u_{вх} > 0$. Итак, независимо от знака входного напряжения, напряжение на выходе сумматора имеет положительный знак и амплитуду, равную входному сигналу, т. е. $u_2 = |u_{вх}(t)|$.

Второй вариант схемы образования модуля основан на реализации очевидного математического тождества $|y(t)| =$

$\max\{x(t), -x(t)\}$. Таким образом, задача образования модуля функции сведена к уже известной задаче о выделении наибольшего значения. Структурные схемы представлены на рис. 2.31 а, б).

Схема рис. 2.31, а) требует для своего осуществления два диода. Она реализует выражение $y(t) = -\max\{x(t), -x(t)\} = -|x(t)|$.

Схема рис. 2.31, б) содержит всего один диод и реализует выражение $y(t) = -2\max\{0,5x(t), -0,5x(t)\} = -|x(t)|$.

§ 11. Блоки дифференцирования

Электрическая схема, изображенная на рис. 2.32, а), осуществляет операцию дифференцирования входной переменной $u_{вх}(t)$.

Для доказательства этого запишем уравнение Кирхгофа для узла «а»: $i_c = i_g$. Если теперь заменить токи их выражениями через напряжения, то получим равенство

$$C \frac{d(u_{вх} - e_g)}{dt} = \frac{e_g - u_{вых}}{R}. \quad (2.18)$$

С учетом того, что $e_g = -\frac{u_{вых}}{K} \approx 0$, имеем

$$u_{вых}(t) = -RC \frac{du_{вх}}{dt}. \quad (2.19)$$

Таким образом, доказана способность схемы, представленной на рис. 2.32, а), выполнять операцию дифференцирования входной

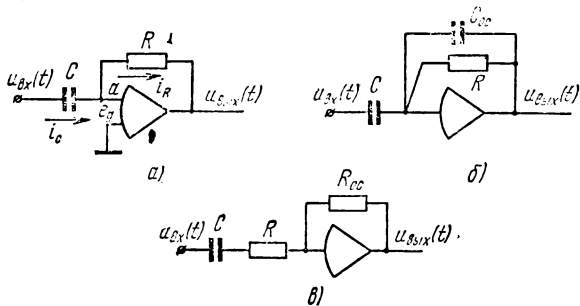


Рис. 2.32.

переменной. Рассмотренная схема дифференцирования нашла ограниченное применение в практике работы на АВМ. Основная причина этого — неприятное свойство операции дифференцирования усиливать *помехи**). Поэтому при работе на АВМ стараются вообще не использовать операцию дифференцирования. В случае же крайней необходимости применяются комбинированные дифференцирующие блоки, которые помимо операции дифференцирования одновременно выполняют еще *сглаживание*. На рис.

*) Подробнее см. § 1 гл. 3.

2.32, б) и в) представлены две схемы, осуществляющие дифференцирование со сглаживанием. В первой схеме эффект сглаживания достигается за счет введения дополнительного конденсатора в обратной связи. Во второй схеме — за счет введения дополнительного входного резистора.

§ 12. Задачи и вопросы

1. Отечественные аналоговые вычислительные машины ЭМУ-10 и МН-17М имеют: первая 48, вторая 80 интеграторов и сумматоров. К какому типу следует отнести эти машины?

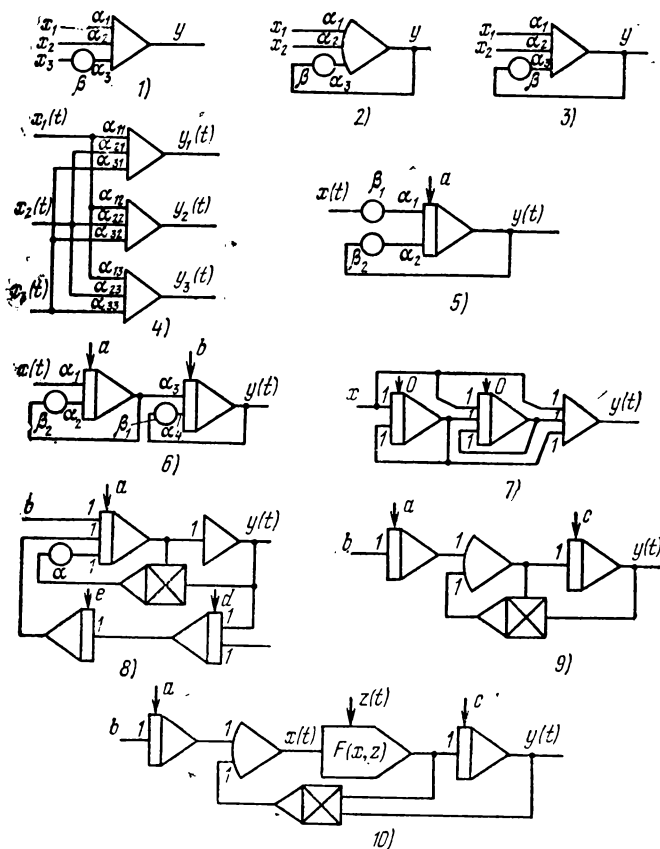


Рис. 2.33.

2. Каково назначение основных устройств АВМ?
3. В чем состоят основные особенности ОУ?
4. Перечислите известные Вам виды обратных связей.

5. Показать, что сумматор реализует выражение:

$$\frac{u_{\text{вых}}}{R_{\text{о.с}}} + \sum_{j=1}^n \frac{u_j}{R_j} = - \frac{u_{\text{вых}}}{K} \left[\frac{1}{R_{\text{о.с}}} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j} \right], \quad (2.20)$$

если учесть конечность коэффициента усиления ОУ.

6. Как осуществляется установка требуемого коэффициента передачи сумматора? Рассмотреть случаи $\alpha > 1$, $\alpha < 1$, где α — коэффициент передачи сумматора по какому-либо входу.

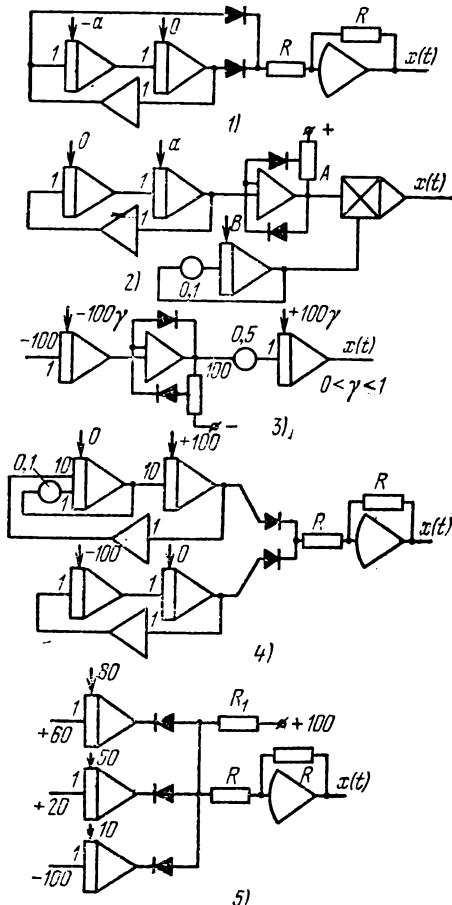


Рис. 2.34.

7. Показать, что интегратор реализует выражение

$$\frac{du_{\text{вых}}}{dt} = - \frac{K}{K+1} \frac{u_{\text{вх}}}{RC} - \frac{u_{\text{вых}}}{RC(K+1)}, \quad (2.21)$$

если учесть конечность коэффициента усиления ОУ,

8. Как задать начальные условия при интегрировании?

9. Что общего и в чем различие в установке коэффициентов передачи сумматоров и интеграторов?

10. Что такое фиксация решения и как она осуществляется?

11. Для структурных схем АВМ, представленных на рис. 2.33, найти математические выражения, которые они реализуют.

Замечания:

схемой 4) произвольный вектор $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\}$ умножается на постоянную матрицу;

схемы 9) и 10) описываются одним и тем же дифференциальным уравнением, не разрешенным относительно старшей производной;

схема 10) инвариантна к преобразованию $f(x, z)$. К любому ли преобразованию?

12. Построить структурную схему АВМ для отыскания корней уравнения:

$$\exp(-\alpha t) \sin(\omega t + \psi_0) = 1 - \beta t.$$

13. Почему блоки умножения ламповых машин имеют схемный масштаб $\mu = 0,01$?

14. Составить структурную схему АВМ, воспроизводящую зависимость $y(t) = [x(t)]^{2/3}$, где $x(t)$ — некоторая заданная переменная.

15. Найти математические выражения, которые реализуют структурные схемы, представленные на рис. 2.34.

16. Показать, что блок дифференцирования рис. 2.32, а) реализует выражение

$$u_{\text{вых}} = -\frac{K}{K+1} RC \frac{du_{\text{вх}}}{dt} - \frac{RC}{K+1} \frac{du_{\text{вых}}}{dt}, \quad (2.22)$$

если учесть конечность коэффициента усиления ОУ.

17. Схема рис. 2.26, б) реализует операцию извлечения корня путем воспроизведения решения дифференциального уравнения $y' = -K[y^2 - x]$, $y(0) = 0$. Доказать это, решив уравнение для случая $x = x^* = \text{const}$.

ТОЧНОСТЬ АВМ**§ 1. Источники ошибок АВМ**

АВМ воспроизводят решения задач с ошибками. *Ошибкой АВМ* называют разность между точным значением переменной и ее значением, полученным при решении задачи на машине. Величина ошибок АВМ определяется совместным действием большого числа факторов. Главнейшие из них — *ошибки операционных блоков, помехи и выбранный метод* решения задачи. В настоящей главе рассматривается влияние на точность работы АВМ ошибок операционных блоков и помех.

Точность воспроизведения математических операций — основная характеристика операционных блоков АВМ. Для оценки точности полезно ввести понятия: *идеальный операционный блок* и *реальный операционный блок*. Операционные блоки, рассмотренные в главе 2, следует отнести к идеальным. Для идеальных блоков характерен строгий математический изоморфизм между физическими процессами, протекающими в них, и математическими операциями, реализуемыми этими блоками. Идеальный блок выполняет математические операции абсолютно точно. Конечно, сконструировать и изготовить идеальный блок невозможно. Идеальный блок — это абстрактная конструкция, удобная для оценки ошибок реальных операционных блоков. Под *ошибкой* реального операционного блока понимают разность между выходным напряжением идеального и реального блоков. Выявление ошибок блоков требует исследования внутреннего строения реальных блоков. Глубина такого исследования может быть различной. Мы ограничимся лишь первым приближением. В этом приближении в отношении реального и идеального блоков предполагается существование одинаковых элементов, образующих блоки, и наличие одинаковых связей между элементами. Различия между блоками определяются лишь «качеством» элементов реальных блоков.

В противоположность реальному блоку идеальный блок состоит из идеальных элементов: бездрейфовый, безынерционный ОУ с бесконечно большим коэффициентом усиления; резисторы и конденсаторы с абсолютно точными параметрами, не зависящими от времени, температуры и влажности окружающей среды.

Выходное напряжение операционного блока будем представлять в виде некоторой функции от параметров блока и входных напряжений:

$$u_{\text{вых}} = f(p_1, p_2, \dots, p_j, \dots, p_n; u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_m), \quad (3.1)$$

где $p_1, p_2, p_3, \dots, p_j, \dots, p_n$ — параметры блока; $u_1, u_2, u_3, \dots, u_k, \dots, u_m$ — входные переменные.

Удобно для сокращения записи выражение (3.1) представить в векторной записи: $u_{\text{вых}} = f(\mathbf{p}, \mathbf{u})$, где \mathbf{p} — вектор параметров операционного блока; \mathbf{u} — вектор входных переменных; $u_{\text{вых}}$ — (скалярная величина) выходное напряжение.

Ошибка операционного блока в соответствии с определением выражается в виде разности

$$\Delta u_{\text{вых}} = f_{\text{ид}}(\mathbf{p}_{\text{ид}}, \mathbf{u}_{\text{ид}}) - f_{\text{р}}(\mathbf{p}_{\text{р}}, \mathbf{u}_{\text{р}}). \quad (3.2)$$

Здесь $f_{\text{ид}}(\mathbf{p}_{\text{ид}}, \mathbf{u}_{\text{ид}})$ — функция, реализуемая идеальным блоком; $f_{\text{р}}(\mathbf{p}_{\text{р}}, \mathbf{u}_{\text{р}})$ — функция, реализуемая реальным блоком; $\mathbf{p}_{\text{р}}$ — вектор параметров реального блока; $\mathbf{p}_{\text{ид}}$ — вектор параметров идеального блока; $\mathbf{u}_{\text{ид}}$ — вектор идеальных входных переменных; $\mathbf{u}_{\text{р}}$ — вектор реальных входных переменных.

Точность реального операционного блока определяется тремя типами ошибок.

Ошибки первого типа — *параметрические*. Они представляют собой разность значений параметров $\delta p_j = p_{\text{ид}j} - p_{\text{р}j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, или в векторной форме: $\delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_{\text{ид}} - \mathbf{p}_{\text{р}}$. Источниками параметрических ошибок являются технологические погрешности изготовления радиодеталей, из которых построен операционный блок.

Ошибки второго типа — *структурные (конструктивные)*. Они вызваны конструктивными особенностями элементов, образующих реальный блок. В первую очередь эти ошибки связаны с ОУ, которые в силу принципа действия их электронных схем не могут иметь бесконечно большой коэффициент усиления и не могут быть безынерционными. Для выявления структурных ошибок приходится детально исследовать электрические процессы в операционных блоках с учетом особенностей построения электронных схем ОУ.

Ошибки третьего типа — *помехи*. Они проявляются в отсутствии строгого соответствия между машинной переменной и математической переменной. Машинная переменная изменяется во времени более сложным и до какой-то степени случайным образом по сравнению с математической переменной. Переменную $u_{\text{ид}}(t)$ называют *идеальной*, предполагая, что она абсолютно точно соответствует математической переменной. Переменную $u_{\text{р}}(t)$ называют *реальной*, когда имеют в виду то электрическое напряжение, которое в действительности можно получить на выходе

какого-либо операционного блока АВМ. Разность $\eta(t) = u_p(t) - u_{ид}(t)$ называют помехой. Для помех, возникающих в АВМ, характерна более высокая скорость изменения во времени по сравнению со скоростью изменения машинных переменных. На рис. 3.1 представлена типичная, но несколько утрированная картина изменения во времени идеальной и реальной машинных переменных и помехи.

Источниками и причинами появления помех является большая совокупность неконтролируемых факторов, которые можно разделить на внешние и внутренние.

К *внешним* факторам следует отнести нестабильность источников питания АВМ, влияние различных энергоемких электрических установок, питающихся от той же электрической сети, что и данная АВМ. Моменты включения и выключения этих установок сопровождаются появлением помех. К внешним факторам также относится температура и влажность окружающей среды. Кроме того, с внешними факторами связаны так называемые «промышленные помехи». Существование этих помех состоит в том, что при работе ряда промышленных установок возникает мощное электромагнитное поле, влияющее на работу электронных операционных блоков АВМ. К этим устройствам относятся: электрический транспорт, коллекторные электрические двигатели, высокочастотные печи для плавки, закалки, сушки и целый ряд других установок. С помощью специальных приемов конструирования электронной аппаратуры можно практически полностью защитить АВМ от внешних помех.

Внутренние факторы связаны с возникновением помех, которые зародились внутри самой АВМ, в различных ее блоках. Такого рода помехи неизбежно сопутствуют основным электронным явлениям, происходящим в блоках АВМ. Эти помехи, обусловленные флуктуациями электрических токов и напряжений, называют *флуктуационными*. Вообще в физике под флуктуациями понимают случайные колебания величин около их средних значений. Флуктуации обусловлены стохастической природой ряда физических явлений. Кроме того, к внутренним факторам следует отнести взаимное электрическое влияние блоков АВМ в процессе работы машины. Это влияние и связанные с ним помехи распространяются как по коммутационным шнурам, соединяющим блоки, так и по цепям электропитания блоков. Чем выше скорость изменения машинных переменных, тем сильнее помехи, вызванные

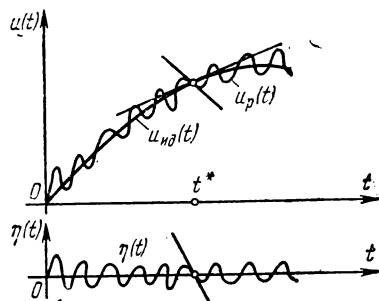


Рис. 3.1.

взаимным электрическим влиянием. Устранить помехи флукуационного типа невозможно. Можно подбирать относительно более выгодные схемы и режимы их работы.

Итак, основными причинами вычислительных ошибок АВМ являются помехи, технологические погрешности изготовления радиодеталей и неидеальность ОУ, проявляющаяся в дрейфе нуля, инерционности ОУ и конечности его коэффициента усиления. При этом неодинаково проявляются эти источники ошибок в операционных блоках разных типов.

§ 2. Ошибки операционных блоков

В достаточно общем виде ошибка произвольного операционного блока от параметрических ошибок и помех может быть приближенно оценена путем замены правой части выражения (3.2) дифференциалом

$$\begin{aligned} \Delta u_{\text{вых}} &\approx f[p_{\text{вд}}, u_{\text{вд}}(t)] - f[p_{\text{вд}} - \delta p, u_{\text{вд}}(t) + \eta(t)] = \\ &= - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_{\text{вд}j}} \delta p_j + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial u_{\text{вд}k}} \eta_k(t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь $\frac{\partial f}{\partial p_{\text{вд}j}}$ — частная производная функции $f(p, u)$ по параметру $p_{\text{вд}j}$, $\frac{\partial f}{\partial u_{\text{вд}j}}$ — частная производная $f(p, u)$ по переменной $u_{\text{вд}k}$, $\eta_k(t)$ — помеха входной переменной $u_k(t)$.

1. Ошибки сумматора. Сумматор в соответствии с (2.3) воспроизводит сумму

$$u_{\text{вых}} = \sum_{j=1}^n \frac{R_{\text{о.с}}}{R_j} u_j.$$

Ошибку сумматора от погрешностей параметров ($R_{\text{о.с}}$, R_j , $j=1, 2, \dots, n$) и помех входных переменных можно выразить по формуле (3.3) так:

$$\Delta u_{\text{вых}} \approx + \sum_{j=1}^n \frac{\delta R_{\text{о.с}}}{R_j} u_j - \sum_{j=1}^n \frac{R_{\text{о.с}} \cdot \delta R_j}{R_j^2} u_j - \sum_{j=1}^n \frac{R_{\text{о.с}}}{R_j} \eta_j(t),$$

где предполагается, что технологические погрешности $\delta R_{\text{о.с}}$, δR_j и помехи $\eta_j(t)$ достаточно малы.

Структурные погрешности сумматора определяются конечностью коэффициента усиления ОУ, дрейфом нуля ОУ и особенностями электронной схемы, по которой построен ОУ.

На основе (2.20) устанавливается зависимость выходного напряжения сумматора от K — коэффициента усиления ОУ:

$$u_{\text{вых}} = - \frac{\sum_{j=1}^n \frac{R_{o.c}}{R_j} u_j}{1 + \frac{1}{K} \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{R_{o.c}}{R_j} \right)}.$$

Влияние на выходное напряжение коэффициента усиления K тем слабее, чем он больше.

Для выявления ошибки сумматора от дрейфа нуля ОУ предположим, что на входе ОУ (рис. 2.3) подано дополнительное напряжение $-e_0(t)$, действие которого должно скомпенсировать дрейф. Таким образом, на выходе ОУ действует напряжение

$$u = -[e_g - e_0(t)]K. \quad (3.4)$$

Если выразить теперь e_g из (3.4) и подставить в (2.3), то с учетом того, что $e_g = -\frac{u_{\text{вых}}}{K}$ мало, получим:

$$u_{\text{вых}} = - \sum_{j=1}^n \frac{R_{o.c}}{R_j} u_j + e_0(t) \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{R_{o.c}}{R_j} \right),$$

где $e_0(t) \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{R_{o.c}}{R_j} \right)$ — ошибка от дрейфа нуля.

Действительное исследование электрических процессов в схеме сумматора с учетом электронной схемы ОУ позволяет убедиться, что выходное напряжение сумматора лишь приближенно выражается формулой (2.3). Более точно выходное напряжение описывается следующим выражением:

$$T_2 \frac{d^2 u_{\text{вых}}}{dt^2} + T_1 \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + u_{\text{вых}} = - \sum_{j=1}^n \frac{R_{o.c}}{R_j} u_j, \quad (3.5)$$

где T_1, T_2 — некоторые малые величины, которыми обычно пренебрегают. Однако в тех случаях, когда входные переменные меняются достаточно быстро, скорость изменения $u_{\text{вых}}(t)$ может стать значительной. Тогда игнорирование членов с T_1 и T_2 может привести к значительным ошибкам, что при определенных типах структурных схем АВМ приводит к неудачному воспроизведению решения задачи на АВМ.

К структурным ошибкам сумматоров относится также запаздывание выходного напряжения $u_{\text{вых}}(t)$ по отношению к входному $u_{\text{вх}}(t)$. Причиной запаздывания является инерционность усилителя постоянного тока (см. § 2 гл. 2). У сумматоров и масш-

табных усилителей запаздывание зависит от коэффициента передачи и приближенно описывается выражением

$$\tau = \tau_3 \frac{1 + \alpha}{1 + K}, \quad (3.6)$$

где τ_3 — запаздывание ОУ, $K \geq 4 \cdot 10^4$ — коэффициент усиления ОУ, $\alpha = \frac{u_{\text{вых}}}{u_{\text{вх}}}$ — коэффициент передачи операционного блока. Из (3.6) видно, что запаздывание операционного блока тем больше, чем больше α . Обычно при работе на АВМ не используют коэффициенты передачи больше двадцати. Когда ОУ используется в какой-либо схеме АВМ в виде самостоятельного операционного блока, то, естественно, $\alpha = K$ и запаздывание — наибольшее.

2. Ошибки интегратора. Ошибка интегратора от погрешностей параметров и помех получается по формуле (3.3), с учетом (2.12):

$$\Delta u_{\text{вых}} = - \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j C} \left[\left(\frac{\delta C}{C} + \frac{\delta R_j}{R_j} \right) \int_0^t u_j dt + \int_0^t \eta_j(t) dt \right] - \Delta u_0,$$

где Δu_0 — ошибка в установке начального условия интегратора.

Для выявления структурной погрешности интегратора рассмотрим влияние конечности значения K — коэффициента усиления ОУ. В соответствии с формулой (2.21) имеем дифференциальное уравнение для $u_{\text{вых}}(t)$

$$\frac{du_{\text{вых}}}{dt} = - \frac{K}{K+1} \frac{u_{\text{вх}}}{RC} - \frac{u_{\text{вых}}}{RC(K+1)}.$$

Проинтегрировав правую и левую части этого уравнения и считая $\frac{K}{1+K} \approx 1$, получаем

$$u_{\text{вых}}(t) = - \frac{1}{RC} \int_0^t u_{\text{вх}} dt - \frac{1}{RC(K+1)} \int_0^t u_{\text{вых}} dt,$$

отсюда ошибка

$$\Delta u_{\text{вых}} = \frac{1}{RC(K+1)} \int_0^t u_{\text{вых}} dt.$$

Из последних выражений для $u_{\text{вых}}(t)$ и $\Delta u_{\text{вых}}$ видно, что как величина ошибки, так и выходное напряжение $u_{\text{вых}}(t)$ интегратора зависит от входного напряжения $u_{\text{вх}}(t)$. Для иллюстрации характера проявления структурной погрешности рассмотрим интегрирование постоянной величины $u_{\text{вх}} = 1$.

Выходное напряжение идеального интегратора должно быть равным $u_{\text{вых}} = - \frac{t}{RC}$. Выходное напряжение реального интегра-

тора находится путем решения дифференциального уравнения (2.21) при $u_{\text{вх}} = 1$:

$$\frac{du_{\text{вых}}}{dt} = -\frac{K}{K+1} \frac{1}{RC} - \frac{u_{\text{вых}}}{RC(K+1)}.$$

Его точное аналитическое решение есть

$$u_{\text{вых}}(t) = -K \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{t}{RC(1+K)} \right] \right\}.$$

Разложив экспоненту в ряд, получим:

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) &= -K \left\{ 1 - 1 + \frac{t}{RC(1+K)} - \frac{t^2}{2(RC)^2(1+K)^2} + \dots \right\} \approx \\ &\approx -\frac{K}{1+K} \cdot \frac{t}{RC} \approx -\frac{t}{RC}. \end{aligned}$$

Первый отброшенный член разложения $\frac{K \cdot t^2}{2(RC)^2(1+K)^2}$ представляет основную ошибку интегрирования. Величина ошибки тем больше, чем продолжительнее процесс интегрирования и чем меньше коэффициент усиления ОУ. Из изложенного следует необходимость ограничения продолжительности интегрирования. Для каждой конкретной АВМ в зависимости от используемого в ней типа ОУ рекомендуется определенная длительность интегрирования, превышение которой сопровождается появлением погрешностей. Так, отечественная машина МН-14 допускает продолжительность интегрирования в 10 000 с, а машина МН-7 — 150 с.

Найдем ошибку интегратора от напряжения дрейфа нуля. Для этого, как и раньше при рассмотрении ошибок сумматора, будем считать, что на входе ОУ действует дополнительное напряжение $-e_0(t)$, компенсирующее действие дрейфа. Выходное напряжение ОУ будет равно $u_{\text{вых}} = -K[e_g - e_0(t)]$, откуда $e_g = -\frac{u_{\text{вых}}}{K} + e_0(t)$. Подставляя последнее выражение в формулу (2.9) и учитывая, что $\frac{u_{\text{вых}}}{K} \approx 0$, получим

$$u_{\text{вых}}(t) = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i C} \int_0^t u_i dt + e_0(t) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i C} \int_0^t e_0(t) dt.$$

Последние два слагаемых в правой части представляют собой искомую ошибку интегратора от дрейфа нуля:

$$\Delta u_{\text{вых}}(t) = -e_0(t) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i C} \int_0^t e_0(t) dt. \quad (3.7)$$

Эта ошибка тем больше, чем больше величины коэффициентов передачи $\frac{1}{R_1C}$ интегратора и чем продолжительнее процесс интегрирования. Нижний нулевой предел интегрирования в выражении ошибки (3.7) соответствует моменту окончания последней настройки нуля ОУ.

3. Ошибки блока дифференцирования. Выходная переменная идеального блока дифференцирования в соответствии с (2.19), выражается зависимостью

$$u_{\text{вых}}(t) = -RC \frac{du_{\text{вх}}}{dt},$$

из которой следует выражение ошибки, вызванной существованием помехи и погрешностей параметров:

$$\Delta u_{\text{вых}}(t) = (C\delta R + R\delta C) \frac{du_{\text{вых}}}{dt} - RC \frac{d\eta(t)}{dt}. \quad (3.8)$$

Для определения структурной ошибки, вызванной конечностью величины K — коэффициента усиления ОУ, воспользуемся выражением (2.22). Из него видно, что выходное напряжение блока дифференцирования удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению с правой частью

$$\frac{RC}{K+1} \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + u_{\text{вых}} = -\frac{K}{K+1} RC \frac{du_{\text{вх}}}{dt}.$$

Следовательно, ошибка зависит от дифференцируемой функции. В качестве иллюстрации исследуем ошибку от дифференцирования функции $u_{\text{вх}}(t) = \alpha t$. На выходе идеального блока дифференцирования в соответствии с (2.19) должно быть постоянное напряжение $u_{\text{вых}} = -\alpha RC$. Выражение выходного напряжения реального блока находится путем интегрирования дифференциального уравнения

$$\frac{RC}{K+1} \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + u_{\text{вых}} = -\frac{K}{K+1} \alpha RC$$

с начальным условием $u_{\text{вых}}(0) = 0$. Решение уравнения есть

$$u_{\text{вых}}(t) = -\frac{KRC\alpha}{K+1} \left[1 - \exp\left(-\frac{K+1}{RC} t\right) \right].$$

Отсюда ошибка

$$\Delta u_{\text{вых}} \approx -\alpha RC \exp\left(-\frac{K+1}{RC} t\right). \quad (3.9)$$

Из (3.9) видно, что ошибка блока дифференцирования меняется во времени и тем больше, чем больше α — скорость изменения входной переменной. Наибольшая ошибка соответствует моменту

времени $t=0$ и равна $\Delta u_{\text{вых}}(0) = -\alpha RC$. С течением времени погрешность убывает тем сильнее, чем больше коэффициент усиления ОУ, так что появление значения производной на выходе блока запаздывает примерно на $4RC/(K+1)$ секунд.

Для определения ошибки от дрейфа нуля будем считать, что на входе ОУ действует дополнительное компенсирующее напряжение $-e_0(t)$. Тогда напряжение на входе ОУ будет $e_g = -\frac{u_{\text{вых}}}{K} + e_0(t)$. Подставляя это выражение в (2.18) и учитывая, что $\frac{u_{\text{вых}}}{K}$ мало, получим

$$u_{\text{вых}}(t) = -RC \frac{du_{\text{вх}}}{dt} + RC \frac{de_0(t)}{dt} + e_0(t).$$

Два последних слагаемых в правой части этого равенства представляют собой ошибку блока дифференцирования от дрейфа нуля.

4. Ошибки нелинейных блоков. Анализ ошибок нелинейных блоков требует детального исследования электрических процессов, протекающих в электронных схемах. Проводить такой анализ мы не имеем возможности. Наиболее часто употребляемый в нелинейных блоках элемент — полупроводниковый или ламповый диод. Рассчитывая и конструируя нелинейные блоки АВМ, обычно идеализируют работу диодов. На рис. 3.2 показана пунктиром реальная вольт-амперная характеристика диода, а сплошной линией — идеализированная характеристика. Здесь i — ток, протекающий через диод, u — приложенное к диоду напряжение. Из рисунка следует, что значительных погрешностей нелинейных блоков следует ожидать в области малых изменений машинных переменных.

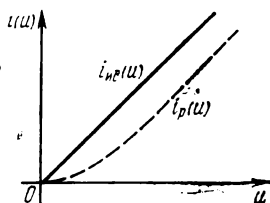


Рис. 3.2.

5. Сопоставление ошибок операционных блоков. У различных блоков АВМ в зависимости от реализуемых ими математических операций по-разному проявляются ошибки, вызванные одними и теми же причинами. Так, структурные погрешности сумматора, интегратора и блока дифференцирования, вызванные конечностью величины коэффициента усиления ОУ, уменьшаются с ростом величины коэффициента усиления. Однако у блока дифференцирования наибольшие погрешности появляются в начальный момент работы машины, у интегратора погрешности нарастают с течением времени, а у сумматора не зависят от времени. Различна чувствительность блоков дифференцирования и интегрирования к помехам. Для помех вообще характерна большая скорость изменения, чем для идеальной переменной, поэтому при

дифференцировании в соответствии с (3.8) относительная величина помехи резко возрастает. Производная геометрически представляет собой тангенс угла наклона касательной к кривой. На рис. 3.1 для некоторого момента времени t^* показано положение касательной к идеальной кривой и к помехе, отсюда видно, что, дифференцируя реальную машинную переменную, можно ошибиться не только в значении производной, но даже в знаке производной. Все это происходит от того, что операция дифференцирования по своему математическому смыслу является локальной. В противоположность этому чувствительность операции интегрирования к помехам — гораздо меньшая. Из рис. 3.1 видно, что в процессе интегрирования положительные и отрицательные площадки, ограниченные кривой $\eta(t)$, взаимно компенсируют друг друга и в малой степени влияют на результат операции. Эта разная чувствительность операций к помехам в первую очередь определяется глубоким различием математического содержания операций дифференцирования и интегрирования, а не особенностями блоков АВМ.

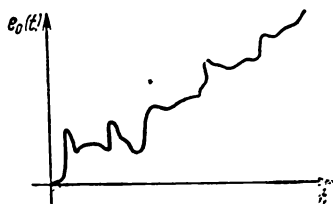


Рис. 3.3.

Типичная картина изменения во времени напряжения дрейфа нуля показана на рис. 3.3. Из рисунка следует, что для этого напряжения характерно изменение в одном направлении. Напряжение дрейфа нуля с течением времени нарастает. Поэтому погрешность, вызванная им при выполнении операции интегрирования, должна нарастать с длительностью интегрирования.

Из рисунка следует, что для этого напряжения характерно изменение в одном направлении. Напряжение дрейфа нуля с течением времени нарастает. Поэтому погрешность, вызванная им при выполнении операции интегрирования, должна нарастать с длительностью интегрирования.

§ 3. Добротность АВМ

Из-за сложности априорной оценки точности результата, получаемого на АВМ, в зависимости от ошибок операционных блоков, помех и точности измерительной аппаратуры часто вводится обобщенная характеристика точности, называемая *добротностью* АВМ.

Добротность АВМ исчисляется по формуле

$$d = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\min}} \approx \frac{E_{\max}}{E_{\min}}.$$

E_{\max} определяется максимально допустимым значением машинной переменной и для ламповых машин $E_{\max} = 100$ В. E_{\min} является нижней допустимой границей изменения машинных переменных. Величина E_{\min} находится экспериментально для каждой конкретной АВМ. Численное значение E_{\min} зависит от уровня помех в машине, от ошибок операционных блоков, от точности ис-

пользуемой измерительной аппаратуры. Если машинная переменная в течение значительного промежутка времени была меньше E_{\min} и, следовательно, была соизмерима с помехой, результат решения задачи может содержать значительные ошибки.

У лучших современных машин при $E_{\max}=100$ В величина $E_{\min}=0,1$ В и добротность АВМ $d=10^3$. Значение десятичного логарифма от добротности $m=\lg d$ представляет собой число верных знаков, которые могут быть получены на машине при рациональном использовании ее рабочего диапазона.

§ 4. Вопросы

1. Что представляют собой структурные и параметрические ошибки операционных блоков АВМ?

2. В чем проявляются помехи и каковы источники их возникновения в АВМ?

3. Провести сравнение влияния помех на результаты различных операций.

4. Какие факторы ограничивают величину коэффициентов передачи операционных блоков?

5. Чем ограничена длительность воспроизведения решения какой-либо задачи на АВМ?

6. Что такое добротность АВМ и какие факторы на нее влияют?

7. Операция дифференцирования иногда выполняется по методу неявных функций с помощью схемы, показанной на рис. 3.4.

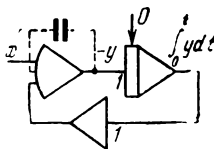


Рис. 3.4.

1) Доказать, что схема рис. 3.4 разрешает неявное уравнение $F(y) = x(t) - \int_0^t y(t) dt = 0$ относительно y путем воспроизведения решения дифференциального уравнения

$$y' = -K \left[x(t) - \int_0^t y(t) dt \right] \operatorname{sign} |F'_y|,$$

с начальным условием $y(0) = 0$, где K — коэффициент усиления ОУ.

2) Доказать, что $y(t) = x'(t) + \delta(t)$, где $\delta(t)$ — погрешность блока дифференцирования, представляющая собой периодическую функцию периода $T = 2\pi\sqrt{K}$. Найти дифференциальное уравнение для $\delta(t)$ и, решая его, определить погрешность при дифференцировании функций $x(t) = at, \sin t$.

8. Определить погрешность интегратора, вызванную конечностью коэффициента усиления ОУ, при интегрировании функции $A \sin \omega t$. Исследовать погрешность в зависимости от A и ω .

9. Определить погрешность блока дифференцирования рис. 2.32, а) из-за конечности коэффициента усиления ОУ при дифференцировании функции $A \sin \omega t$. Исследовать погрешность в зависимости от A и ω .

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ АВМ

§ 1. Язык и этапы программирования

Решению задач с помощью АВМ предшествует подготовительная работа, называемая *программированием*. В процессе программирования по данным математическим зависимостям определяются необходимые операционные блоки и способ их соединения для воспроизведения решения исходной задачи. Кроме того, при программировании устанавливается соответствие между математическими переменными решаемой задачи и машинными переменными АВМ.

Окончательный результат программирования (программа) оформляется либо в виде коммутационных таблиц, либо в виде коммутационных блок-схем, которые при подготовке АВМ к работе используются для электрической коммутации и настройки операционных блоков.

В программе должна быть отражена вся необходимая информация для организации работы АВМ по решению данной задачи. Результат *масштабирования* обычно представляется в виде так называемых *масштабных таблиц*, содержащих перечень математических переменных, соответствующие им машинные переменные и числовые значения масштабов.

Процесс программирования АВМ неразрывно связан с записью программы в каком-либо виде. К форме записи программы (или, как говорят, — к *языку программирования*) предъявляется ряд требований. Главнейшие из них — наглядность, компактность представления программ при однозначном ее толковании; доступность для понимания содержания программ широким кругом лиц, занимающихся программированием АВМ. При сравнении табличного и блок-схемного способа записи программ АВМ предпочтение обычно отдается блок-схемному представлению программ из-за универсальности, наглядности, доходчивости и из-за удобства использования этого способа при публикациях. Табличная форма записи, содержащая перечень потребных операционных блоков и связей между ними, более компактна, но менее наглядна и сильно ориентирована на конкретную АВМ, на которой предполагается решать данную задачу. Поэтому при

программировании АВМ в настоящее время повсеместно используется язык блок-схем. На этом языке можно описать программы для любой АВМ. Язык блок-схем — язык графический. Мы уже на протяжении трех глав, не оговаривая этого особо, пользуемся языком блок-схем. Язык блок-схем содержит два элемента: *блоки* и *связи*.

Блоки изображаются в виде геометрических фигур (прямоугольники, кружки, треугольники и т. д.). За некоторыми типами операционных блоков АВМ по договоренности раз и навсегда закреплены определенные соответствующие им геометрические изображения. Характер соответствия между операционными блоками АВМ и блоками языка блок-схем описывается в тексте, поясняющем блок-схемы. В случае необходимости внутри геометрических фигур вписываются те математические соотношения, которые реализуют операционные блоки АВМ, представленные этими фигурами.

Связи — линии (когда необходимо — с указанием направления), показывающие, с какого блока на какой поступает выработанная блоком информация (переменные, результаты операции). На первый взгляд может показаться, что факт существования связи между двумя операционными блоками не означает выполнения какой-либо операции. В действительности же наличие связи между блоками обеспечивает выполнение так называемой операции присваивания. Эта операция особого рода. Ее смысл в том, что входная переменная одного операционного блока непрерывно устанавливается тождественно равной меняющейся выходной переменной другого блока.

При программировании АВМ используются до четырех уровней языка блок-схем. Уровни языка отличаются степенью детализации информации об организации вычислительного процесса на АВМ. Перечислим уровни, начиная с высшего: уровень *укрупненных блок-схем*, уровень *структурных схем*, уровень *коммутиционных схем*, уровень *электрических схем*.

Для иллюстрации представим на различных уровнях языка блок-схем программу воспроизведения на АВМ, решения дифференциального уравнения $x'(t) - y(t) \cdot x(t) = z(t)$ с начальным условием $x(0) = x_0$. Здесь $y(t)$ — переменный коэффициент, равный $\frac{1}{1+t}$; $z(t)$ — правая часть дифференциального уравнения, равная $-\exp(-t)$.

На рис. 4.1, а) показана блок-схема АВМ, представленная на языке самого высокого уровня. Схема содержит три блока и тем самым показывает, что для организации решения исходного уравнения целесообразно отдельно воспроизвести переменный коэффициент $y(t) = \frac{1}{1+t}$, затем правую часть уравнения

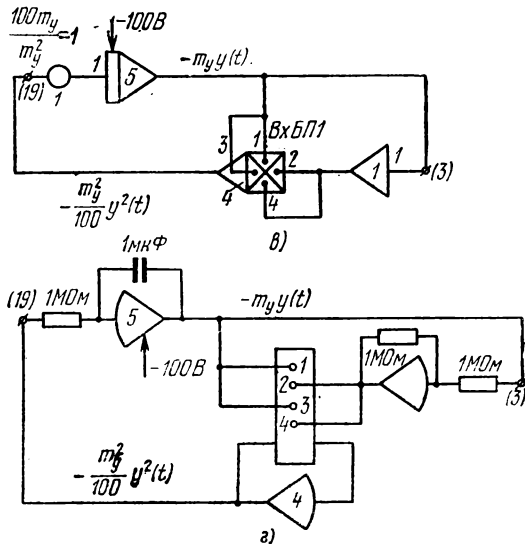
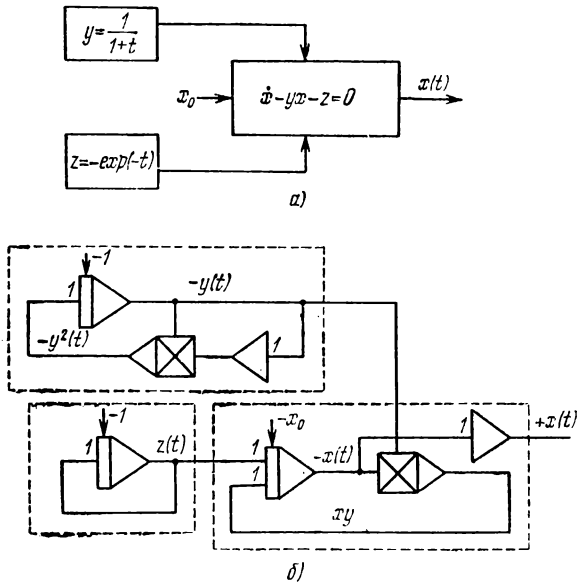


Рис. 4.1.

$z(t) = -\exp(-t)$, и лишь имея $y(t)$, $z(t)$, реализовать уже собственно решение уравнения.

На рис. 4.1, б) показана блок-схема той же задачи, но уже в структурном представлении. Структурная схема, как и ранее рассмотренная блок-схема, не ориентирована на какую-либо конкретную АВМ. Структурная схема детализируется до отдельных операционных блоков некоторой абстрактной, гипотетической АВМ.

Схема составляется для математических переменных и отражает в достаточно общем виде основную идею, принцип организации связей между операционными блоками, обеспечивающий воспроизведение искомого решения. Для удобства сравнения на рис. 4.1, б) группы операционных блоков, соответствующие блокам рис. 4.1, а), обведены пунктиром.

На рис. 4.1, в) показана часть блок-схемы, которая воспроизводит функцию $-y(t) = -\frac{1}{1+t}$. Такие блок-схемы называют коммутационными. Коммутационная схема ориентирована уже на конкретную АВМ, на которой предполагается воспроизводить решение задачи. В силу этого коммутационная схема отражает специфические особенности соединения блоков, присущие АВМ данного типа. Эти специфические особенности проявляются в том, что строение (или, как говорят, топология) коммутационной схемы АВМ может не повторять топологию соответствующей структурной схемы. На коммутационных схемах проставляются номера используемых операционных блоков и номера использованных входов этих блоков в соответствии с наборным полем конкретной АВМ. Схема рис. 4.1, в) ориентирована на машину МН-7*). В коммутационных схемах переменные представлены в виде машинных переменных — электрических напряжений. Машинная переменная некоторой математической переменной $y(t)$ равна произведению $m_y y(t)$ вольт. Здесь m_y — масштаб представления математической переменной электрическим напряжением в машине. На коммутационных схемах проставляются числовые значения коэффициентов передачи операционных блоков и потенциометров с учетом выбранных масштабов. Коммутационные схемы используют при наборе задач на наборном поле машины. Связям (линиям) коммутационной схемы соответствуют электрические проводники с однополюсными вилками на концах.

На рис. 4.1, г) представлена еще более детализированная блок-схема. Здесь детализация выполнена до уровня операционных усилителей и радиодеталей (конденсаторы, резисторы), образующих входные цепи и цепи обратных связей операционных блоков. Такие блок-схемы называют электрическими. Эти схемы

*) См. приложение.


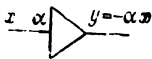
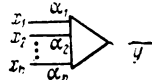
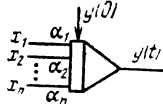
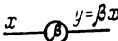
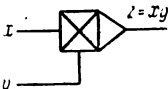
Операционный усилитель	
Масштабный усилитель	
Сумматор	 $y = - \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$
Интегратор (интегросумматор)	 $y = - \int_0^t \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j(t) dt + y(0)$
Потенциометр	
Блок перемножения	 $z = xy$

Рис. 4.2.


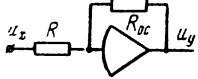
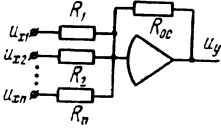
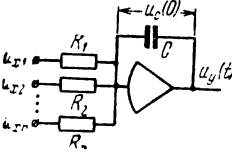
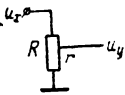
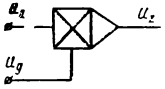
	<p>$K \geq 4 \cdot 10^4$ — коэффициент усиления</p>
 $u_y = - \frac{R_{oc}}{R} u_x$	<p>$\alpha = \frac{R_{oc}}{R}$ — коэффициент передачи масштабного усилителя</p>
 $u_y = - \sum_{j=1}^n \frac{R_{oc}}{R_j} u_{xj}$	<p>$\alpha_j = \frac{R_{oc}}{R_j}$ — коэффициент передачи сумматора по j-му входу</p>
 $u_y(t) = - \int_0^t \sum_{j=1}^n \frac{u_{xj}(t)}{R_j C} dt + u_c(0)$	<p>$\alpha_j = \frac{1}{R_j C}$ — коэффициент передачи интегратора по j-му входу</p>
 $u_y = \frac{r}{R} u_x$	<p>$\beta = \frac{r}{R}$ — коэффициент передачи потенциометра $0 \leq \beta \leq 1$</p>
 $u_z = \frac{u_x u_y}{100}$	<p>$\frac{1}{100}$ — схемный масштаб блока перемножения</p>

Рис. 4.2.

часто используют вместо коммутационных при наборе задач на наборном поле АВМ.

Таблица обозначений основных операционных блоков и их электрических эквивалентов представлена на рис. 4.2.

Весь процесс программирования АВМ удобно разбить на четыре этапа: этап I — анализ исходной задачи; этап II — разработка структурной схемы АВМ; этап III — проведение масштабирования математических переменных машинными переменными; этап IV — разработка коммутационной схемы АВМ.

На первом этапе математические выражения исходной задачи анализируются с целью приведения их в форму, удобную для реализации на АВМ. Дело в том, что решение ряда задач в их первоначальной математической постановке не удается воспроизвести на АВМ. Вычислительные особенности АВМ наиболее приспособлены для воспроизведения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, заданных в форме задачи Коши. Поэтому успешное решение на АВМ других задач, не связанных в первоначальной постановке с обыкновенными дифференциальными уравнениями, порой возможно лишь после того, как с помощью специальных приемов и методов исходные задачи сведены к некоторым эквивалентным задачам Коши. Изложение методов такой математической «перепостановки» задач представляет содержание большинства последующих глав.

На втором этапе разрабатываются структурные схемы АВМ. Поскольку в большинстве случаев исходные данные приведены к эквивалентной задаче Коши, основным методом программирования АВМ является способ построения структурных схем для воспроизведения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Детальное содержание этих способов изложено в следующей главе.

Однако следует иметь в виду, что один и тот же выбранный метод воспроизведения решения на АВМ может быть представлен различными структурными схемами. Эти структурные схемы эквивалентные в смысле реализуемой задачи, отличаются друг от друга типами используемых блоков, количеством блоков и характером связей между ними. Поэтому важно разработать не только правильную структурную схему АВМ, но и наилучшую в некотором смысле.

В понятие «наилучшая структурная схема» может вкладываться разнообразный смысл в зависимости от решаемой задачи и типа АВМ, на которой воспроизводится решение. Но все же всегда при оценке качества структурной схемы предпочтение отдается той схеме, которая при прочих равных условиях требует наименьших затрат труда и времени на подготовку АВМ к воспроизведению решения. Обычно из двух структурных схем предпочтительней та, которая при прочих равных условиях со-

держит наименьшее количество операционных блоков. Однако различные типы операционных блоков АВМ неравноценны по точности выполнения операций и по затратам труда, связанным с подготовкой и настройкой блоков к работе. Построение экономичных структурных схем АВМ, содержащих малое количество операционных блоков, по-видимому, целесообразно тогда, когда есть достаточные основания опасаться, что операционных блоков может не хватить для реализации задачи. Если же свободных операционных блоков имеется достаточное количество, то, наоборот, проводить режим жесткой экономии операционных блоков вряд ли целесообразно. Важна здесь еще и плата за экономию операционных блоков. Чаще всего уменьшение количества оборудования сопровождается уменьшением информации о явлении, исследуемом на АВМ. Эта потеря информации может быть столь велика, что полученные с помощью АВМ результаты не будут соответствовать нуждам задуманного исследования.

Примером могут служить две структурные схемы, показанные на рис. 4.3, а) и б). Обе схемы воспроизводят решение одного и того же дифференциального уравнения с начальными условиями

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \quad y'(0) = y'_0, \quad y(0) = y_0.$$

Схема рис. 4.3, а) более экономична, она содержит на один сумматор меньше. В ней функции сумматора и интегратора совмещены в одном операционном блоке: в интегросумматоре. Однако эта структурная схема менее информативна, чем схема рис. 4.3, б), так как в ней не вырабатывается переменная $y''(t)$.

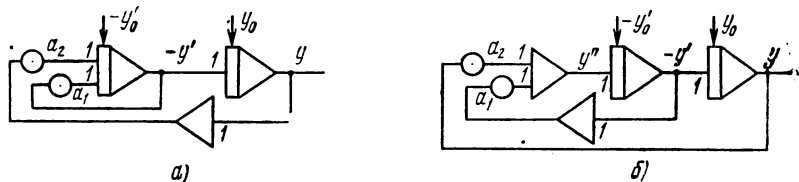


Рис. 4.3.

Поэтому ее целесообразно использовать лишь, когда поведение переменной $y''(t)$ не представляет интереса при исследовании.

Содержание третьего и четвертого этапов будет раскрыто полно в последующих параграфах и главах. В заключение же этого параграфа остановимся на вопросах организации контроля функционирования АВМ, которые тесно связаны с первыми двумя этапами программирования.

Потребность в контроле работы АВМ вызвана возможностью ухудшения ее функционирования. В процессе работы АВМ выходят из строя электронные лампы и полупроводниковые приборы, изменяются параметры операционных блоков из-за старения радиодеталей, меняется влажность и температура окружающей среды, нарушаются электрические соединения между входами

и выходами операционных блоков из-за обрывов коммутационных шнуров и потери контактов в наборном поле АВМ. Все это может привести либо к полной утрате результата, получаемого на АВМ, либо к ухудшению точности результата. Организация контроля функционирования АВМ позволяет человеку-оператору, работающему на АВМ, своевременно выявить нарушения в работе и принять необходимые меры. Особенно важен контроль специализированных АВМ, работающих в системах автоматического управления. Здесь требования к надежности и качеству контроля функционирования машин повышены.

Неправильное функционирование АВМ в системе автоматического управления может привести даже к гибели объекта управления. Поэтому сам по себе факт выявления ошибок в работе АВМ не спасает положение. Здесь работа системы управления должна быть организована так, чтобы отдельные ошибки функционирования АВМ не сказывались на качестве управления и тем более на жизнеспособности управляемого объекта. Обычно эта нечувствительность к отдельным погрешностям функционирования АВМ достигается ценой большой избыточности числа используемых операционных блоков.

Способ контроля функционирования АВМ основан на автоматической проверке некоторых *контрольных соотношений*. Часто уже на стадии анализа исходной задачи удается отыскать математические выражения, которым должны удовлетворять переменные решаемой задачи. Эти контрольные соотношения приводятся к виду

$$\Phi(y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_n) = 0, \quad (4.1)$$

где $y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_n$ — переменные решаемой задачи. Соотношениями типа (4.1) можно пользоваться для контроля лишь тогда, когда они не использованы для разработки схем АВМ, воспроизводящих решение данной задачи. Наряду со схемой АВМ, воспроизводящей решение исходной задачи, создается контрольная схема, реализующая контрольные соотношения (4.1).

При воспроизведении решения дифференциального уравнения очень часто роль контрольного соотношения может играть само дифференциальное уравнение, в которое аппаратно производится «подстановка» решения. Так, для дифференциального уравнения

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$$

с начальными условиями $y'(0) = y'_0$, $y(0) = y_0$ структурная схема со схемой контроля, осуществляющей «аппаратурную» подстановку переменных $y(t)$, $y'(t)$, $y''(t)$ в исходное уравнение, показана на рис. 4.4. Для этого используется дополнительный сумматор на три входа, изображенный в нижней части структурной схемы рис. 4.4. На выходе сумматора вырабатывается переменная $z = -10(y'' + a_1 y' + a_2 y)$.

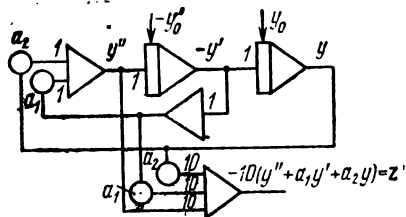


Рис. 4.4.

Если бы АВМ осуществляла операции идеально точно, то переменная z была бы тождественно равна нулю. В реальных условиях переменная z отлична от нуля, ее величина характеризует степень несоответствия решения, выработанного АВМ, заданному уравнению. Для удобства измерения переменной z все коэффициенты передачи контрольного сумматора взяты равными десяти.

Для исходных переменных порой бывает затруднительно найти подходящее контрольное соотношение. Однако положение существенно упрощается, если ввести некоторые дополнительные (*избыточные*) переменные. Эти переменные вводятся исключительно для удобства организации контроля и, как

вий (4.1) АВМ сама автоматически будет прерывать процесс воспроизведения решения задачи с одновременным оповещением человека-оператора о неполадках. Однако надо иметь в виду, что, как правило, чем совершеннее и богаче по своим возможностям схема контроля, тем больше она потребляет для своей реализации операционных блоков. Важно здесь и то, что функционирование этих контрольных блоков по мере роста их числа, вообще говоря, все более и более само нуждается в контроле.

§ 2. Масштабирование зависимых переменных

Математические переменные в АВМ с помощью масштабов представляются в виде физических величин — машинных переменных. Зависимым математическим переменным в АВМ соответствуют машинные переменные — электрические напряжения. Независимой математической переменной в АВМ соответствует время.

Масштабирование зависимых математических переменных — один из наиболее ответственных и сложных этапов программирования из-за противоречивости требований, предъявляемых к выбору масштабов. Главнейших требований три.

Первое — ни одна машинная переменная не должна выходить из рабочего диапазона линейности усилителей, ограниченного интервалом ± 100 В (для ламповых машин). Вне этого диапазона выполнение операций блоками АВМ сопровождается большими погрешностями.

Второе — машинные переменные должны быть «наблюдаемы». Это значит, что они не должны быть малы или изменяться слишком быстро, иначе их нельзя будет с достаточной точностью зафиксировать измерительной или запишывающей аппаратурой. Значение машинной переменной считается малым, если оно соизмеримо с погрешностями операционных блоков АВМ.

Третье — машинная переменная не должна оставаться малой в течение значительного промежутка времени, ибо это может привести к отсутствию повторяемости результатов при повторном решении той же задачи из-за случайного характера погрешностей блоков АВМ.

Зависимые математические переменные x , y , z в АВМ представляются электрическими напряжениями $u_x = m_x x$, $u_y = m_y y$, $u_z = m_z z$ с помощью масштабов m_x , m_y , m_z . Масштабы имеют

размерность: $\left[\frac{\text{ВОЛЬТ}}{\text{единица измерения переменной}} \right]$. Масштабы применяются в виде постоянных величин и в виде функций независимого переменного t — времени. Выбор типа масштаба зависит от характера изменения математической переменной. На рис. 4.5 показан график переменной $x_1(t)$. Для нее масштаб следует взять зависящим от времени так, чтобы на интервале от 0 до t_1 он был велик, а на интервале $[t_1, t^*]$ мал. Этим будет удов-

летворено третье требование. Если переменная, например, $x_2(t)$ на интервале $[0, t^*]$ изменяется достаточно «равномерно», то можно обойтись постоянным масштабом.

1. Расчет постоянных масштабов. Первые два требования (наблюдаемость напряжений и изменение их в границах ± 100 В) почти всегда выполняются автоматически, когда масштабы выбираются по формулам

$$m_x = \frac{100}{x_{\max}} \left[\frac{\text{вольт}}{\text{единица измерения}} \right], \quad (4.4)$$

$$m_y = \frac{100}{y_{\max}} \left[\frac{\text{вольт}}{\text{единица измерения}} \right].$$

Для примера проведем расчет масштабов переменных, для которых известны границы их измене-

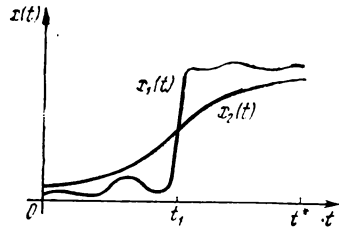


Рис. 4.5.

ния: расстояние s изменяется в границах $0 \leq s \leq 4300$ м; угловое ускорение $\ddot{\theta}$ изменяется в границах $-20 \leq \ddot{\theta} \leq 10$ рад/с²; температура T изменяется в границах $190^\circ \leq T \leq 390^\circ$.

Расчет масштабов удобно выполнять в *масштабных таблицах*, типа табл. 1.

Таблица 1

(1) Переменная	(2) Максимальное абсолютное значение переменной	(3) Округленное значение	(4) Величина масштаба	(5) Обозначение масштаба
s	4300 м	5000	$\frac{100}{5000} = 0,02$ В/м	m_s
$\ddot{\theta}$	20 рад/с ²	20	$\frac{100}{20} = 5 \frac{\text{В} \cdot \text{с}^2}{\text{рад}}$	$m_{\theta 2}$
T	390 град	400	$\frac{100}{400} = 0,25 \frac{\text{В}}{\text{град}}$	m_T

Содержание столбца (3) этой таблицы нуждается в пояснении. Величины в столбце (3) получены из соответствующих величин столбца (2) путем округления (когда это необходимо) до ближайшего большего числа вида $1 \times 10^{\pm n}$; $2 \times 10^{\pm n}$; $4 \times 10^{\pm n}$; $5 \times 10^{\pm n}$, где n — целое.

Использование таких чисел облегчает проведение расчетов, связанных с переходом от машинных переменных к математическим и обратно.

Иногда при программировании АВМ удается содержимое столбца (2) представить не числами, а некоторыми выражениями, зависящими от параметров решаемой задачи. Такое масштабирование «в общем виде» дает возможность получать коммутационные схемы, позволяющие воспроизвести на АВМ решение целого класса сходных задач, отличающихся лишь числовыми значениями исходных данных.

2. Согласование масштабов. Выбор масштабов для всех зависимых математических переменных в соответствии с выражением (4.4) по их максимальным значениям требует последующего согласования масштабов. Основная причина этого в том, что масштабы представления переменных при выполнении операций над машинными переменными должны удовлетворять определенным соотношениям, зависящим от вида операции и способа ее реализации на АВМ. Для согласования масштабов используются потенциометры и масштабные усилители.

Проиллюстрируем методику согласования масштабов на примере ряда операций. Основу методики составляет известный в алгебре способ неопределенных коэффициентов. Применительно к рассматриваемым вопросам способ сводится к приравниванию коэффициентов исходного математического выражения коэффициентам математического выражения, отражающего работу операционных блоков АВМ. В этом последнем математическом выражении фигурируют машинные переменные, выраженные через известные масштабы и через подлежащие определению коэффициенты передачи потенциометров и масштабных усилителей. В результате приравнивания удается получить систему уравнений относительно искомым коэффициентов передачи.

1) Сложение. Необходимо воспроизвести на АВМ линейную комбинацию двух переменных x и y :

$$-z = \beta_x x + \beta_y y, \quad (4.5)$$

где β_x и β_y — заданные положительные числа.

Структурная схема, воспроизводящая переменную z , представлена на рис. 4.6, а), где потенциометры на входе сумматора осуществляют умножение переменных x и y на коэффициенты β_x и β_y .

Пусть масштабы представления переменных x , y , z уже выбраны по максимальным значениям x_{\max} , y_{\max} , z_{\max} и соответственно равны m_x , m_y , m_z . На рис. 4.6, а) справа показана коммутационная схема, соответствующая структурной схеме. Как всякая коммутационная схема, эта схема составлена для машинных переменных, поэтому коэффициенты передачи α_x и α_y еще не определены. Их необходимо подобрать так, чтобы машинная переменная, соответствующая переменной z , была представлена именно в масштабе m_z . Для определения α_x и α_y запишем по схе-

ме аналитическое выражение, связывающее машинные переменные $m_z z$, $m_x x$, $m_y y$:

$$-m_z z = \alpha_x m_x x + \alpha_y m_y y. \quad (4.6)$$

После деления (4.6) на m_z получаем:

$$-z = \frac{\alpha_x m_x}{m_z} x + \frac{\alpha_y m_y}{m_z} y. \quad (4.7)$$

Сравнивая теперь коэффициенты при одинаковых переменных в выражениях (4.5) и (4.7), находим

$$\beta_x = \frac{\alpha_x m_x}{m_z}, \quad \beta_y = \frac{\alpha_y m_y}{m_z},$$

отсюда искомые

$$\alpha_x = \beta_x \frac{m_z}{m_x}, \quad \alpha_y = \beta_y \frac{m_z}{m_y}. \quad (4.8)$$

Коэффициенты β_x и β_y , входящие в исходное математическое выражение и отмеченные на структурных схемах, называют структурными коэффициентами. Коэффициенты передачи α_x и α_y , отмеченные на коммутационной схеме, называют масштабными

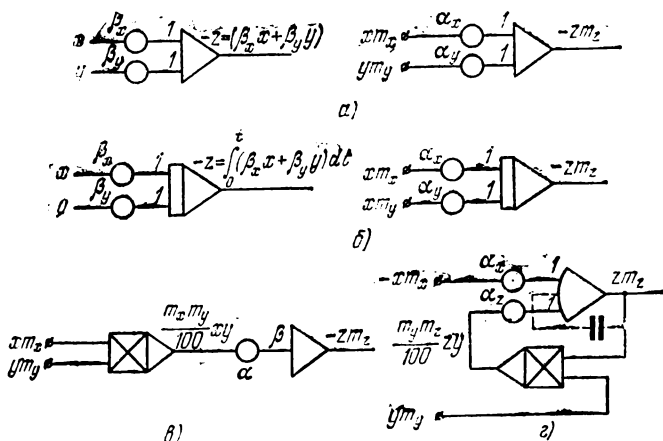


Рис. 4.6.

коэффициентами. Этим в названии подчеркивается важная функция по согласованию масштабов, которую выполняют потенциометры коммутационных схем. Итак, согласование масштабов при реализации выражения (4.5) приводит к выводу: масштабный коэффициент равен произведению структурного коэффициента на отношение масштабов выходной и входной переменных.

2) Интегрирование. Пусть необходимо на АВМ реализовать выражение

$$z = - \int_0^t (\beta_x x + \beta_y y) dt, \quad (4.9)$$

где β_x и β_y — некоторые заданные положительные числа, а x и y — некоторые функции независимого переменного t .

Предполагается, что масштабы m_x, m_y, m_z переменных x, y, z уже определены по максимальным значениям $x_{\max}, y_{\max}, z_{\max}$. На структурной схеме рис. 4.6, б) представлен интегратор, реализующий исходное аналитическое выражение (4.9). На рис. 4.6, б) справа представлен коммутационный вариант интегратора с двумя неизвестными коэффициентами передачи потенциометров α_x и α_y , которые подбираются из условия согласованности масштабов. Для электрических напряжений справедливо следующее уравнение:

$$zm_z = - \int_0^t (\alpha_x m_x x + \alpha_y m_y y) dt.$$

Поделив его на m_z , получим:

$$z = - \int_0^t \left(\alpha_x \frac{m_x}{m_z} x + \alpha_y \frac{m_y}{m_z} y \right) dt.$$

Сравнивая коэффициенты исходного равенства и последнего, имеем такие же выражения, как и при сложении:

$$\alpha_x = \frac{m_z}{m_x} \beta_x, \quad \alpha_y = \frac{m_z}{m_y} \beta_y.$$

3) Умножение. На АВМ необходимо выполнить операцию умножения $z = -\gamma xy$, где γ — некоторое положительное число. Масштабы переменных x, y, z фиксированы и равны m_x, m_y, m_z . Операция выполняется по коммутационной схеме рис. 4.6, в). Коэффициенты передачи потенциометра α и масштабного усилителя β подлежат определению из условия согласованности масштабов.

Запишем уравнение, связывающее электрические напряжения $-m_z z = \alpha \cdot \beta \frac{m_x m_y}{100} xy$. Знаменатель 100 соответствует схемному масштабу блока перемножения. Поделив последнее уравнение на m_z и сравнив коэффициенты с исходным выражением, получаем

$$\alpha \beta = \frac{100 m_z}{m_x \cdot m_y} \cdot \gamma.$$

4) Деление. На АВМ необходимо выполнить операцию деления $z = \gamma \frac{x}{y}$, где γ — некоторое данное положительное число.

Масштабы переменных x , y , z фиксированы и равны m_x , m_y , m_z . Когда операция деления производится по методу неявных функций, исходное выражение $z = \gamma \frac{x}{y}$ приводится к уравнению

$$\frac{1}{\gamma} zy - x = 0,$$

которое разрешается относительно z . Соответствующая коммутационная схема АВМ показана на рис. 4.6, з). Два потенциометра с коэффициентами передачи α_z и α_x необходимы для согласования масштабов. Алгебраическая сумма входных переменных на входе ОУ равна нулю, поэтому имеем равенство:

$$\alpha_z \frac{m_z m_y}{100} zy - \alpha_x m_x x = 0. \text{ Поделив это равенство на } \alpha_z m_x \text{ и срав-}$$

нив его коэффициенты с уравнением $\frac{1}{\gamma} zy - x = 0$, получим для подбора коэффициентов α_z и α_x соотношение

$$\frac{\alpha_x}{\alpha_z} = \frac{m_z m_y}{100 \cdot m_x} \gamma.$$

3. Трудности масштабирования. Масштабирование зависимых переменных наталкивается на трудности, вызванные оценкой максимальных значений математических переменных еще до воспроизведения решения на АВМ. Напомним, что масштаб переменной $x(t)$ исчисляется по формуле $m_x = \frac{100}{|x_{\max}|}$, куда входит x_{\max} . Максимальное значение переменной $x(t)$ на некотором интервале $[0, t^*]$ может достигаться либо на границе интервала, либо внутри его. Некоторые случаи приведены на рис. 4.7. Для монотонных функций рис. 4.7, а) и б) максимальные значения достигаются на границах интервала. На рис. 4.7, в) изображена функция, максимальное значение которой совпадает со значением локального экстремума. Более общий случай поведения $x(t)$ показан на рис. 4.7, г). Из него следует, что максимальное значение x_{\max} переменной $x(t)$, используемое для расчета масштаба, определяется выражением

$$x_{\max} = \max \{ |x(0)|, |x(t_1)|, \dots, |x(t_k)|, |x(t^*)| \},$$

где t_1, t_2, \dots, t_k — точки локальных экстремумов.

Ясно, что определить максимальную величину переменной заранее, не решая задачу, удастся далеко не всегда. Все же иногда диапазон изменения переменных можно выявить уже на этапе анализа исходной задачи. Чаше же всего при решении физических задач путем исследования их физического содержания подыскивают такую задачу, сходную по смыслу и допускающую простое аналитическое решение, чтобы можно было оценить

максимальные значения переменных исходной задачи. Эту вспомогательную задачу называют *масштабной задачей*.

Когда трудно сделать какие-либо достаточно обоснованные предположения относительно границ изменения переменных в выборе масштаба, прибегают к методу проб с последующим устранением ошибок по мере их выявления при контрольных воспроизведениях решения на АВМ.

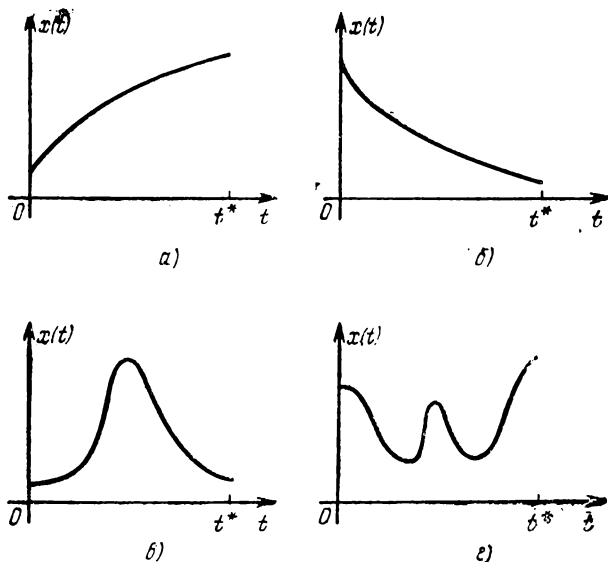


Рис. 4.7.

Если при контрольном решении некоторые машинные переменные выходят из диапазона ± 100 В, то масштабы соответствующих математических переменных следует уменьшить. И наоборот, когда машинная переменная меняется в очень малом диапазоне, то для повышения точности результатов целесообразно увеличить масштаб. Так, чередуя решение задачи на АВМ с изменением масштабов, в конечном счете удастся подобрать масштабы, обеспечивающие приемлемую точность воспроизведения решения.

4. Переменное масштабирование. *Переменное масштабирование* эквивалентно преобразованию исходных математических переменных в другие математические переменные, для которых удобно применять постоянные масштабы. Покажем это. Пусть $x(t)$ представлена в АВМ электрическим напряжением

$$u_x(t) = m_x(t) \cdot x(t) \quad (4.10)$$

с помощью переменного масштаба $m_x(t)$. Масштаб $m_x(t)$ запишем в виде произведения масштаба, а $\mu(t)$ — безразмерная функция. Подставив M_x и $\mu(t)$ в (4.10), получаем выражение машинной переменной в обычном виде: $u_x(t) = M_x \mu(t) \cdot x(t) = M_x X(t)$, где $X(t) = \mu(t)x(t)$ — новая математическая переменная, а M_x — ее постоянный масштаб.

Выбор преобразующей функции $\mu(t)$ определяется характером изменения функции $x(t)$. Часто характер изменения выявляется лишь в результате пробного воспроизведения $x(t)$ на АВМ с некоторым пробным постоянным масштабом. Для переменного масштабирования удобными оказались два типа функции $\mu(t)$.

Первый тип: $\mu(t)$ — кусочно-постоянная функция на интервале $[0, t^*]$. Интервал $[0, t^*]$ разбивается на части. На каждой части интервала масштаб — постоянный, но другой, чем на соседних частях. При кусочно-постоянных масштабах решение задачи сводится к последовательному решению стольких самостоятельных задач, на сколько частей разбит интервал $[0, t^*]$. В АВМ, имеющих схему программного управления, этот процесс последовательного решения ряда задач может быть автоматизирован. Напомним, что всякое изменение масштаба затрагивает лишь численные значения коэффициентов передачи операционных блоков. Поэтому работа схемы программного управления заранее в соответствии с разбиением интервала $[0, t^*]$ программируется так, что на соответствующих участках интервала с помощью контактов реле устройства программного управления подключаются входы операционных блоков, которые обеспечивают требуемые коэффициенты передачи.

Второй тип: $\mu(t)$ — непрерывная функция на интервале $[0, t^*]$. Чаще всего берется $\mu(t) = \exp \lambda t$, где λ — число, знак и величина которого зависят от решаемой задачи. Такое предпочтение дается экспоненте из-за простоты выражения ее производных через саму функцию, что особенно важно при воспроизведении решений дифференциальных уравнений.

Проиллюстрируем использование масштаба $m_x(t) = M_x \exp \lambda t$ на примере воспроизведения на интервале $t \in [0, 2]$ задачи Коши

$$x' = -5x, \quad x(0) = 1. \quad (4.11)$$

Покажем сначала, что из-за большой величины относительно изменения функции $x(t)$ на интервале $[0, 2]$ функция $x(t)$ практически невозпроизводима с помощью постоянного масштаба. Решение уравнения есть $x(t) = \exp(-5t)$. Относительное изменение $x(t)$ на интервале $[0, 2]$ представляет огромное число $\frac{x(0)}{x(2)} = \exp 10 = 22\,026$, которое во много раз превышает доброт-

ность любой АВМ. Практически в АВМ $x(t)$ на интервале $[1, 2]$ будет представляться нулем (рис. 4.8).

Теперь введем переменный масштаб, заменив исходную функцию $x(t)$ новой: $X(t) = x(t) \exp \lambda t$, где λ — некоторое положительное число. Для воспроизведения новой переменной $X(t)$ отыскивается дифференциальное уравнение, решением которого

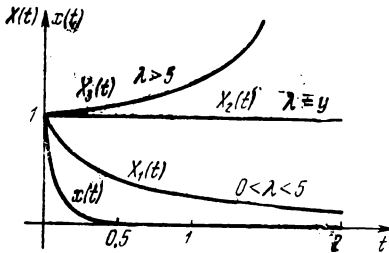


Рис. 4.8.

она является. Выразив $x(t)$ через $X(t)$ и $\exp \lambda t$ с учетом исходного уравнения, получаем новую задачу Коши $X'(t) = (\lambda - 5)X(t)$, $X(0) = 1$ с решением $X(t) = \exp(\lambda - 5)t$. Выбирая надлежащим образом величину λ , всегда можно добиться воспроизводимости переменной $X(t)$ на заданном интервале $[0, 2]$. На рис. 4.8 показан ход кривых $X(t)$ для различных λ .

Получение числовых значений переменной $x(t)$ проводится по формуле

$$x(t) = \frac{u_x(t)}{M_x \cdot \mu(t)}.$$

§ 3. Масштабирование независимой переменной

Независимой переменной в АВМ является физическая величина — время. При масштабировании зависимых переменных автоматически масштабируются и независимые переменные. При этом единице исходной независимой переменной соответствует одна секунда машинного времени так, что масштаб равен

$$m_t = 1 \left[\frac{\text{секунда}}{\text{единица измерения переменной}} \right].$$

В терминологическом отношении важен случай, когда исходная независимая переменная решаемой задачи тоже — время. Масштаб при этом оказывается безразмерной величиной. Если $m_t = 1$, то принято говорить, что АВМ воспроизводит решение в натуральном или реальном масштабе времени. Физически это соответствует одинаковым скоростям протекания реального физического процесса и вычислительного процесса, моделирующего его на АВМ. Возможность воспроизведения на АВМ процессов в *реальном времени* имеет важное значение для сопряжения АВМ с различными реальными системами с целью управления или исследования их свойств. Если время моделирования некоторого процесса меньше, чем его продолжительность в реальной физической системе, то говорят, что АВМ работает в *ускоренном*

времени. При этом, конечно, будет $m_i > 1$. В случае, когда исследователь интересуется деталями изучаемого процесса и он выбирает масштаб $m_i < 1$, говорят, что АВМ работает в замедленном времени.

Термины реального, ускоренного и замедленного времени, естественно, лишены смысла для задач, в которых роль независимой переменной играют какие-либо другие физические величины. Можно говорить лишь о большей или меньшей продолжительности воспроизведения решения задачи на АВМ.

Изменение продолжительности решения задачи на АВМ — центральный вопрос масштабирования независимой переменной. Существенно, что процедура изменения продолжительности решения на АВМ связана лишь с изменением коэффициентов передачи интеграторов. При этом не требуется изменять масштабы зависимых переменных.

Выявим смысл связи величины коэффициента передачи интегратора с продолжительностью воспроизведения решения какой-либо задачи на АВМ. На рис. 4.9, а) показан интегратор, выходная переменная которого обозначена через $x(t)$. Естественно, что входная переменная интегратора есть $-\dot{x}(t)$. Но ведь $\dot{x}(t)$ есть не что иное, как скорость изменения переменной $x(t)$. Скорость

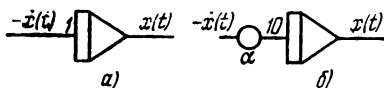


Рис. 4.9.

изменения переменной $x(t)$ легко можно изменять, меняя величину коэффициента передачи интегратора. На рис. 4.9, б) изображен интегратор, у которого скорость изменения переменной $x(t)$ в 10α раз больше, чем у интегратора, представленного на рис. 4.9, а). Чем больше скорость изменения всех машинных переменных, тем меньше продолжительность воспроизведения решения. И наоборот, чем больше продолжительность воспроизведения решения, тем меньше скорость изменения машинных переменных. И все эти изменения в продолжительности воспроизведения решения связаны только со значениями коэффициентов передачи интеграторов.

Теперь можно сформулировать важное практическое правило. Для изменения продолжительности решения задачи в m раз (или, что то же самое, изменения масштаба независимой переменной в $1/m$ раз) требуется изменить коэффициенты передачи всех интеграторов и только интеграторов в $1/m$ раз.

Конечно, в этом правиле речь идет только о тех интеграторах, которые использованы в схеме АВМ, воспроизводящей решение заданной задачи.

§ 4. Вопросы

1. **Каким** основным требованиям должен удовлетворять язык программирования?
2. **В чем** особенности языка блок-схем?
3. **Каково** назначение основных этапов программирования АВМ?
4. **Что** собой представляют структурные и коммутационные схемы АВМ? **Что в них общего и в чем различие?**
5. **В чем** смысл требований, предъявляемых к масштабированию зависимых математических переменных?
6. **Почему** возникает необходимость согласовывать масштабы зависимых переменных?
7. **В чем** состоит постоянное и переменное масштабирование зависимых переменных?
8. **Как** осуществляется оценка максимальных значений математических переменных при масштабировании?
9. **Как** осуществляется переменное масштабирование зависимых переменных?
10. **В чем** особенности масштабирования независимой переменной?
11. **Как** можно менять продолжительность воспроизведения решения задачи на АВМ?
12. **Для** схем, представленных на рис. 2.33 с позиции 5) по 10) и рис. 2.34, **увеличить** время воспроизведения решения в два раза; **уменьшить** в два раза.
13. **Чем** вызвана необходимость в построении схем контроля функционирования АВМ?
14. **Что** собой представляют контрольные соотношения?
15. **В чем** сущность организации контроля по избыточным переменным?

ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ НА АВМ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Вычислительные возможности

Вычислительные возможности структурных АВМ наиболее приспособлены для воспроизведения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Это свойство структурных АВМ особенно ценно в связи с тем, что решения большинства дифференциальных уравнений, представляющих интерес для практики, не удается получить в аналитическом виде. Современная «математическая» классификация и разделение дифференциальных уравнений по типам отражает отсутствие единого метода отыскания аналитического решения уравнений. Дифференциальные уравнения объединяют в какой-либо класс после того, как удалось отыскать единообразный прием аналитического получения их решений. Иное положение складывается при программировании АВМ. Здесь существует единый прием, единый метод программирования АВМ для воспроизведения решений дифференциальных уравнений. Правда, в чистом виде этот общий метод применим лишь к дифференциальным уравнениям, разрешенным относительно старшей производной. Если же исходное уравнение не разрешено относительно старшей производной, то уравнение с помощью специальных приемов приводят в форму, удобную для применения общего метода, или путем некоторого преобразования, или путем перехода к новому дифференциальному уравнению более высокого порядка, но уже разрешенного относительно старшей производной.

АВМ не способны воспроизводить решения дифференциальных уравнений в частных производных, так как в АВМ только одна физическая величина — время — может выступать в роли независимой машинной переменной. Однако существуют дифференциальные уравнения в частных производных, которые могут быть сведены к решению некоторых эквивалентных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В тех же случаях, когда такое эквивалентное преобразование выполнить не удастся, уравнение в частных производных аппроксимируют подходящей системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

По самой логике работы аналоговая машина воспроизводит лишь частные решения обыкновенных дифференциальных урав-

нений в форме меняющегося во времени электрического напряжения. Поэтому любое исследование решения дифференциального уравнения в функции какого-либо параметра уравнения требует многократного воспроизведения решения на АВМ для различных числовых значений этого параметра.

Задача нахождения для дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = F[y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y, t]$$

решения, удовлетворяющего условиям

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (5.1)$$

где $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа, называется *задачей Коши*.

Наряду с задачей Коши для уравнений высших порядков, начиная со второго, большой интерес представляют так называемые *краевые* или *граничные задачи*, в которых условия, налагаемые на искомое решение, задаются не в одной точке, а на концах некоторого интервала, и решение отыскивается внутри этого интервала. Эти условия называются *краевыми* или *граничными* условиями. Дифференциальными уравнениями с краевыми условиями описываются процессы, протекающие в ограниченном пространстве, или ограниченные по продолжительности. АВМ способны воспроизводить лишь решения задач с начальными условиями.

При необходимости воспроизведения решений краевых задач они предварительно сводятся с помощью специальных методов к эквивалентной задаче с начальными условиями. Этот процесс получения эквивалентной задачи с начальными условиями называют *редукцией* краевой задачи к задаче с начальными условиями (или к задаче Коши).

Областью изменения независимой переменной t может быть интервал $[0, t^*]$ или полупрямая $[0, \infty]$, что определяется характером исследуемого явления. В первом случае в АВМ необходима организация режима программного останова. Его существо состоит в том, что в момент времени, когда независимая переменная достигает значения t^* , машина сама автоматически останавливается. Во втором случае, вообще говоря, воспроизвести решения нельзя. Однако часто весь смысл изучения некоторого явления во времени состоит в том, чтобы выявить поведение решения просто при больших значениях переменной t . На АВМ это достигается тем, что время воспроизведения решения выбирается максимально допустимым, T_{\max} , и используют ускоренный масштаб представления независимой переменной. Кроме того, путем надлежащего преобразования независимой переменной t всегда можно превратить изменения на полупрямой $[0, \infty]$ в изменения

на конечном интервале $[0, 1]$. Такое преобразование, например, обеспечивают функции $\tau = 1 - \exp(-t)$, $\tau = \frac{t}{1+t}$, где τ — новая независимая переменная. Как легко заметить, обе они отображают полупрямую $[0, \infty]$ в интервал $[0, 1]$. Но первая функция $\tau = 1 - \exp(-t)$ оказывается удобнее при практической реализации на АВМ.

Иногда в области изменения переменных исследуемая система или явление описывается не одним дифференциальным уравнением, а несколькими, каждое из которых отражает поведение системы лишь в некоторой части области. В этих случаях говорят, что исследуемая система имеет *переменную структуру*. Воспроизведение решений таких задач на АВМ требует выполнения логических операций, связанных с организацией режима программного переключения, смысл которого в том, что машина по достижении границы области определения одного дифференциального уравнения должна автоматически переключаться на воспроизведение решения другого дифференциального уравнения.

Точность воспроизведения на АВМ решений дифференциальных уравнений ограничена добротностью машины. Чем выше добротность АВМ, тем с большей точностью можно воспроизвести решение. Однако существуют дифференциальные уравнения, решения которых чувствительны к погрешностям АВМ, как бы малы эти погрешности не были. Такие уравнения называют уравнениями с *неустойчивыми решениями*. При воспроизведении их решений на АВМ характерен рост погрешности решения в зависимости от продолжительности воспроизведения решения машиной.

§ 2. Устойчивость решений дифференциальных уравнений

Пусть на АВМ исследуется некоторый процесс и пусть при воспроизведении решения дифференциального уравнения, описывающего этот процесс, решение получается неустойчивым. Это означает, что малым изменениям начальных данных соответствуют значительные изменения решения. Это весьма тревожный факт, требующий постановки дополнительных исследований по выявлению причин неустойчивости. Остановимся на трех главных.

Первая причина следует из несоответствия математической модели процесса самому процессу. Это бывает вызвано тем, что при математическом описании какого-либо реального процесса неизбежно приходится упрощать и идеализировать его. Возможна ситуация, когда система упрощающих предположений выбрана неудачно, и неучтенные факторы существенны для течения процесса.

Вторая причина порождена выбранной схемой АВМ, используемой для реализации пусть даже точной модели процесса. Оказывается, и это далее будет показано на конкретном примере, что даже реализация на АВМ дифференциальных уравнений с устойчивыми решениями при определенных структурных схемах АВМ может привести к воспроизведению неустойчивого решения. Это бывает тогда, когда малые погрешности операционных блоков АВМ, накопившись, настолько искажают исходное дифференциальное уравнение, что реализуемое в действительности дифференциальное уравнение оказывается с неустойчивыми решениями.

Третья причина связана с выбранным методом реализации решения задачи на АВМ. Благоприятные условия для появления неустойчивых решений возникают в задачах, у которых исходная математическая постановка не позволяет использовать АВМ сразу. Для этих задач от их первоначальной постановки при программировании переходят к некоторой эквивалентной системе дифференциальных уравнений, которые и реализуют на АВМ взамен исходных задач. В процессе такой математической перепостановки сам выбранный метод получения эквивалентных дифференциальных уравнений порой таит в себе неприятные сюрпризы, приводящие к получению дифференциальных уравнений с неустойчивыми решениями.

Введем более строгое математическое понятие «устойчивость решения дифференциального уравнения». Решение $y(t)$ ($0 < t < \infty$) при $t \rightarrow \infty$ некоторого дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений называют устойчивым, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ такое, что для всех других решений $\tilde{y} = \tilde{y}(t)$ исходного уравнения, удовлетворяющих условию $|\tilde{y}(0) - y(0)| < \delta$, справедливо неравенство

$$|\tilde{y}(t) - y(t)| < \epsilon \text{ для } 0 \leq t < \infty.$$

Иначе говоря, решения $\tilde{y}(t)$, близкие к $y(t)$ в начальный момент времени, оказываются близкими и в последующие моменты времени, располагаясь в сколь угодно узкой ϵ -трубке вокруг решения $y(t)$ (рис. 5.1). Принято называть устойчивое решение $y(t)$ *асимптотически устойчивым*, если существует $\Delta > 0$ такое, что все решения, удовлетворяющие условию $|\tilde{y}(0) - y(0)| < \Delta$, обладают свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}(t) - y(t)| = 0.$$

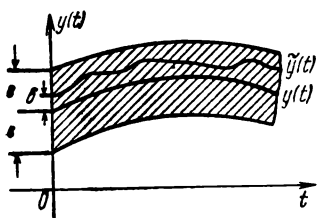


Рис. 5.1.

Иначе говоря, решения $\tilde{y}(t)$, близкие к $y(t)$ в начальный момент времени, оказываются близкими и в последующие моменты времени, располагаясь в сколь угодно узкой ϵ -трубке вокруг решения $y(t)$ (рис. 5.1). Принято называть устойчивое решение $y(t)$ *асимптотически устойчивым*, если существует $\Delta > 0$ такое, что все решения, удовлетворяющие условию $|\tilde{y}(0) - y(0)| < \Delta$, обладают свойством

Таким образом, при асимптотической устойчивости часть устойчивых решений $\tilde{y}(t)$ с течением времени стремится к решению $y(t)$, сливаясь с ним при $t \rightarrow \infty$.

Отметим, что любые функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$, для которых

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_1(t) - y_2(t)| = 0,$$

называют *асимптотически эквивалентными*.

Наиболее просто исследуются на устойчивость решения линейных дифференциальных уравнений. Приведем некоторые результаты, соответствующие решениям линейных дифференциальных уравнений.

1. Для устойчивости (асимптотической устойчивости) решения линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + a_2(t)y^{(n-2)} + \dots + a_n(t)y = \varphi(t) \quad (5.2)$$

необходима и достаточна устойчивость (асимптотическая устойчивость) соответствующего однородного дифференциального уравнения:

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + a_2(t)y^{(n-2)} + \dots + a_n(t)y = 0. \quad (5.3)$$

2. Общее решение линейного дифференциального уравнения (5.2) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда тривиальное решение $y(t) \equiv 0$ соответствующего однородного уравнения (5.3) асимптотически устойчиво при $t \rightarrow \infty$.

3. Для устойчивости решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0 \quad (5.4)$$

необходимо и достаточно, чтобы все корни

$$z_j = \alpha_j + i\beta_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (5.5)$$

соответствующего характеристического уравнения

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0 \quad (5.6)$$

обладали бы неположительными вещественными частями, т. е. $\alpha_j \leq 0$ для всех $j=1, 2, \dots, n$.

4. Для асимптотической устойчивости решения линейного однородного дифференциального уравнения (5.4) с постоянными коэффициентами необходимо и достаточно, чтобы вещественные части всех корней (5.5) характеристического уравнения (5.6) были отрицательны, т. е. $\alpha_j < 0$ для всех $j=1, 2, \dots, n$.

С помощью АВМ на ограниченном интервале изменения независимого переменного можно реализовать дифференциальные уравнения как с устойчивыми решениями, так и с неустойчивыми. Однако для уравнений с неустойчивыми решениями с ростом

продолжительности интегрирования ошибка в воспроизведении решения может достигнуть значительной величины. Покажем это на примерах.

Пример 1. Пусть требуется воспроизвести решение задачи Коши

$$y''(t) = 10y'(t) + 11y(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

на интервале $t \in [0, 2]$.

Общее решение этого дифференциального уравнения равно

$$y(t) = C_1 \exp(-t) + C_2 \exp(+11t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, которые при заданных начальных условиях равны $C_1 = 1$ и $C_2 = 0$. Точное частное решение есть $y(t) = \exp(-t)$. Решение уравнения, воспроизведенное АВМ, в силу существования погрешностей будет приближенным:

$$\tilde{y}(t) = (1 + \varepsilon_1) \exp(-t) + \varepsilon_2 \exp(+11t),$$

где ε_1 и ε_2 — малые по абсолютной величине постоянные, численные значения которых определяются добротностью АВМ. Абсолютная погрешность решения составит

$$\Delta y(t) = y(t) - \tilde{y}(t) = -\varepsilon_1 \exp(-t) - \varepsilon_2 \exp(+11t),$$

Относительная погрешность

$$\delta y(t) = \frac{\Delta y(t)}{y(t)} = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \exp(+12t).$$

Пусть добротность АВМ такова, что $\varepsilon_1 = \pm 10^{-4}$ и $\varepsilon_2 = \pm 10^{-4}$, тогда численные значения погрешностей для $t = 2$ будут

$$\Delta y(2) \approx 10^{-4} \exp(22) \approx 4,5 \cdot 10^4 \quad \text{и} \quad \delta y(2) \approx 10^{-4} \exp(24) \approx 2,7 \cdot 10^5$$

при точном значении решения $y(2) = \exp(-2) = 0,1353$.

Таким образом, даже при использовании машины с высокой добротностью значение, полученное с помощью АВМ, не имеет ничего общего с точным значением.

Пример 2. Требуется воспроизвести на интервале $t \in [0, 1]$ решение задачи Коши

$$y''(t) = -0,9y'(t) + 0,1y(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Общее решение уравнения $y(t) = C_1 \exp(-t) + C_2 \exp(+0,1t)$ с учетом заданных начальных условий превратится в точное частное решение $y(t) = \exp(-t)$. Наличие погрешностей АВМ приведет к воспроизведению приближенного решения

$$\Delta y(t) = y(t) - \tilde{y}(t) = -\varepsilon_1 \exp(-t) - \varepsilon_2 \exp(+0,1t),$$

При этом абсолютная и относительная погрешности решения составят

$$\Delta y(t) = y(t) - \tilde{y}(t) = -\varepsilon_1 \exp(-t) - \varepsilon_2 \exp(+0,1t),$$

$$\delta y(t) = \frac{\Delta y(t)}{y(t)} = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \exp(+0,1t).$$

При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}$ для $t = 1$ численные значения погрешностей соответственно равны:

$$\Delta y(1) = -10^{-4} \exp(-1) - 10^{-4} \exp(+0,1) \approx -1,5 \cdot 10^{-4},$$

$$\delta y(1) = -10^{-4} (1 + 3,004) \approx -4 \cdot 10^{-4}.$$

В этом примере погрешности оказались небольшими, и ими на интервале $t \in [0, 1]$ можно пренебречь. Однако, вне этого интервала при больших t погрешности начнут быстро нарастать и с течением времени будут доминировать над решением.

Все изложенное выше подтверждает мысль, что сам по себе факт неустойчивости решения дифференциального уравнения не является препятствием для его воспроизведения машиной на некотором ограниченном интервале изменения независимой переменной. Важно лишь, чтобы погрешности в рассматриваемом интервале оставались бы малыми по отношению к решению. А это зависит как от самого реализуемого на АВМ дифференциального уравнения, так и от требуемой продолжительности интегрирования. При этом, конечно, точность воспроизведения неустойчивых решений дифференциальных уравнений будет значительно ниже точности воспроизведения устойчивых решений.

Как уже отмечалось, совокупные погрешности операционных блоков могут привести к получению на АВМ неустойчивого решения, даже если исходное дифференциальное уравнение имело устойчивое решение.

Проиллюстрируем сказанное с помощью конкретной задачи. Эта задача может показаться несколько искусственной, однако она хорошо отражает сущность дела. Пусть необходимо воспроизвести решение линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$y'(t) = -(\alpha + \beta)y(t) \quad (5.7)$$

с начальным условием

$$y(0) = y_0.$$

В отношении устойчивости его решения $y(t) = y_0 \exp[-(\alpha + \beta)t]$ сомнений не возникает. На рис. 5.2, а) и б) показаны две структурные схемы АВМ, которые формально должны одинаково успешно воспроизводить решение. Но вторая схема в отличие от первой имеет две обратные связи, одна из которых выполнена в виде некоторой группы операционных блоков, осуществляющих тождественное преобразование входной переменной $-y(t)$.

На рисунке эта группа блоков обведена пунктиром. Формально тождественное преобразование входной переменной $-y(t)$ может осуществить, например, любая цепочка из четного числа инверторов, включенных последовательно.

Будем считать, что эта обратная связь «длинная», т. е. состоит из

большого числа операционных блоков. Но каждый операционный блок (см. § 2 гл. 2) обладает определенным запаздыванием и последствием. В «длинной» обратной связи запаздывание τ выходной переменной по отношению к входной $-y(t)$ может быть значительным. Поэтому, если теперь учесть запаздывание, то ясно, что вторая схема реализует не исходное дифференциальное уравнение, а другое:

$$y'(t) + \beta y(t) + \alpha y(t - \tau) = 0. \quad (5.8)$$

Это уравнение называют линейным дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом. Такие уравнения описывают поведение многих про-

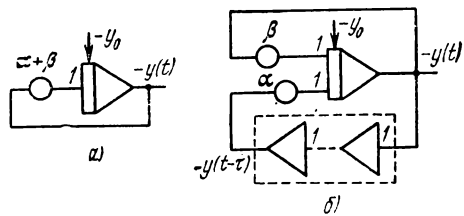


Рис. 5.2.

цессов и объектов, у которых имеется запаздывание и последствие. Уравнениями подобного рода описывается также работа тех схем АВМ, которые содержат «длинные» обратные связи.

Оказывается, что при определенных α , β , τ решение уравнения (5.8) неустойчиво. Исследование устойчивости решения линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом — значительно более сложная задача, чем исследование устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений.

Если в линейных дифференциальных уравнениях устойчивость решения оценивается по знаку вещественных частей корней характеристического уравнения (5.7), то для уравнения (5.8) следует оценить знак вещественной части корней такого трансцендентного уравнения:

$$z + \beta + \alpha \exp(-\tau z) = 0. \quad (5.9)$$

Сложность здесь в том, что уравнение (5.9) может иметь бесконечное множество корней. Однако существует некоторая область значений τ и α , при которых корни уравнения (5.9) не имеют положительных вещественных частей. Приведем без доказательства условия существования отрицательных вещественных частей корней уравнения (5.9). Это условие имеет вид:

$$\tau < \frac{\pi - \arctg \sqrt{\gamma^2 - 1}}{\beta \sqrt{\gamma^2 - 1}}, \quad (5.10)$$

где $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$.

На рис. 5.3 дана на плоскости в координатах τ и α графическая интерпретация (5.10) для случая, когда $\beta = 1$. Видно, что кривая

$$\tau = \frac{\pi - \arctg \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

разбивает первый квадрант на две области. Для любой внутренней точки заштрихованной области неравенство (5.10) справедливо. Поэтому решение, воспроизводимое АВМ по схеме рис. 5.2, б), устойчиво. Точкам другой области соответствуют неустойчивые решения.

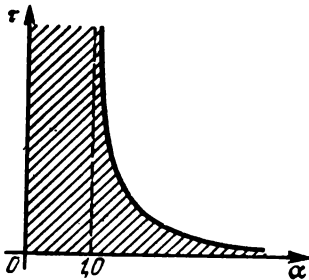


Рис. 5.3.

Условия устойчивости в виде (5.10) позволяют сделать важный вывод о необходимости ограничения максимальных значений коэффициентов передачи операционных блоков. При программировании АВМ это учитывается тем, что обычно коэффициенты передачи выбирают меньше 20. Использование относительно небольших коэффициентов передачи операционных блоков позволяет пренебречь запаздыванием в силу его малости. Но иногда игнорировать запаздывание нельзя.

Неустойчивость тесно связана с еще одной неприятной формой проявления запаздывания в АВМ. В некоторых схемах АВМ при наличии запаздывания и обратных связей есть риск получить нежелательные «паразитные» колебания, амплитуда и период которых определяются величинами запаздывания в схеме АВМ и реализуемым в ней вычислительным процессом. Поведение систем с обратной связью детально исследуется в теории ав-

томатического управления и не может быть тут подробно освещено. Однако все же отметим, что «паразитные» колебания в схемах АВМ проявляются тем сильнее, чем больше величины запаздывания и чем больше коэффициенты передачи операционных блоков.

§ 3. Общий метод программирования АВМ для уравнений, разрешенных относительно старшей производной

Слово «общий» в названии метода отражает широкую применимость метода при программировании АВМ для реализации решений обширного класса линейных и нелинейных дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

Процесс разработки структурной схемы сводится к последовательному выполнению шести этапов, которые рассмотрим для задачи Коши

$$\begin{aligned} y^{(n)} - F[y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y, t] &= 0; \\ y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}, \dots, y'(0) = y_0', \quad y(0) = y_0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Необходимо составить программу (структурную схему) для воспроизведения решения на АВМ. Опишем содержание этапов.

Этап I. Исходное уравнение разрешается относительно старшей производной, т. е. приводится к виду

$$y^{(n)} = F[y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y, t]. \quad (5.12)$$

Этап II. Вычерчивается часть структурной схемы, на которой изображается цепочка из последовательно включенных интеграторов, число которых равно порядку дифференциального уравнения (рис. 5.4, а)).

Этап III. Входная переменная цепочки интеграторов обозначается через $y^{(n)}$, и по цепочке слева направо отмечаются выходные переменные каждого интегратора (рис. 5.4, б)). Чередующаяся смена знаков выходных переменных вызвана инвертирующей способностью интеграторов.

Этап IV. Разрабатывается схема, реализующая правую часть уравнения (5.12), т. е.

$$F[y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y, t].$$

Конкретный вид этой схемы определяется заданным аналитическим выражением функции $F[\cdot]$. В рассматриваемом общем случае схема не конкретизирована и изображена прямоугольником с соответствующей надписью (рис. 5.4, в)).

Этап V. Выход схемы, реализующей $F[\cdot]$, подается на вход первого интегратора цепочки. Установление такой связи математической соответствует тому факту, что правая часть уравнения (5.12) равна его левой части (рис. 5.4, г)).

Этап VI. Задаются всем интеграторам соответствующие начальные условия, в результате чего получается окончательная структурная схема АВМ, воспроизводящая решение исходного дифференциального уравнения (рис. 5.4, д)).

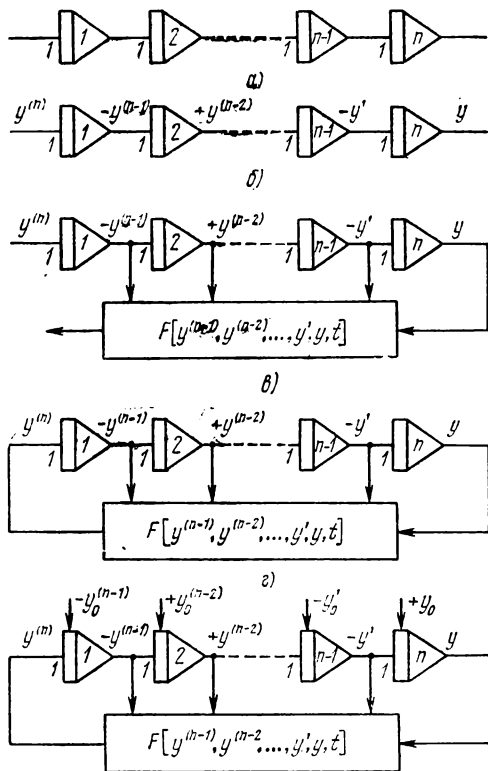


Рис. 5.4.

Проиллюстрируем методiku общего метода на конкретных примерах.

Пример 1. Разработать структурную схему для воспроизведения на АВМ решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0y(t) = f(t) \quad (5.13)$$

с начальными условиями $y'(0) = y_0'$, $y(0) = y_0$.

Этап I. Уравнение (5.13) разрешается относительно старшей производной

$$y''(t) = -a_1y'(t) - a_0y(t) + f(t). \quad (5.14)$$

Этап II. Вычёрчивается цепочка из двух последовательно включенных интеграторов (рис. 5.5, а)).

Этап III. Входная переменная цепочки интеграторов обозначается через $y''(t)$, и по цепочке слева направо отмечаются выходные переменные каждого интегратора (рис. 5.5, б)). Иначе говоря, устанавливается соответствие между переменными $y(t)$ и $y'(t)$ и интеграторами, которые их вырабатывают.

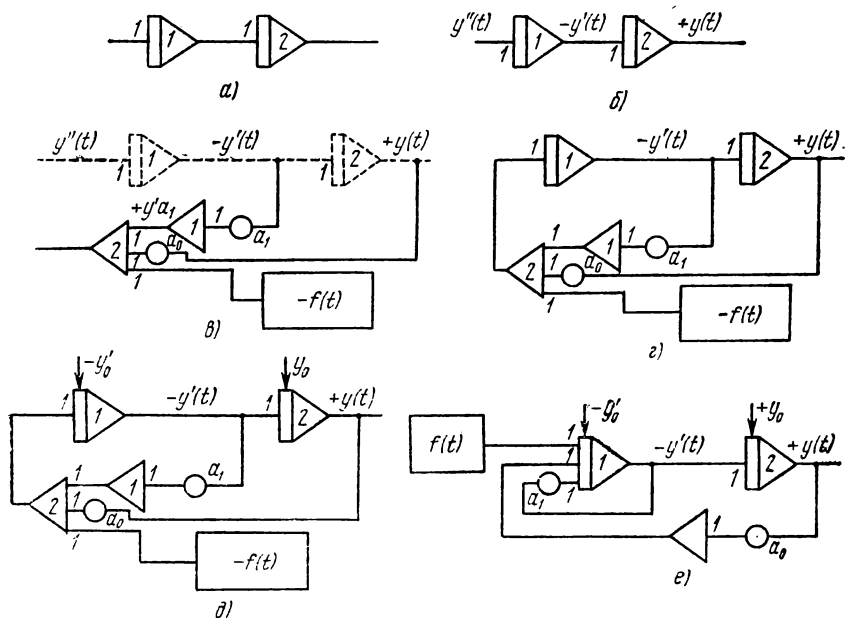


Рис. 5.5.

Этап IV. Разрабатывается схема, которая воспроизводит правую часть уравнения (5.14). Предполагается, что имеется блок, вырабатывающий заданную функцию независимого переменного $f(t)$. Эта схема АВМ на рис. 5.5, в) изображена сплошными линиями. Схема содержит инвертор 1, сумматор 2 и блок, воспроизводящий функцию $-f(t)$. На выходе сумматора вырабатывается сумма $-a_1y'(t) - a_0y(t) + f(t)$.

Этап V. Замыкается обратная связь с выхода сумматора 2 на вход интегратора 1 (рис. 5.5, г)). Факт организации такой обратной связи математически соответствует равенству правой и левой частей уравнения (5.14).

Этап VI. Производится задание начальных условий интеграторов. Знак начального условия должен соответствовать знаку выходной переменной интегратора.

Структурная схема рис. 5.5, д) обеспечивает воспроизведение решения исходного уравнения (5.13). С помощью такой схемы можно исследовать переменные $y''(t)$, $y'(t)$, $y(t)$. Если для исследователя не представляет интерес поведение переменной $y''(t)$, то схема рис. 5.5, д) может быть существенно упрощена путем исключения сумматора 2, как это показано на рис. 5.5, е). В этой схеме функции сумматора 2 и интегратора 1 совмещены в интегросумматоре 1. Такое совмещение приводит к экономному использованию оборудования ценой уменьшения информации о решении. В схеме рис. 5.5, е) отсутствует в явном виде переменная $y''(t)$.

Контроль правильности работы АВМ при воспроизведении решения $y(t)$ уравнения (5.13) по структурной схеме рис. 5.5, е) удобно провести по методу избыточной переменной (§ 1 гл. 4). Задавшись контрольным соотношением в виде

$$y'(t) + a_1 y(t) - z(t) = 0,$$

где $z(t)$ — вспомогательная избыточная переменная, дифференцируем его один раз по переменной t :

$$y''(t) + a_1 y'(t) - z'(t) = 0.$$

Отсюда с учетом (5.13) получаем определяющее дифференциальное уравнение для избыточной переменной:

$$z'(t) = -a_0 y(t) + f(t), \quad z(0) = y'_0 + a_1 y_0.$$

Заметим, что создание схемы контроля требует один интегратор для воспроизведения переменной $z(t)$ и один сумматор для реализации самого контрольного соотношения.

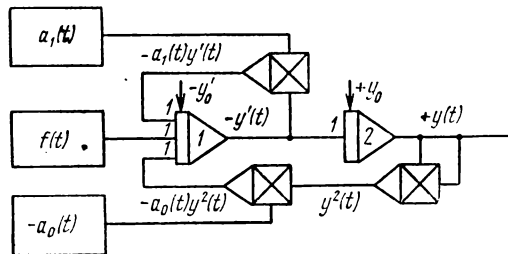


Рис. 5.6.

Пример 2. Разработать программу для воспроизведения на АВМ решения дифференциального уравнения

$$y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y^2(t) = f(t)$$

с начальными условиями $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$.

Структурная схема АВМ для воспроизведения решения этого уравнения показана на рис. 5.6. Схему отличает то, что для выработки каждого переменного коэффициента в ней потребовались некоторый блок, воспроизводящий сам переменный коэффициент, и блок перемножения для образования произведения переменной на переменный коэффициент. Для воспроизведения функции $y^2(t)$ использован блок перемножения, хотя можно было бы применить и функциональный блок. В данном случае использование функционального блока нежелательно из-за необходимости при работе на АВМ предварительной настройки блока на воспроизведение параболы второго порядка. Если бы нелинейность была более сложной вида, применение функционального блока могло бы иметь смысл.

Последовательность выполнения этапов общего метода не меняется при составлении структурных схем для воспроизведения решений систем дифференциальных уравнений.

Пример 3. Разработать структурную схему, воспроизводящую решение системы дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) + \alpha_{11}x_1(t) - \alpha_{12}\varphi_1(x_2) &= 0, \\ \ddot{x}_2(t) - \alpha_{21}\varphi_2(x_1) + \alpha_{22}x_2(t) &= 0, \\ x_1(0) = \dot{x}_1(0), \quad x_1(0) = x_{10}, \\ \ddot{x}_2(0) = \dot{x}_2(0), \quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}'_2(0), \quad x_2(0) = x_{20}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Это — нелинейная система дифференциальных уравнений, из которых первое уравнение второго порядка, а второе — третьего порядка. Нелинейность обусловлена наличием двух функций $\varphi_1(x_2)$ и $\varphi_2(x_1)$.

Этап I. Оба уравнения системы (5.15) разрешаются относительно старшей производной и тем самым приводятся к виду, удобному для разработки структурной схемы:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\alpha_{11}x_1(t) + \alpha_{12}\varphi_1(x_2), \\ \ddot{x}_2(t) &= \alpha_{21}\varphi_2(x_1) - \alpha_{22}x_2(t). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Этап II. Для первого уравнения вычерчивается цепочка из двух последовательно включенных интеграторов, а для второго уравнения — цепочка из трех интеграторов в соответствии с порядком этих уравнений.

Этап III. На вход первой цепочки мысленно подается переменная $\dot{x}_1(t)$, на вход второй цепочки — переменная $\ddot{x}_2(t)$. Это позволяет установить соответствие между переменными и выходами интеграторов (рис. 5.7).

Этап IV. Используя переменные $x_1(t)$, $x_1'(t)$, $x_2(t)$, $x_2'(t)$, разрабатываются структурные схемы, воспроизводящие правые части уравнений (5.16) (рис. 5.8).

Этап V. Производится замыкание обратных связей, соответствующих правым частям уравнений (5.16).

Этап VI. Всем интеграторам задаются начальные условия с учетом знаков выходных переменных этих интеграторов.

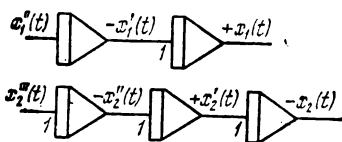


Рис. 5.7.

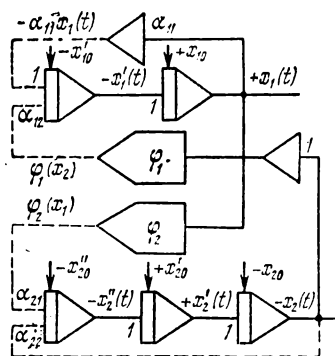


Рис. 5.8.

Общий метод составления структурных схем иногда еще называют методом понижения порядка производной, подчеркивая тем самым важность первых двух этапов этого метода.

§ 4. Программирование АВМ для уравнений, не разрешенных относительно старшей производной

Пусть дана задача Коши n -го порядка

$$F(x^{(n)}, x, t) = 0, \quad x(0) = x_0,$$

где $x = \{x^{(n-1)}, \dots, x^{(1)}, \dots, x\}$ и соответственно $x_0 = \{x_0^{(n-1)}, \dots, x_0^{(1)}, \dots, x_0\}$, в которой дифференциальное уравнение не разрешено относительно старшей производной. Для применения общего метода программирования АВМ используют один из двух следующих ниже приемов.

Первый состоит в том, что иногда уравнение $F(x^{(n)}, x, t) = 0$ удается свести к виду $x^{(n)} + \Phi(x^{(n)}, x, t) = 0$. Это новое уравнение не разрешено относительно старшей производной, но уже допускает применение общего метода.

Второй прием основан на использовании метода неявных функций. Частично метод неявных функций уже обсуждался в § 9 гл. 2, более строго он изложен в § 2 гл. 10.

В соответствии с этим методом от задачи Коши n -го порядка

$$F(x^{(n)}, x, t) = 0, \quad x(0) = x_0$$

переходят к задаче Коши $n+1$ -го порядка, в которой дифферен-

циальное уравнение разрешено относительно новой старшей производной

$$x^{(n+1)} = -KF(x^{(n)}, x, t) \operatorname{sign} F'_{x^{(n)}}, \quad x(0) = x_0, \quad x^{(n)}(0) = 0, \quad (5.17)$$

где K — коэффициент усиления ОУ, а производная $F'_{x^{(n)}}$ предполагается отличной от нуля. Знак частной производной $F_{x^{(n)}}$ введен в уравнение для получения устойчивого его решения.

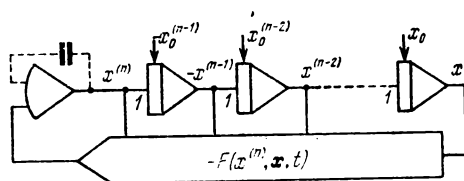


Рис. 5.9

Поскольку дифференциальное уравнение (5.17) разрешено относительно старшей производной, к нему применим общий метод программирования АВМ. На рис. 5.9 показана соответствующая структурная схема АВМ для случая, когда $F'_{x^{(n)}} > 0$. В ней роль первого интегратора цепочки играет ОУ, охваченный отрицательной обратной связью через конденсатор небольшой емкости.

Для иллюстрации построим структурную схему АВМ, воспроизводящую решение дифференциального уравнения Лагерра

$$tL_n''(t) + (1-t)L_n'(t) + nL_n(t) = 0, \quad L_n'(0) = L_{n0}', \quad L_n(0) = L_{n0}. \quad (5.18)$$

Формально уравнение можно разрешить относительно производной путем деления на переменный коэффициент t . Однако в результате такого деления возникнет необходимость воспроизвести коэффициент $1/t$, который при $t=0$ обращается в бесконечность. Поэтому целесообразно провести программирование, оставив уравнение в неявном виде относительно старшей производной. Сведем уравнение (5.18) к виду (5.17), для чего определим сначала знак производной $\frac{\partial F}{\partial L_n''}$.

В рассматриваемом случае

$$F(L_n'') = tL_n''(t) + (1-t)L_n'(t) + nL_n(t) = 0,$$

отсюда $\frac{\partial F}{\partial L_n''} = t \geq 0$. Таким образом, на АВМ должно быть реализовано дифференциальное уравнение

$$L_n''(t) = -K [tL_n'(t) + (1-t)L_n'(t) + nL_n(t)], \quad (5.19)$$

с начальными условиями $L_n''(0) = 0$, $L_n'(0) = L_{n0}'$, $L_n(0) = L_{n0}$, где K — коэффициент усиления ОУ. Структурная схема АВМ, построенная по уравнению (5.19) в соответствии с общим методом, представлена на рис. 5.10.

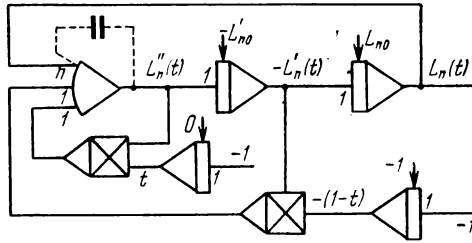


Рис. 5.10.

Рассмотрим в качестве второго примера задачу отыскания по заданной функции $x(t)$ двух других функций $m(t)$ и $z(t)$, которые определяются с помощью выражений:

$$m(t) = \frac{1}{t} \int_0^t x(t) dt, \quad (5.20)$$

$$z(t) = \frac{1}{t} \int_0^t [x(t) - m(t)]^2 dt. \quad (5.21)$$

Первую функцию $m(t)$ называют текущим средним, а вторую $z(t)$ — текущей дисперсией. Для воспроизведения $m(t)$ и $z(t)$ целесообразно реализовать решения двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производных

$$tm'(t) + m(t) - x(t) = 0, \quad (5.22)$$

$$tz'(t) + z(t) - [x(t) - m(t)]^2 = 0, \quad (5.23)$$

$$m(0) = z(0) = 0.$$

Уравнения (5.22), (5.23) сведем к виду (5.17), для чего определим знаки частных производных $\frac{\partial F_1}{\partial m'}$ и $\frac{\partial F_2}{\partial z'}$. В рассматриваемом случае

$$F_1[m'(t), m(t), x(t), t] = tm'(t) + m(t) - x(t) = 0,$$

$$F_2[z'(t), z(t), x(t), t] = tz'(t) + z(t) - [x(t) - m(t)]^2 = 0,$$

отсюда

$$\frac{\partial F_1}{\partial m'} = t \geq 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z'} = t \geq 0.$$

На АВМ следует реализовать в соответствии с (5.17) систему дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$m''(t) = -K[tm'(t) + m(t) - x(t)], \quad (5.24)$$

$$z''(t) = -K[tz'(t) + z(t) - [m(t) - x(t)]^2], \quad (5.25)$$

$$m(0) = z(0) = 0, \quad m'(0) = z'(0) = 0.$$

Структурная схема АВМ, построенная по уравнениям (5.24) и (5.25), представлена на рис. 5.11.

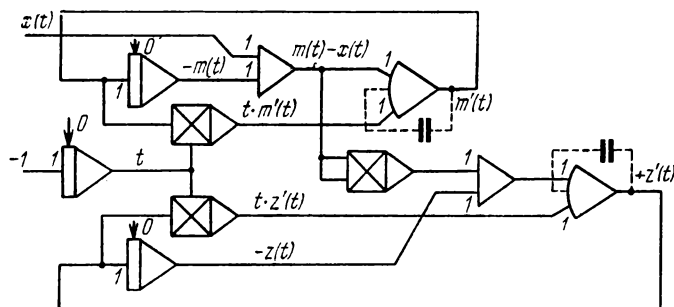


Рис. 5.11.

Контроль правильности работы АВМ при воспроизведении $m(t)$ и $z(t)$ по структурной схеме рис. 5.11 целесообразно организовать с помощью контрольного соотношения

$$y(t) - t[m(t) + z(t)] = 0,$$

где $y(t)$ — вспомогательная избыточная переменная. Дифференцируя контрольное соотношение по переменной t , имеем:

$$y'(t) - [m(t) + z(t)] - t[m'(t) + z'(t)] = 0.$$

Отсюда с учетом исходной системы дифференциальных уравнений получаем определяющее дифференциальное уравнение для переменной $y(t)$:

$$y'(t) = [x(t) - m(t)]^2.$$

§ 5. Программирование АВМ для уравнений, содержащих в правой части производные

В инженерной практике встречаются дифференциальные уравнения, правая часть которых является линейной комбинацией вида $\sum_{j=0}^m b_j(t) \cdot x^{(j)}(t)$, где $b_j(t)$ — заданные переменные или постоянные коэффициенты, а $x^{(j)}(t)$ — производная j -го порядка по аргументу t от заданной функции $x(t)$. Примером может

служить задача Коши

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y) = \sum_{j=0}^m b_j(t) x^{(j)}(t),$$

$$y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}, \dots, y'(0) = y'_0, y(0) = y_0, \quad m \leq n, \quad (5.26)$$

или следующая задача Коши:

$$y'''(t) + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 x(t) + b_1 x'(t) + b_2 x''(t),$$

$$y''(0) = y''_0, y'(0) = y'_0, y(0) = y_0. \quad (5.27)$$

В результате прямого применения общего метода к уравнению (5.26) или (5.27) получается неудобная структурная схема АВМ из-за того, что необходимо воспроизводить производные функции $x(t)$. Покажем, что в ряде случаев можно избежать воспроизведения производных $x(t)$, сведя дифференциальные уравнения (5.26), (5.27) к эквивалентным системам дифференциальных уравнений, не содержащих производных функции $x(t)$. Для конкретности остановимся на уравнении (5.27). Сначала уравнение (5.27) представим в виде суммы полных производных

$$y'''(t) + [a_2 y(t) - b_2 x(t)]'' + [a_1 y(t) - b_1 x(t)]' + [a_0 y(t) - b_0 x(t)] = 0. \quad (5.28)$$

Теперь последовательно проинтегрируем выражение (5.28) два раза. После первого интегрирования

$$y''(t) + [a_2 y(t) - b_2 x(t)]' + [a_1 y(t) - b_1 x(t)] + z_1(t) = 0,$$

где $z_1(t)$ получено из $z_1'(t) = a_0 y(t) - b_0 x(t)$. После второго интегрирования получаем

$$y'(t) + [a_2 y(t) - b_2 x(t)] + z_2(t) = 0,$$

где $z_2(t)$ получено из $z_2'(t) = a_1 y(t) - b_1 x(t) + z_1(t)$. В результате имеем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= a_0 y(t) - b_0 x(t), \\ z_2'(t) &= a_1 y(t) - b_1 x(t) + z_1(t), \\ y'(t) &= -a_2 y(t) + b_2 x(t) - z_2(t) \end{aligned} \quad (5.29)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} z_1(0) &= -y_0'' - [a_2 y_0' - b_2 x'(0)] - [a_1 y_0 - b_1 x(0)], \\ z_2(0) &= -y_0' - [a_2 y_0 - b_2 x(0)], \\ y(0) &= y_0. \end{aligned}$$

Видно, что система (5.29) не содержит производных от функции $x(t)$, так что $x(t)$ может иметь достаточно произвольный вид

и даже разрывы непрерывности первого рода. Соответствующая системе (5.29) структурная схема АВМ показана на рис. 5.12. Схема построена по общему методу. Систему дифференциальных уравнений (5.29) принято называть *канонической формой* уравнения (5.27).

Не каждое дифференциальное уравнение с правой частью (5.26) можно представить в виде канонической формы. Каноническая форма существует лишь для таких уравнений (5.26), которые можно записать в виде суммы полных производных различных порядков. Последнему требованию удовлетворяют линейные дифференциальные уравнения и лишь некоторые нелинейные. Так, линейное дифференциальное уравнение

$$y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b_0(t)x(t) + b_1(t)x'(t) + b_2x''(t)$$

записывается в виде суммы полных производных. Если учесть, что

$$a_1(t)y'(t) = [a_1(t)y(t)]' - a_1'(t)y(t);$$

$$b_1(t)x'(t) = [b_1(t)x(t)]' - b_1'(t)x(t),$$

то

$$[y(t) - b_2x(t)]'' + [a_1(t)y(t) - b_1(t)x(t)]' + [a_0(t) - a_1'(t)]y(t) + [b_1'(t) - b_0(t)]x(t) = 0.$$

Аналогично нелинейное дифференциальное уравнение

$$y''(t) + y'(t) \sin y(t) + ay(t) = b_0x(t) + b_1(t)x'(t)$$

записывается в виде суммы полных производных. Если учесть, что

$$-y'(t) \sin y(t) = [\cos y(t)]', \quad b_1(t)x'(t) = [b_1(t)x(t)]' - b_1'(t)x(t),$$

то

$$y''(t) - [\cos y(t) + b_1'(t)x(t)]' + [ay(t) + b_1'(t)x(t) - b_0x(t)] = 0.$$

§ 6. Чувствительность решений к изменению параметров

Пусть имеется дифференциальное уравнение

$$F(\ddot{x}, \dot{x}, x, t, a) = 0, \tag{5.30}$$

где a — некоторый параметр. Требуется исследовать влияние изменения этого параметра на решение уравнения $x(t, a)$. Ис-

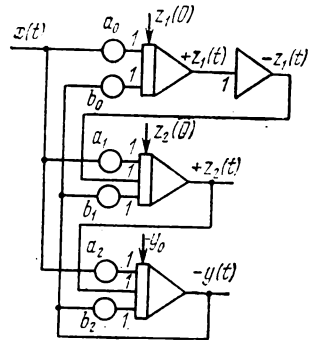


Рис. 5.12.

пользуя АВМ, можно предложенную задачу решить двумя способами.

Первый способ состоит в том, что по уравнению (5.30), как обычно, составляется блок-схема АВМ, воспроизводящая решение. Коэффициенты передачи операционных блоков этой схемы, естественно, выражаются через параметр a . Задаваясь набором различных значений параметра a : $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, изменяют коэффициенты передачи операционных блоков и воспроизводят на АВМ соответствующие решения:

$$x(t, a_0), x(t, a_1), x(t, a_2), \dots, x(t, a_n).$$

Второй способ оценки влияния изменения параметров на решение — приближенный. Он получил название метода *функций чувствительности*. Пусть решение уравнения (5.30) для $a = a_0$ есть $x(t, a_0)$. Изменим величину параметра a_0 на Δa и установим соответствие между решением $x(t, a_0)$ и решением $x(t, a_0 + \Delta a)$. Это можно сделать, используя формулу Тейлора. Ограничившись двумя первыми членами, получим приближенное выражение $x(t, a_0 + \Delta a)$ через $x(t, a_0)$:

$$x(t, a_0 + \Delta a) \approx x(t, a_0) + \frac{\partial x(t, a_0)}{\partial a} \Delta a.$$

Частную производную $u(t, a_0) = \frac{\partial x(t, a_0)}{\partial a}$ называют функцией чувствительности. Ее можно использовать в качестве оценки влияния отклонения параметра Δa на решение уравнения (5.30). Оказывается, функция чувствительности легко воспроизводится на АВМ, так как она всегда является решением линейного дифференциального уравнения. Уравнение, которому удовлетворяет функция чувствительности, называют *дифференциальным уравнением чувствительности*. Для нахождения его достаточно продифференцировать исходное уравнение (5.30) по параметру a :

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial a} \Big|_{a=a_0} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial a} \Big|_{a=a_0} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} \Big|_{a=a_0} + \frac{\partial F}{\partial a} \Big|_{a=a_0} = 0.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial x}{\partial a} \Big|_{a=a_0} = u(t); \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial a} \Big|_{a=a_0} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial a} \Big|_{a=a_0} = \dot{u}(t); \quad \frac{\partial \ddot{x}}{\partial a} \Big|_{a=a_0} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial a} \Big|_{a=a_0} = \ddot{u}(t),$$

получаем искомое:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \ddot{u}(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{u}(t) + \frac{\partial F}{\partial x} u(t) + \frac{\partial F}{\partial a} \Big|_{a=a_0} = 0. \quad (5.31)$$

Если исходное уравнение (5.30) имело бы несколько параметров, то по каждому параметру была бы своя функция чувств-

вительности и соответственно свое дифференциальное уравнение чувствительности.

Для иллюстрации рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + b_1 \dot{x} + b_0 x - f(t) = 0. \tag{5.32}$$

Для параметра b_0 функция чувствительности будет $u_0 = \left. \frac{\partial x}{\partial b_0} \right|_{b_0=b_{00}}$ и соответствующее уравнение по (5.31):

$$\ddot{u}_0 + b_1 \dot{u}_0 + b_0 u_0 + x(t) = 0, \quad u_0(0) = \dot{u}_0(0) = 0. \tag{5.33}$$

Аналогично, для параметра b_1 функция чувствительности будет $u_1 = \left. \frac{\partial x}{\partial b_1} \right|_{b_1=b_{10}}$, а дифференциальное уравнение:

$$\ddot{u}_1 + b_1 \dot{u}_1 + b_0 u_1 + \dot{x}(t) = 0, \quad u_1(0) = \dot{u}_1(0) = 0. \tag{5.34}$$

Отметим, что все дифференциальные уравнения (5.32), (5.33), (5.34) совпадают между собой с точностью до функций $-f(t)$, $x(t)$, $\dot{x}(t)$. Совпадение уравнений (5.33) и (5.34) дает возможность исследовать чувствительность решения к параметрам b_0 и b_1 с помощью одной структурной схемы, которая представлена на

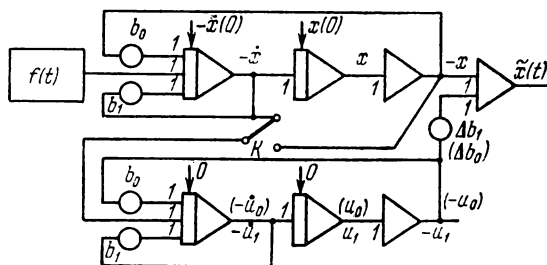


Рис. 5.13.

рис. 5.13. Схема состоит из двух частей. Верхняя часть воспроизводит решение исходного дифференциального уравнения. Вторая часть (нижняя) воспроизводит функцию чувствительности u_0 либо u_1 в зависимости от того, в каком положении находится ключ K . Выходы обеих схем поступают на сумматор. Выходная переменная верхней схемы $-x$ на сумматор поступает прямо. Выходная переменная нижней схемы поступает на сумматор через потенциометр, коэффициент передачи которого определяется величиной отклонения параметра Δb_0 (или Δb_1). На выходе

сумматора вырабатывается функция

$$\tilde{x}(t) = x(t) + \Delta x(t),$$

где $\Delta x(t) = \left. \frac{\partial x}{\partial b_0} \right|_{b_0=b_{00}} \Delta b_0$ или $\Delta x(t) = \left. \frac{\partial x}{\partial b_1} \right|_{b_1=b_{10}} \Delta b_1$.

§ 7. Формы получения решений дифференциальных уравнений на АВМ

Решение дифференциального уравнения, воспроизведенное на АВМ, должно быть представлено в форме, удобной для изучения.

В математике хорошо разработан математический аппарат исследования решений на основе так называемого фазового пространства. Важно, что аппаратура визуального наблюдения, применяемая в АВМ, позволяет наблюдать элементы этого пространства.

1. Фазовое пространство. При исследовании различного рода динамических систем часто прибегают к графическому представлению решений дифференциальных уравнений, которыми

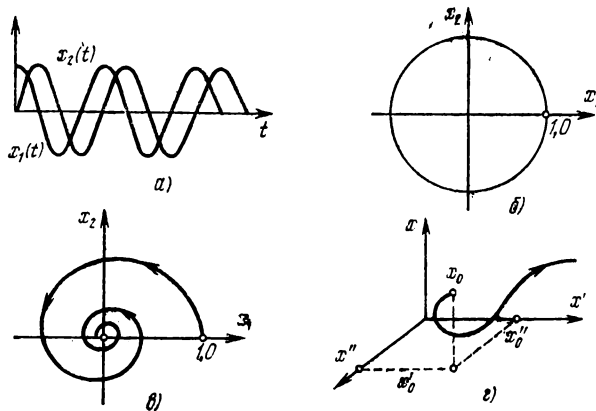


Рис. 5.14.

описываются системы. Распространены два способа графического изображения.

Первый состоит в том, что все зависимые математические переменные наносятся на график в функции независимой переменной — времени. Такие графики интегральных кривых называют осциллограммами. На рис. 5.14, а) приведены осциллограммы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ решения системы линейных

дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}x_1' &= -x_2, & x_1(0) &= 1, \\x_2' &= x_1, & x_2(0) &= 0.\end{aligned}\tag{5.35}$$

При втором способе поступают иначе. Выбирают некоторую систему прямоугольных координат, на осях которой откладываются мгновенные значения соответствующих переменных. Таким образом получается некоторое пространство, каждая точка которого полностью определяет состояние динамической системы в данный момент времени. Пространство называют фазовым. Размерность фазового пространства динамической системы определяется порядком дифференциального уравнения этой системы. На рис. 5.14, б) приведена фазовая плоскость для динамической системы, описываемой уравнениями (5.35). Решению $x_1(t) = \cos t$, $x_2(t) = \sin t$ на фазовой плоскости x_1Ox_2 соответствует траектория движущейся точки. Принято называть траекторию *фазовой траекторией*, а движущуюся точку — изображающей точкой. На фазовой траектории стрелками обычно указывают направление движения изображающей точки. На рис. 5.14, в) приведена фазовая траектория динамической системы, описываемой уравнениями

$$x_1' = -x_1 - x_2, \quad x_2' = x_1 - x_2$$

для начального состояния динамической системы $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$. Из рисунка следует, что динамическая система стремится к состоянию $x_1 = x_2 = 0$.

На рис. 5.14, г) приведена фазовая траектория динамической системы, которая описывается дифференциальным уравнением третьего порядка $x''' = F(x'', x', x)$ с начальными условиями

$$x''(0) = \ddot{x}_0, \quad x'(0) = \dot{x}_0, \quad x(0) = x_0.$$

Графическая интерпретация поведения динамической системы в виде ее фазовых траекторий во многих отношениях более выразительна, чем осциллограммы. По виду семейства фазовых траекторий (или, как еще говорят, по фазовому портрету динамической системы) часто можно сделать очень важные выводы о свойствах системы. Существует даже специальная математическая теория, так называемая геометрическая или качественная теория дифференциальных уравнений, предмет изучения которой — дифференциальные уравнения, а метод изучения — фазовое пространство.

2. Аппаратура визуального наблюдения решений дифференциальных уравнений. В качестве аппаратуры наблюдения используют многолучевые электронные осциллоскопы (индикаторы) с длительным послесвечением экрана. Осциллоскоп спосо-

бен воспроизводить осциллограммы с числом кривых, соответствующих числу имеющихся в нем лучей. При этом на вертикальные отклоняющие пластины осциллоскопа подаются соответствующие машинные переменные, а на горизонтальные пластины от специального блока развертки, расположенного внутри прибора, поступает линейно нарастающее электрическое напряжение.

Если же на вертикальные пластины подать переменную $x_2(t)$, а на горизонтальные $x_1(t)$, то воспроизводится фазовая траектория $x_2 = f(x_1)$ динамической системы на плоскости $x_1 O x_2$. Экран осциллоскопа позволяет отображать только фазовую плоскость или проекцию траектории на координатные плоскости фазового пространства. Так с помощью двухлучевого электронного индикатора при исследовании траектории рис. 5.14, з) можно одновременно наблюдать на экране лишь ее проекции $x' = f_1(x)$, $x'' = f_2(x)$. Первая функция есть проекция на плоскость $x'Ox$, вторая функция — проекция на плоскость $x''Ox$. Возможность на АВМ визуального наблюдения фазовых траекторий, хотя и в проекциях, позволяет сопоставлять теоретические результаты качественной теории дифференциальных уравнений с поведением исследуемой динамической системы. Особенно широкое распространение это получило в теории автоматического управления, теоретической радиотехнике и электронике.

§ 8. Масштабирование зависимых переменных по методу масштабных задач. Пример

Рассматривая вопросы программирования АВМ для воспроизведения решений дифференциальных уравнений, мы ограничивались уровнем структурных схем. Теперь мы изложим пример разработки программы АВМ, детализированный до уровня коммутационных схем с учетом масштабирования зависимых и независимой переменных. Для иллюстрации взята конкретная физическая задача. Программирование АВМ с учетом физического содержания решаемой задачи, как правило, позволяет упростить наиболее сложный этап программирования — выбор масштабов.

1. Постановка задачи. Требуется построить коммутационную схему АВМ для исследования движения материальной точки. Точка массой m совершает движение в плоской, препятствующей движению среде под действием притягивающей силы, исходящей из неподвижного центра O (рис. 5.15, а). Итак, действуют две силы. $P = -r m \omega^2$ — сила притяжения точки центром. Эта сила пропорциональна расстоянию r между точкой и центром. $Q = -k m v$ — сила сопротивления движению со стороны среды.

Эта сила пропорциональна скорости точки v . Величины k и ω^2 — коэффициенты пропорциональности.

2. Вывод дифференциальных уравнений движения. Исследование любого физического явления на АВМ требует предварительного математического описания явления. В данном случае

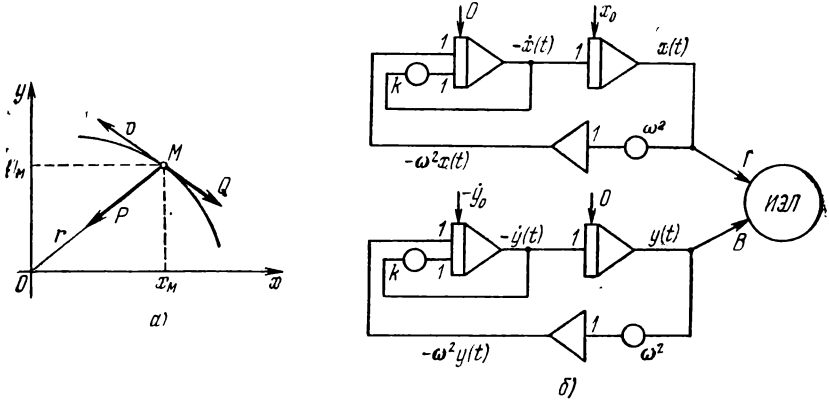


Рис. 5.15.

для этого необходимо вспомнить второй закон Ньютона, согласно которому движение свободной материальной точки на плоскости описывается системой дифференциальных уравнений

$$X = m\ddot{x}, \quad Y = m\ddot{y}, \quad (5.36)$$

где X , Y — силы, действующие вдоль координатных осей, m — масса точки, \ddot{x} , \ddot{y} — ускорения материальной точки вдоль координатных осей x , y .

Найдем дифференциальные уравнения, описывающие движение точки в декартовых координатах x , y с началом в центре O . Пусть в момент времени t движущаяся точка находится в пункте M . Определим компоненты сил P и Q по осям x , y :

$$\left. \begin{aligned} X_P &= -m\omega^2 r \frac{x}{r} = -m\omega^2 x, \\ Y_P &= -m\omega^2 r \frac{y}{r} = -m\omega^2 y, \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

$$\left. \begin{aligned} X_Q &= -mk\dot{x}, \\ Y_Q &= -mk\dot{y}. \end{aligned} \right\} \quad (5.38)$$

С учетом (5.37) и (5.38) дифференциальные уравнения (5.36) движения точки примут вид

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - k\dot{x}, \quad \ddot{y} = -\omega^2 y - k\dot{y}. \quad (5.39)$$

Пусть в начальный момент времени ($t=0$) положение и скорость материальной точки будут такими: $x(0)=x_0$, $y(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$, $\dot{y}(0)=\dot{y}_0$.

Контроль правильности функционирования АВМ при воспроизведении решения (5.39) легко осуществляется с помощью контрольного соотношения

$$kx + \dot{x} + ky + \dot{y} - z = 0,$$

где z — избыточная переменная. Дифференцируя контрольное соотношение по переменной t , имеем:

$$\dot{z} = k\dot{x} + \ddot{x} + k\dot{y} + \ddot{y}.$$

Отсюда с учетом (5.39) получаем для избыточной переменной определяющие дифференциальное уравнение

$$\dot{z} = \omega^2(x + y), \quad z(0) = kx_0 + \dot{y}_0.$$

3. Разработка структурной схемы АВМ. Для линейной системы дифференциальных уравнений (5.39) структурная схема АВМ показана на рис. 5.15, б). Схема построена в соответствии с общим методом и состоит из линейных операционных блоков сумматоров и интеграторов. Переменные x и y подаются на электроннолучевой индикатор на его вертикальные и горизонтальные входы. При этом на экране воспроизводится траектория точки $y = \varphi(x)$.

4. Масштабирование зависимых переменных (метод масштабных задач). В процессе масштабирования от исходных математических переменных переходят к машинным переменным — электрическим напряжениям. Переменным x , \dot{x} , y , \dot{y} в АВМ соответствуют электрические напряжения $u_{x0} = m_{x0}x$, $u_{x1} = m_{x1}\dot{x}$, $u_{y0} = m_{y0}y$, $u_{y1} = m_{y1}\dot{y}$, где m_{x0} , m_{x1} , m_{y0} , m_{y1} — масштабы. Масштабы в соответствии с (4.4) исчисляются по формуле, куда входит максимальное значение переменной. Так, для переменной x масштаб равен $m_{x0} = 100/|x_{\max}|$.

Необходимость в априорном знании максимальных значений переменных x_{\max} , \dot{x}_{\max} , y_{\max} , \dot{y}_{\max} затрудняет масштабирование. Эта трудность типична для масштабирования и ее преодоление на практике проводится либо по методу *пробных масштабов* с последующим их уточнением (§ 5 гл. 4), либо по методу *масштабных задач*.

Остановимся на методе масштабных задач. Его применение для масштабирования переменных привлекательно тем, что

позволяет выразить масштабы через параметры исходной задачи. Это дает возможность создавать коммутационные схемы АВМ, которые способны воспроизвести решение ряда задач, отличающихся числовыми значениями параметров.

Идея метода состоит в том, что от исходной физической задачи переходят к другой, более простой в математическом отношении, но сходной по физическому содержанию. Эта сходная задача называется масштабной. Важно, чтобы масштабная задача допускала бы простое аналитическое решение, анализ которого позволил бы сделать правильные заключения о границах изменения переменных исходной физической задачи.

Упростим исследуемую задачу. Пусть свойство среды, в которой движется точка, таково, что она не препятствует движению. Очевидно, это соответствует $k=0$ и системе уравнений

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad \ddot{y} = -\omega^2 y, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0.$$

Масштабная задача имеет решение

$$x(t) = x_0 \cos \omega t, \quad y(t) = \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (5.40)$$

При этом максимальные значения переменных, как это следует из формул (5.40), будут

$$|x_{\max}| = |x_0|; \quad |\dot{x}_{\max}| = \omega |x_0|; \quad |y_{\max}| = |\dot{y}_0|/\omega; \quad |\dot{y}_{\max}| = |\dot{y}_0|.$$

Сопоставим теперь физическое содержание задач. Масштабная задача соответствует движению материальной точки в пустоте. В исходной задаче действие сопротивляющейся среды, именно потому, что она препятствует движению, не может привести к увеличению максимальных значений скоростей и перемещений точки вдоль координатных осей. Поэтому для расчета масштабов в качестве верхней границы изменения переменных следует взять максимальные значения переменных масштабной задачи.

Расчет масштабов выполнен в масштабной табл. 1.

Таблица 1

Переменная	Максимальное абсолютное значение переменной	Величина масштаба	Обозначение масштаба
x	$ x_0 $	$100/ x_0 $	m_{x0}
\dot{x}	$\omega x_0 $	$100/(\omega x_0)$	m_{x1}
y	$ \dot{y}_0 /\omega$	$100\omega/ \dot{y}_0 $	m_{y0}
\dot{y}	$ \dot{y}_0 $	$100/ \dot{y}_0 $	m_{y1}

5. Разработка коммутационной схемы. Коммутационная схема разрабатывается с ориентировкой на конкретную АВМ. В данном случае взята машина МН-7.

Коммутационная схема в отличие от структурной разрабатывается не для математических переменных, а для машинных — электрических напряжений. Поскольку выбор масштабов определен при выполнении различных операций, необходимо выполнить согласование масштабов (§ 5 гл. 4), что делается с помощью потенциометров.

Коммутационная схема представлена на рис. 5.16, а). В ней отмечены номера интеграторов АВМ МН-7, которые предполагается использовать. Потенциометры перед интеграторами 6 и 8 служат для согласования масштабов переменных $\dot{x}(t)$, $x(t)$ и $\dot{y}(t)$, $y(t)$.

Потенциометры с коэффициентом передачи ω на входах 5-го и 7-го интеграторов служат для согласования масштабов входных и выходных переменных интеграторов. Кроме того, эти потенциометры обеспечивают задание структурного коэффициента ω^2 .

Коммутационная схема получена в «общем виде» и позволяет исследовать процесс движения материальной точки на АВМ для любых параметров ω и k . Если параметрам ω и k присвоены конкретные числовые значения, например $\omega=5$, $k=0,1$, то соответствующую им коммутационную схему можно сделать более полной, указав номера входов операционных блоков. Такая схема показана на рис. 5.16, б).

6. Масштабирование независимой переменной (времени). Особенность рассматриваемой физической задачи — в том, что ее независимая переменная физически представляет собой время. В АВМ независимой переменной всегда является время. Таким образом, здесь произошло совпадение независимой переменной исходной задачи и независимой машинной переменной.

Если воспроизвести решение на АВМ в соответствии с коммутационной схемой (рис. 5.16, б), то длительность и течение процесса на АВМ будет таким же, как и в реальном физическом явлении, описываемом уравнениями (5.39). В этом случае, как мы знаем, говорят, что решение задачи воспроизведено в *реальном масштабе времени*. Если по каким-либо соображениям нам целесообразно ускорить течение процессов в АВМ, например, в два раза, то в соответствии с § 6 гл. 4 необходимо увеличить коэффициенты передачи всех интеграторов и только интеграторов в два раза. В этом случае говорят, что решение задачи воспроизведено в ускоренном времени. На рис. 5.16, б) соответствующие коэффициенты передачи написаны над потенциометрами.

Аналогично, если желательно замедлить течение процессов в АВМ, необходимо уменьшить коэффициенты передачи интеграторов.

7. О результатах исследования. Наблюдая на ИЭЛ траекторию движения материальной точки в координатах x, y , можно выявить много интересных особенностей исследуемого физического явления.

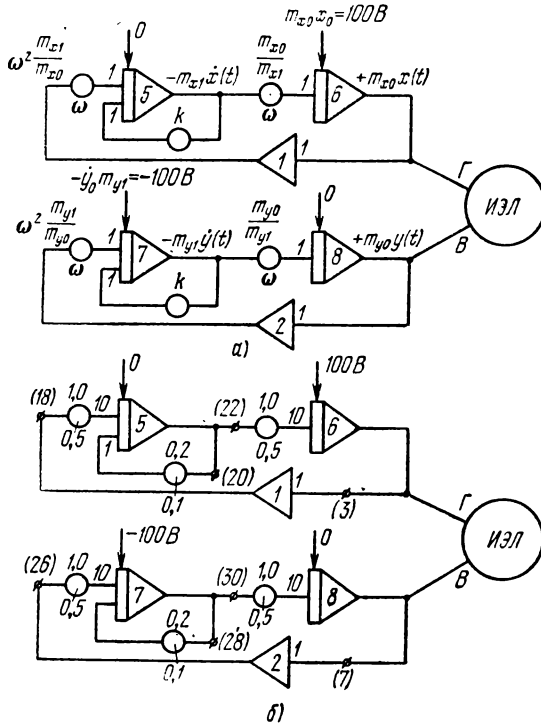


Рис. 5.16.

Оказывается, что при $k=0$ траектория движения представляет собой эллипс с полуосями x_0 и \dot{y}_0/ω .

Если несколько увеличить k , то траектория из замкнутой превращается в спиральную, и видно, как материальная точка асимптотически стремится к притягивающему центру O , вращаясь вокруг него.

При определенной величине k , зависящей от ω , наступает такой момент, когда точка, не сделав полного оборота, падает на притягивающий центр. Это соответствует так называемому аperiодическому движению.

§ 9. Вопросы и задачи

1. Решение каких дифференциальных уравнений наиболее просто воспроизвести на АВМ?

2. Можно ли на структурах АВМ воспроизводить решения дифференциальных уравнений в частных производных? Решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений?

3. Стационарное распределение температуры в тонком полубесконечном стержне описывается дифференциальным уравнением.

$$x''(t) - C^2x(t) = 0,$$

где $x(t)$ — температура стержня в сечении с абсциссой t , $0 \leq t < \infty$; C^2 — постоянный коэффициент.

Для удобства исследования на АВМ распределения температуры вдоль стержня заменой переменной $\tau = 1 - \exp(-t)$ свести исходное уравнение к уравнению, описывающему распределение температуры на конечном интервале $\tau \in [0, 1]$.

4. Какие дифференциальные уравнения при реализации их на АВМ приводят к созданию вычислительных схем АВМ с переменной структурой?

5. В чем проявляется неустойчивость решений дифференциальных уравнений, реализуемых на АВМ? Каковы основные причины неустойчивости?

6. Можно ли на АВМ воспроизводить неустойчивые решения дифференциальных уравнений?

7. В чем вред «длинных» обратных связей в вычислительных схемах АВМ?

8. Показать, что два частных решения y_a , y_b одного и того же дифференциального уравнения с неустойчивыми решениями

$$y''(t) = 3y(t) + 2y'(t),$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$a) \quad y_a(0) = 1, \quad y'_a(0) = -1,$$

$$б) \quad y_b(0) = 1, \quad y'_b(0) = 3,$$

имеют разный характер асимптотического поведения относительной погрешности:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta y_a(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \delta y_b(t) = \varepsilon,$$

где ε — некоторая малая величина, определяемая добротностью АВМ.

9. Показать, что два частных решения y_a , y_b одного и того же дифференциального уравнения с устойчивыми решениями

$$y''(t) = -3y(t) - 4y'(t),$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$a) \quad y_a(0) = 1, \quad y'_a(0) = -1,$$

$$б) \quad y_b(0) = 1, \quad y'_b(0) = -3,$$

имеют разный характер асимптотического поведения относительной погрешности:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta y_a(t) = \varepsilon, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \delta y_b(t) = \infty,$$

где ε — некоторая малая положительная величина, определяемая добротностью АВМ.

10. Показать, что линейное дифференциальное уравнение первого порядка с запаздывающим аргументом

$$y'(t) + by(t-\tau) = 0$$

при $0 < b < \frac{\pi}{2\tau}$ имеет устойчивое решение.

11. Построить структурные схемы АВМ для воспроизведения решений дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений, заданных в форме задачи Коши:

- 1) $y'' + 4y' + 3y = 0$.
- 2) $y'' + 2y' + 10y = 0$.
- 3) $y^{IV} + 16y = 0$.
- 4) $y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$. *Шильке*
- 5) $y'' + 0,1y' + 2y = 0$.
- 6) $x' = -x + 3y, \quad y' = 3x - y$.
- 7) $x'' = -2x + 3y, \quad y'' = 3x - 2y$. *Батанова*
- 8) $x' = -3x + 2y - z, \quad y' = 2x - 3y - z, \quad z' = x - y - 3z$.
- 9) $x'' = 2x - 3y, \quad y'' = x - y$.
- 10) $x' = x - y, \quad y' = y - x$. *Кликова*
- 11) $y'' - 2y' - 3y = \exp(-t)$. 1
- 12) $y'' + 3y' + 2y = \sin t$. 2
- 13) $y'' + 2y' + y = t \exp(-t)$. 3
- 14) $y'' + 4y' + 4y = \cos^2 t$. 4
- 15) $y'' + 9y = \exp(-t) \cos t$. 5
- 16) $x' = -x + 3y + t, \quad y' = 3x - y + \operatorname{sh} t$.
- 17) $x' = x + 2y + t \exp(-t), \quad y' = 2x - 2y + \cos^2 t$.
- 18) $x' = -2x - y + t \exp(-2t), \quad y' = x + \exp(-t)$.
- 19) $x' = -x + 2y + \exp(-t), \quad y' = x + \sin t$. 6
- 20) $x' = -2x + 4y - t^2 \exp(-t), \quad y' = 3x - 6y$.
- 21) $y'' = -\sin^2 y$.
- 22) $y'' = -\sin y$.
- 23) $y' = -\exp(-y)$.
- 24) $y'' + \alpha y' + \omega^2 \sin y = \sin t$.
- 25) $y'' = \exp(-y) \sin y$.
- 26) $y''' = y' + 1$.
- 27) $(t^2 + 1)y'' + ty' + ny = 0$.
- 28) $ty'' + (1-t)y' + ny = 0$.
- 29) $[(1 + \sin^2 t)y'']'' = \exp(-t)$.
- 30) $\left[\frac{y''}{1+t} \right]'' = \exp \exp(-t)$.

31) $[1 - \exp(-t)]y'' + 2y' + y = 0.$

32) $yy' + 1 - y' = 0.$

33) $y' \cos y - 1 = 0.$

34) $y''' + a_2(t)y'' + a_0(t)y = b_0(t)x + b_1(t)x' + b_2(t)x''.$

35) $y'' + a_1(t)y' + f(y) = b_0x + b_1(t)x'.$

36) $y'' + y' \cos y + \sin y = b_0x + b_1(t)x'.$

37) $y'' \sin 2y + 2(y')^2 \cos 2y + a_1y' + a_0y = b_0(t)x + b_1(t)x' + b_2x''.$

38) $(y' - y'')\exp(-y) + a_1(t)y' + a_0(t)y = b_0(t)x + b_2x''.$

У к а з а н и е: перед решением задач с 11) — 38) рекомендуется предварительно проработать главу 8.

12. Пусть некоторая гипотетическая АВМ не имеет интеграторов, но располагает достаточным количеством идеально точных операционных блоков дифференцирования и рядом других блоков. Требуется запрограммировать эту АВМ на воспроизведение решения уравнения

$$a_0y''(t) + a_1y'(t) + a_2y(t) = 0; \quad y(0) = y_0; \quad y'(0) = y'_0.$$

13. Какие существуют приемы исследования на АВМ решения дифференциального уравнения в зависимости от какого-либо параметра уравнения?

14. Чем можно объяснить тот факт, что дифференциальные уравнения чувствительности — всегда линейные?

15. В каком виде сервисная аппаратура АВМ позволяет получить решения дифференциальных уравнений?

16. Что такое фазовые траектории динамической системы?

17. Почему при программировании АВМ важна содержательная физическая постановка задачи исследования физического явления?

18. Что представляет собой масштабная задача и в каком отношении она находится с исследуемым физическим явлением?

19. Воспроизвести на АВМ МН-7 фазовую траекторию системы

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \\ x_2' &= -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2). \end{aligned}$$

Обратить внимание, что при $t \rightarrow \infty$ траектория вырождается в окружность $x_1^2 + x_2^2 = 1$. При этом, если начальная точка траектории $x_1(0), x_2(0)$ находится внутри круга, то траектория асимптотически стремится к окружности $x_1^2 + x_2^2 = 1$, «наматываясь» на нее изнутри. Для начальных точек, расположенных вне круга $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$, траектория «наматывается» на окружность снаружи. Фазовые траектории типа этой окружности называют *предельными циклами*.

20. Воспроизвести на АВМ МН-7 изменение во времени населения земного шара между 1925 и 2025 гг.

В соответствии со статистическими данными количество людей, населяющих земной шар между 1925 и 2025 гг., приближенно должно описываться дифференциальным уравнением быстрого роста

$$x' = (k_0 + k_1 t)x, \quad x(0) = 1907 \text{ млн. человек,}$$

где $x(t)$ — население земного шара; t — время в годах, отсчитываемое от 1925 г.; $k_0 = 5,84 \cdot 10^{-3}$, $k_1 = 3,74 \cdot 10^{-4}$ — коэффициенты.

21. Смоделировать на АВМ МН-7 процесс распространения инфекционного заболевания, возникшего в удаленном поселке с населением 1000 человек. В момент обнаружения эпидемии 90 человек болело и являлись носителями инфекции; 900 человек здоровы, но потенциально подвержены заболеванию; 10 оставших-

ся уже переболели и у них выработался иммунитет. Каждый больной ежедневно заражает в среднем одного здорового из тысячи. Через 10 дней заболевший выздоравливает, приобретая иммунитет.

Распространение эпидемии описывается системой дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$\begin{aligned}x' &= -\beta xy, & x(0) &= 900, \\y' &= \beta xy - \gamma y, & y(0) &= 90, \\z' &= \gamma y, & z(0) &= 10,\end{aligned}$$

где x — число подверженных заболеванию; y — число разносящих инфекцию; z — число выздоравливающих и имеющих иммунитет; $\beta = 0,001$; $\gamma = 0,1$.

При моделировании на АВМ следует:

1) построить эпидемическую кривую $x'(t)$, которая характеризует скорость распространения нового заболевания; найти максимальное число больных (y_{\max}) и момент времени, соответствующий этому максимуму; определить продолжительность эпидемии, считая, что эпидемия, кончилась, когда 99,5% населения переболело;

2) повторить п. 1) при условии, что благодаря медицинскому вмешательству (частичная изоляция больных и профилактика заболевания) заражаемость снижена в два раза, т. е. $\beta = 0,0005$;

3) при разработке структурных и коммутационных схем предусмотреть систему контроля правильности функционирования АВМ с помощью очевидного тождества $x + y + z = 1000$; убедиться в эффективности разработанной системы контроля.

22. На острове обитают рыси и зайцы. Зайцы питаются травой, которая растет на острове в изобилии. Рыси пожирают зайцев. Изменение во времени числа рысей и зайцев описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}x'(t) &= ax - bxy; & a, b &> 0, \\y'(t) &= cxy - py, & c, p &> 0,\end{aligned}$$

где x — число зайцев в тысячах, y — число рысей в тысячах, t — время в годах.

Требуется: 1) пояснить вид системы дифференциальных уравнений; найти условия, при которых численность животных не меняется;

2) воспроизвести решение системы уравнений и фазовую траекторию $y = \varphi(x)$ на машине МН-7 при $a=4$, $b=2$, $c=1$, $p=5$, если в начальный момент времени число зайцев было $x(0) = 8$ тыс., рысей $y(0) = 2$ тысяч.

♦

РЕДУКЦИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ К ЗАДАЧЕ КОШИ

§ 1. Краевые задачи

АВМ по логике своей работы способны воспроизводить решения лишь задач с начальными условиями. Во многих инженерных задачах решения соответствующих дифференциальных уравнений должны удовлетворять крайевым условиям. В качестве примера может быть приведена крайевая задача об изгибе балки, лежащей на двух опорах. Изгиб происходит под действием распределенной нагрузки плотности $q(t)$ (рис. 6.1). Дифференциальное уравнение изгиба имеет вид:

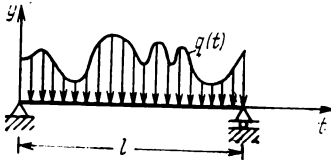


Рис. 6.1.

$$E\mathcal{J}y''(t) = M(t). \quad (6.1)$$

Решение должно удовлетворять крайевым условиям: при $t=0$ $y=0$; при $t=l$ $y=0$. Здесь $E\mathcal{J}$ — жесткость балки, l — длина балки, $M(t)$ — изгибающий момент, y — прогиб, y' — угол поворота сечения балки. Смысл крайевых условий в том, что прогибы концов балки, лежащих на опорах, равны нулю.

Свести эту крайевую задачу к задаче Коши — значит найти такое $y'(0) = y'_0$, зависящее от $y(l)$, чтобы решение уравнения (6.1) совпало с решением задачи Коши

$$E\mathcal{J}y''(t) = M(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = y'_0.$$

К настоящему моменту времени для воспроизведения решений крайевых задач на ЭВМ не существует общей теории. Поэтому далее будут изложены некоторые частные приемы и методы приближенного и точного сведения крайевых задач к задаче Коши в предположении, что решение рассматриваемых крайевых задач существует и единственно.

§ 2. Методы проб

Изложим два метода проб на примере крайевой задачи $y'' = \Phi[t, y, y']$, $y(0) = y_0$, $y(t^*) = y_*$. Решение ее отыскивается внутри интервала $0 < t < t^*$. Цель редукции — найти такое y_0 , зависящее от y_* , чтобы решение задачи Коши $y'' = \Phi[t, y, y']$,

$y(0) = y_0, y'(0) = y_0'$ совпало с решением исходной краевой задачи.

Первый метод проб состоит в том, что на АВМ воспроизводится решение ряда вспомогательных задач Коши $y'' = \Phi[t, y, y'], y(0) = y_0$, для $y'(0) = m_1, m_2, \dots, m_j, \dots$, где $m_1, m_2, \dots, m_j, \dots$ — произвольно взятые величины. Каждое решение воспроизводится до момента $t = t^*$, и при этом фиксируются значения $y(t^*) = y_{m1}, y_{m2}, \dots, y_{mj}, \dots$. Графики интегральных кривых изображены на рис. 6.2. Из-за произвольного выбора значений $y'(0)$ ни одна из интегральных кривых не прошла через заданную точку (t^*, y_*) . Результаты работы АВМ можно отобразить в виде функции $y(t^*) = F(m)$, представленной таблично:

$$\frac{y'(0)}{y(t^*)} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} m_1 & m_2 & \dots & m_j & \dots \\ \hline y_{m1} & y_{m2} & \dots & y_{mj} & \dots \end{array} \right.$$

или в виде графика, показанного на рис. 6.3.

Располагая функциональной зависимостью $y(t^*) = F(m)$, можно найти искомое y_0 , соответствующее y_* , либо численно (путем интерполяции), либо графически, как это показано на рис. 6.3.

Изложенный метод проб неэкономичен из-за произвола в выборе значений $m_1, m_2, \dots, m_j, \dots$

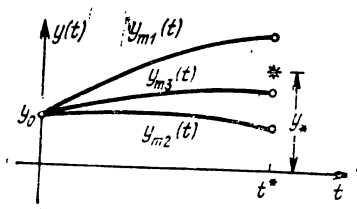


Рис. 6.2.

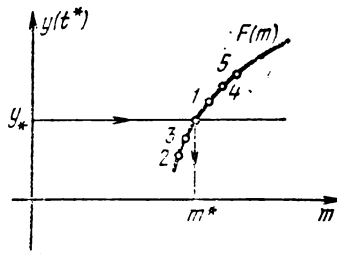


Рис. 6.3.

Второй метод, который получил название *метода проб и поправок*, более рационален. При его использовании после двух первых произвольных значений m_1 и m_2 следующее значение m_3 выбирают не произвольно, а с учетом уже полученных результатов.

Графическая интерпретация метода проб и поправок дана на рис. 6.4. Точка 1 имеет координаты (m_1, y_{m1}) . Соответственно точка 2 — координаты (m_2, y_{m2}) . Эти точки 1 и 2 соединяются прямой линией до пересечения с прямой $y(t^*) = y_*$.

Абсцисса точки пересечения является следующим значением m_3 , которое, вообще говоря, расположено ближе к искомому y_0 , чем m_1 и m_2 . Для полученного значения m_3 воспроизводится решение на АВМ и определяется значение y_{m_3} . Это позволяет на график нанести точку 3 с координатами (m_3, y_{m_3}) . Соединяя

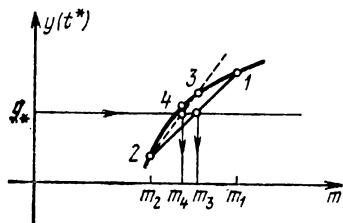


Рис. 6.4.

точку 3 с точкой 2 прямой до пересечения с прямой $y(t^*) = y_*$, получаем следующие значения m_4 . Улучшенные значения m_3, m_4, \dots не обязательно находить графически. Из рис. 6.4 видно, что m_3 как абсцисса пересечения двух прямых равна

$$m_3 = m_1 + (m_2 - m_1) \frac{y_* - y_{m_1}}{y_{m_2} - y_{m_1}}.$$

Соответственно для некоторого k -го шага процесса уточнения получим:

$$m_k = m_{k-2} + (m_{k-1} - m_{k-2}) \frac{y_* - y_{m_{k-2}}}{y_{m_{k-1}} - y_{m_{k-2}}}.$$

Так чередуют решение задачи на АВМ с уточнением значения $y'(0)$ до тех пор, пока для некоторого m соответствующее ему y_m мало отличается от y_* .

Оба метода можно рассматривать как способы решения уравнения $y_* = F(m)$, корнем которого является искомое y'_0 . Не имея аналитического выражения $F(m)$, информацию о функции $y(t^*) = F(m)$ получают экспериментально с помощью АВМ.

В принципе методы проб годятся для редукции любых граничных задач к задачам Коши. Однако эффективность этих методов наталкивается на порядок дифференциальных уравнений. Чем выше порядок, тем сложнее поиск неизвестных начальных условий. Так, при изучении изгиба балки, лежащей на упругом основании, приходится проводить редукцию краевой задачи:

$$\begin{aligned} E\mathcal{Y}y^{IV} + ky &= q(t), \\ y(0) = y'(0) = y(l) = y''(l) &= 0, \end{aligned}$$

где $E\mathcal{Y}$ — жесткость балки; k — «коэффициент постели», характеризующий реакцию упругого основания на балку; $q(t)$ — распределенная плотность нагрузки; l — длина балки. Краевые условия определяются способом заделки концов балки. Условия $y(0) = y'(0) = y(l) = y''(l) = 0$ означают, что левый конец балки защемлен, а правый опирается на опору. В процессе редук-

ции необходимо решить систему уравнений относительно $y''(0)$ и $y'''(0)$:

$$\begin{aligned} y''(l) = f_1[y'''(0), y''(0)] &= 0, \\ y(l) = f_2[y'''(0), y''(0)] &= 0, \end{aligned}$$

где f_1 и f_2 — некоторые функции двух переменных, аналитический вид которых неизвестен. Информация об этих функциях должна быть получена путем проб с помощью АВМ.

Часто бывает так, что система уравнений для определения недостающих начальных условий имеет какой-либо специальный вид. В таких случаях, используя конкретные особенности системы уравнений, удается порой довольно просто провести редукцию. В качестве примера приведем краевую задачу

$$\begin{aligned} [E\mathcal{Y}(t)y'']'' &= q(t), \\ y(0) = y(l) = y''(0) = y''(l) &= 0. \end{aligned}$$

Она описывает изгиб балки длины l , лежащей на двух опорах. Балка изгибается под действием сплошной нагрузки плотности $q(t)$. Жесткость балки — переменная и меняется в соответствии с выражением $E\mathcal{Y}(t)$. В этой задаче в процессе редукции приходится разрешать систему уравнений относительно $y'(0)$ и $y'''(0)$:

$$\begin{aligned} y''(l) = f_1[y'''(0)] &= 0, \\ y(l) = f_2[y'''(0), y'(0)] &= 0. \end{aligned}$$

Система имеет специальный, так называемый треугольный вид. Проводя редукцию, целесообразно начинать с определения неизвестного $y'''(0)$ путем решения первого уравнения, после чего второе уравнение будет содержать только одно неизвестное $y'(0)$.

§ 3. Линейные краевые задачи (метод комбинаций)

Для краевых задач, описываемых линейными дифференциальными уравнениями, существует метод, позволяющий свести редукцию краевой задачи n -го порядка к решению n вспомогательных задач Коши. Изложим этот метод применительно к уравнению второго порядка с переменными коэффициентами

$$y'' + k_1(t)y' + k_2(t)y = f(t), \quad (6.2)$$

и с краевыми условиями $y(0) = y_0$, $y(t^*) = y_*$, где 0 и t^* — границы интервала, на котором отыскивается решение. Напомним, что наша цель — найти начальное условие $y'(0) = y'_0$.

Уравнение (6.2) — второго порядка, поэтому потребуются две вспомогательные задачи Коши:

$$\text{первая: } y_1'' + k_1(t)y_1' + k_2(t)y_1 = f(t),$$

$$y_1(0) = y_0, \quad y_1'(0) = 0;$$

$$\text{вторая: } y_2'' + k_1(t)y_2' + k_2(t)y_2 = 0,$$

$$y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1.$$

Их решения воспроизводятся на АВМ до момента $t=t^*$ и находятся значения $y_1(t^*)$ и $y_2(t^*)$, через которые выражается искомое y_0 . Найдем выражение для определения y_0 . Для этого образуем линейную комбинацию из решений

$$y(t) = y_1(t) + y_0' y_2(t), \quad (6.3)$$

где y_0' — искомое начальное условие. Линейная комбинация (6.3) удовлетворяет уравнению (6.2) и начальным условиям $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$. Для того, чтобы (6.3) удовлетворяло, кроме того, и краевому условию $y(t^*) = y_*$, необходимо соответствующим образом подобрать y_0' . Для момента $t=t^*$ выражение (6.3) дает уравнение относительно искомого y_0' : $y(t^*) = y_1(t^*) + y_0' y_2(t^*)$, отсюда $y_0' = [y_* - y_1(t^*)] / y_2(t^*)$. В правой части все величины известны: y_* — по условию задачи, $y_1(t^*)$ и $y_2(t^*)$ — в результате решения на АВМ первой и второй вспомогательных задач Коши.

Когда встречаются линейные краевые задачи более высокого порядка, определение недостающих начальных условий получается в результате воспроизведения решений на АВМ ряда вспомогательных задач Коши с последующим решением системы линейных алгебраических уравнений относительно искомого начальных условий. Подробнее с этим можно познакомиться, пользуясь любым учебником по численным методам, в разделе решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для линейных дифференциальных уравнений некоторых специальных видов число вспомогательных задач Коши, необходимых для проведения редукции, может быть и меньше порядка исходного дифференциального уравнения. Покажем это сначала на примере краевой задачи, часто встречающейся в сопротивлении материалов:

$$y''(t) = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y(t^*) = y_*. \quad (6.4)$$

Оказывается, что для определения неизвестного $y'(0) = y_0'$ достаточно иметь вместо двух всего одну вспомогательную задачу

Коши

$$y_1'(t) = f(t), \quad y_1'(0) = 0, \quad y_1(0) = y_0. \quad (6.5)$$

Действительно, общее решение уравнения (6.4), представленное через неизвестное y_0 , будет

$$y(t) = y_0' t + \int_0^t dt \int_0^t f(t) dt + y_0$$

или

$$y(t) = y_0' t + y_1(t), \quad (6.6)$$

где $y_1(t) = \int_0^t dt \int_0^t f(t) dt + y_0$ — решение вспомогательной задачи Коши. Из (6.6) для момента времени $t=t^*$ имеем выражение для определения неизвестного y_0'

$$y_0' = \frac{y_* - y_1(t^*)}{t^*}. \quad (6.7)$$

Теперь рассмотрим линейную краевую задачу четвертого порядка:

$$\begin{aligned} y''(t) &= f_1(t), & y(0) &= y_0, & y(t^*) &= y_*, \\ z''(t) &= f_2(t)y(t), & z(0) &= z_0, & z(t^*) &= z_*. \end{aligned}$$

Редукция этой задачи к задаче Коши требует всего двух вспомогательных задач Коши. Первая вспомогательная задача Коши совпадает с (6.5), и искомое y_0' определяется по (6.7). Вторая вспомогательная задача Коши:

$$\begin{aligned} y_1''(t) &= f_1(t), & y_1(0) &= y_0, & y_1'(0) &= y_0', \\ z_1''(t) &= f_2(t)y_1(t), & z_1'(0) &= 0, & z_1(0) &= z_0, \end{aligned}$$

отсюда искомое $z_0' = \frac{z_* - z_1(t^*)}{t^*}$.

§ 4. Вопросы

1. Почему АВМ воспроизводит решение дифференциальных уравнений, заданных только в форме задачи с начальными условиями? (Рассмотреть работу интегратора.)

2. В чем состоит редукция краевой задачи к задаче с начальными условиями по методу проб и поправок? Чем ограничивается применимость этого метода?

3. Какие приемы существуют для редукции линейных краевых задач к задаче с начальными условиями?

ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ НА АВМ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

§ 1. Уравнения в частных производных

В этой главе рассмотрим приближенный способ воспроизведения на АВМ решений дифференциальных уравнений в частных производных на примере линейных дифференциальных уравнений вида

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = F(x, y), \quad (7.1)$$

где A, B, C, a, b, c — заданные коэффициенты, которые могут быть постоянными или некоторыми функциями аргументов x, y ; $F(x, y)$ — заданная функция переменных x и y . Решение $u(x, y)$ уравнения (7.1) должно удовлетворять (7.1) в некоторой области переменных x, y , граница которой задается уравнением $\Gamma(x, y) = 0$.

В зависимости от знака дискриминанта $D = AC - B^2$ уравнение (7.1) относят к одному из типов: эллиптическому ($D > 0$), параболическому ($D = 0$), гиперболическому ($D < 0$), смешанному, когда D не сохраняет знак в заданной области, ограниченной кривой $\Gamma(x, y) = 0$.

К уравнениям эллиптического типа принадлежит уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y) \quad (7.2)$$

и его частный случай уравнения Лапласа ($F(x, y) = 0$). Уравнение (7.2) описывает стационарные процессы, связанные с изгибом пластин и мембран, с кручением стержней, со стационарным распределением температуры в пластинах и т. д.

К уравнениям параболического типа относится уравнение теплопроводности (диффузии)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t). \quad (7.3)$$

Уравнение (7.3) описывает нестационарное распределение температуры вдоль тонкого однородного стержня. Решение $u(x, t)$ представляет собой температуру сечения стержня с координатой x в момент времени t .

Примером уравнения гиперболического типа может служить волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (7.4)$$

которое описывает свободные колебания однородной струны. Решение $u(x, t)$ уравнения (7.4) физически представляет собой поперечное смещение струны в сечении x для момента времени t .

В инженерной практике встречаются дифференциальные уравнения в частных производных, порядок которых больше двух. Так, прогиб балки переменной жесткости $E\mathcal{G}(x)$ под действием сплошной нагрузки, плотность которой $q(x, t)$ меняется во времени, описывается дифференциальным уравнением четвертого порядка с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E\mathcal{G}(x) \frac{d^2 u}{dx^2} + \psi(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q(x, t),$$

где x — координата сечения балки, t — время, $u(x, t)$ — прогиб балки в сечении x в момент времени t , $\psi(x)$ — заданная функция, учитывающая плотность распределения массы вдоль балки.

При решении дифференциальных уравнений в частных производных (7.1) встречаются следующие три типа краевых задач.

Первая краевая задача (задача Дирихле). Решение $u(x, y)$ уравнения (7.1) на границе области должно совпасть с некоторой наперед заданной функцией $\varphi(x, y)$, т. е. $u_\Gamma(x, y) = \varphi(x, y)$.

Вторая краевая задача (задача Неймана). Решение $u(x, y)$ уравнения (7.1) должно быть таким, чтобы его нормальная производная совпала бы на границе области $\Gamma(x, y)$ с некоторой наперед заданной функцией $\varphi(x, y)$, т. е. $(du/dn)_\Gamma = \varphi(x, y)$. Кроме того, решение $u(x, y)$ должно принять заранее заданное значение m в некоторой заданной точке x^*y^* области, т. е. $u(x^*, y^*) = m$.

Третья краевая задача является задачей смешанного типа. На границе области $\Gamma(x, y) = 0$ задается линейная комбинация значений функции $u(x, y)$ и ее нормальной производной $\alpha(du/dn)_\Gamma + \beta u_\Gamma(x, y) = \varphi(x, y)$.

Существенно, что наряду с краевыми условиями решения некоторых дифференциальных уравнений должны удовлетворять дополнительным так называемым начальным условиям. Такая терминология принята для дифференциальных уравнений, описывающих нестационарные физические процессы, т. е. такие, которые протекают и во времени, и в пространстве. При этом условия, относящиеся к начальному моменту времени, называют начальными, а условия, относящиеся к фиксированным значениям

пространственных координат, — краевыми. Так, например, решение уравнения теплопроводности (7.3) применительно к стержню длины l может отыскиваться для таких условий: начального условия $u(x, 0) = \varphi(x)$ (распределение температуры вдоль стержня для момента времени $t=0$), краевых условий $u(0, t) = \varphi_1(t)$ (температура левого конца стержня меняется во времени как $\varphi_1(t)$) и $u(l, t) = \varphi_2(t)$ (для правого конца стержня).

Решения дифференциальных уравнений в частных производных на АВМ воспроизводятся приближенно, путем реализации решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимирующих исходные уравнения в частных производных. Наиболее просто на АВМ можно получить решение для первой краевой задачи, заданной в прямоугольной области.

§ 2. Выражение производных через значения функции

Основу аппроксимации дифференциального уравнения в частных производных системой обыкновенных дифференциальных уравнений составляет приближенная замена частных производных некоторыми выражениями, содержащими лишь отдельные значения функции. Эти выражения в математической литературе называют формулами численного дифференцирования.

Существует множество способов приближенного представления значения производной в некоторой точке через значения функции, взятые для отдельных дискретных значений аргумента. Наиболее просто отыскиваются формулы численного дифференцирования для случая равноотстоящих значений аргумента.

Сначала вывьем метод получения выражений производных различного порядка через значения функции на примере функции $u(x)$ одного переменного x , а затем распространим этот метод на функции большого числа переменных. Пусть для дискретных значений аргумента, взятых с шагом h :

$$x_{-1} = x_0 - h, \quad x_0, \quad x_1 = x_0 + h,$$

даны соответствующие значения функции $u(x)$

$$u(x_{-1}), \quad u(x_0), \quad u(x_1).$$

Для значений функции $u(x_{-1})$ и $u(x_1)$ существуют представления в виде ряда Тейлора:

$$\begin{aligned} u(x_{-1}) &= u(x_0 - h) \approx \\ &\approx u(x_0) - hu'(x_0) + \frac{h^2}{2!} u''(x_0) - \frac{h^3}{3!} u'''(x_0) + \dots, \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} u(x_1) &= u(x_0 + h) \approx \\ &\approx u(x_0) + hu'(x_0) + \frac{h^2}{2!} u''(x_0) + \frac{h^3}{3!} u'''(x_0) + \dots \end{aligned} \quad (7.6)$$

Вычитая из выражения (7.6) выражение (7.5), получаем

$$u(x_1) - u(x_{-1}) = 2hu'(x_0) + \frac{h^3}{3} u'''(x_0) + \dots,$$

отсюда значение первой производной в точке x_0 будет равно

$$u'(x_0) = \frac{1}{2h} [u(x_1) - u(x_{-1})] - \frac{h^2}{6} u'''(\epsilon), \quad (7.7)$$

где $x_0 - h < \epsilon < x_0 + h$. Значение производной, вычисленное по этой формуле, тем точнее, чем меньше величина шага h .

Сложим выражение (7.5) с выражением (7.6):

$$u(x_{-1}) + u(x_1) = 2u(x_0) + h^2 u''(x_0) + \frac{h^4}{12} u^{IV}(x_0) + \dots,$$

отсюда значение второй производной в точке x_0 будет равно

$$u''(x_0) = \frac{1}{h^2} [u(x_{-1}) - 2u(x_0) + u(x_1)] - \frac{h^2}{2} u^{IV}(\epsilon), \quad (7.8)$$

где $x_0 - h < \epsilon < x_0 + h$.

Оба выражения (7.7) и (7.8) позволяют получить значение производной с точностью порядка h^2 . Однако, как легко заметить, если $u(x)$ — многочлен второй степени, формулы дают точные значения производной, так как при этом $u'''(x_0)$, $u^{IV}(x_0)$ и т. д. тождественно равны нулю.

Значение производных $u'(x_0)$ и $u''(x_0)$ найдены для центральной точки x_0 . Однако не представляет особого труда найти выражения производных и для других точек x_{-1} и x_1 . Мы не будем здесь делать подробные выводы, а сразу приведем окончательные формулы численного дифференцирования. В этих формулах для равноотстоящих значений аргумента

$$x_0 \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 \approx x_0 + 2h, \quad \dots, \quad x_j = x_0 + jh, \quad \dots$$

соответствующие значения функции и производной обозначены

$$\begin{aligned} u(x_0) &= u_0, & u(x_1) &= u_1, & u(x_2) &= u_2, & \dots, & u(x_j) &= u_j, \dots, \\ u'(x_0) &= u'_0, & u'(x_1) &= u'_1, & u'(x_2) &= u'_2, & \dots, & u'(x_j) &= u'_j, \dots \end{aligned}$$

Формулы дифференцирования в зависимости от точности отличаются числом значений функции $u(x)$, используемых для подсчета значения производной $u'(x)$ в некоторой точке x_j .

Три значения функции

$$\begin{aligned} u'_0 &= \frac{1}{2h} [-3u_0 + 4u_1 - u_2] + \frac{h^2}{3} u'''(\epsilon_0), \\ u'_1 &= \frac{1}{2h} [-u_0 + u_2] - \frac{h^2}{6} u'''(\epsilon_1), \\ u'_2 &= \frac{1}{2h} [u_0 - 4u_1 + 3u_2] + \frac{h^2}{3} u'''(\epsilon_2), \end{aligned} \quad (7.9)$$

где $x_0 < \epsilon_0 < x_2$; $x_0 < \epsilon_1 < x_2$; $x_0 < \epsilon_2 < x_2$.

Четыре значения функции

$$\begin{aligned} u'_0 &= \frac{1}{6h} [-11u_0 + 18u_1 - 9u_2 + 2u_3] - \frac{h^3}{4} u^{IV}(\varepsilon_0), \\ u'_1 &= \frac{1}{6h} [-2u_0 - 3u_1 + 6u_2 - u_3] + \frac{h^3}{12} u^{IV}(\varepsilon_1), \\ u'_2 &= \frac{1}{6h} [u_0 - 6u_1 + 3u_2 + 2u_3] - \frac{h^3}{12} u^{IV}(\varepsilon_2), \\ u'_3 &= \frac{1}{6h} [-2u_0 + 9u_1 - 18u_2 + 11u_3] + \frac{h^3}{4} u^{IV}(\varepsilon_3), \end{aligned} \quad (7.10)$$

где $x_0 < \varepsilon_0 < x_3$; $x_0 < \varepsilon_1 < x_3$; $x_0 < \varepsilon_2 < x_3$; $x_0 < \varepsilon_3 < x_3$.

Пять значений функции

$$\begin{aligned} u'_0 &= \frac{1}{12h} [-25u_0 + 48u_1 - 36u_2 + 16u_3 - 3u_4] + \frac{h^4}{5} u^V(\varepsilon_0), \\ u'_1 &= \frac{1}{12h} [-3u_0 - 10u_1 + 18u_2 - 6u_3 + u_4] - \frac{h^4}{20} u^V(\varepsilon_1), \\ u'_2 &= \frac{1}{12h} [u_0 - 8u_1 + 8u_3 - u_4] + \frac{h^4}{30} u^V(\varepsilon_2), \\ u'_3 &= \frac{1}{12h} [-u_0 + 6u_1 - 18u_2 + 10u_3 + 3u_4] - \frac{h^4}{20} u^V(\varepsilon_3), \\ u'_4 &= \frac{1}{12h} [3u_0 - 16u_1 + 36u_2 - 48u_3 + 25u_4] + \frac{h^4}{5} u^V(\varepsilon_4), \end{aligned} \quad (7.11)$$

где $x_0 < \varepsilon_0 < x_4$; $x_0 < \varepsilon_1 < x_4$; $x_0 < \varepsilon_2 < x_4$; $x_0 < \varepsilon_3 < x_4$; $x_0 < \varepsilon_4 < x_4$.

Выражения производных можно было бы продолжить и далее для большего числа значений функции.

Легко заметить, что производные можно записать в ином, более компактном матричном виде. Действительно, все формулы дифференцирования представляются в виде

$$u' \approx \frac{1}{h} Mu, \quad (7.12)$$

где u' и u — n -мерные векторы, а M — квадратная матрица $n \times n$, n — число значений функции $u(x)$. Для выражений (7.9)

вектор $u' = (u'_0, u'_1, u'_2)$, вектор $u = (u_0, u_1, u_2)$, а матрица

$$M = \begin{bmatrix} -1,5 & 2 & -0,5 \\ -0,5 & 0 & +0,5 \\ 0,5 & -2 & 1,5 \end{bmatrix}$$

Из матричного равенства (7.12) легко усматривается способ отыскания выражений для производных более высокого порядка.

Действительно,

$$u'' \approx \frac{1}{h} M u' = \frac{1}{h^2} M^2 u.$$

И вообще,

$$u^{(k)} \approx \frac{1}{h^k} M^k u, \quad (7.13)$$

при этом, конечно, $1 \leq k \leq n-1$.

Важно, что значения производных будут точны для алгебраических многочленов $u(x)$ порядка не выше $n-1$.

Вычисление значений частных производных ничем не отличается от вычисления значений производных функции одного переменного. Так, значения частной производной $u'_y(x, y)$ в точках

$$x, y_0; x, y_1; \dots; x, y_i; \dots; x, y_{n-1}$$

в соответствии с (7.12) будут выражаться равенством

$$u'_y(x, y) \approx \frac{1}{h_y} M u(x, y),$$

где $u'_y(x, y) = [u'_y(x, y_0), u'_y(x, y_1), \dots, u'_y(x, y_{n-1})]$ — n -мерный вектор значений производных; $u(x, y) = [u(x, y_0), u(x, y_1), \dots, u(x, y_{n-1})]$ — n -мерный вектор значений функции, M — квадратная матрица порядка $n \times n$; h_y — шаг по аргументу y .

Если же необходимо найти вторую частную производную по аргументу y , то соответствующее выражение представляется равенством

$$u''_y \approx \frac{1}{h_y^2} M^2 u(x, y),$$

где $u''_y(x, y) = [u''_y(x, y_0), u''_y(x, y_1), \dots, u''_y(x, y_{n-1})]$. И вообще, частная производная порядка k по аргументу y будет выражаться через значения функции в соответствии с (7.13):

$$u_y^{(k)} \approx \frac{1}{h_y^k} M^k u(x, y).$$

Часто бывает полезно иметь выражения производных через значения функции, заданные в узлах некоторой прямоугольной сетки размерности $n \times m$:

$$x_0, x_1 = x_0 + h_x, x_2 = x_0 + 2h_x, \dots$$

$$\dots, x_j = x_0 + jh_x, \dots, x_{n-1} = x_0 + (n-1)h_x,$$

$$y_0, y_1 = y_0 + h_y, y_2 = y_0 + 2h_y, \dots$$

$$\dots, y_j = y_0 + jh_y, \dots, y_{m-1} = y_0 + (m-1)h_y.$$

Легко можно заметить, что необходимые выражения могут быть

просто записаны в виде матричного равенства

$$[\mathbf{u}'_x(x, y)] = \frac{1}{h_x} \mathbf{M} [\mathbf{u}(x, y)], \quad (7.14)$$

где

$$[\mathbf{u}'_x(x, y)] = \begin{bmatrix} u'_x(x_0, y_0) & u'_x(x_0, y_1) & \dots & u'_x(x_0, y_{m-1}) \\ u'_x(x_1, y_0) & u'_x(x_1, y_1) & \dots & u'_x(x_1, y_{m-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u'_x(x_{n-1}, y_0) & u'_x(x_{n-1}, y_1) & \dots & u'_x(x_{n-1}, y_{m-1}) \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{u}(x, y)] = \begin{bmatrix} u(x_0, y_0) & u(x_0, y_1) & \dots & u(x_0, y_{m-1}) \\ u(x_1, y_0) & u(x_1, y_1) & \dots & u(x_1, y_{m-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u(x_{n-1}, y_0) & u(x_{n-1}, y_1) & \dots & u(x_{n-1}, y_{m-1}) \end{bmatrix}.$$

Перейдем теперь к формулам дифференцирования для смешанных производных. Для простых случаев, когда используется малое число значений функции, смешанные производные можно получать прямо подстановкой формул (7.9), (7.10), (7.11) друг в друга. Покажем это на примере нахождения $u''_{yx}(x_1, y_1)$ при условии, что значения функции заданы в узлах прямоугольной решетки размерности 3×3 . В соответствии с (7.7) будем иметь:

$$u''_{yx} \approx \frac{1}{2h_y} [u'_x(x_1, y_2) - u'_x(x_1, y_0)] \approx$$

$$\approx \frac{1}{4h_y h_x} [u(x_2, y_2) - u(x_0, y_2) - u(x_2, y_0) + u(x_0, y_0)].$$

Более общие формулы дифференцирования для произвольного узла решетки можно получить в виде матричных выражений

$$[\mathbf{u}''_{yx}(x, y)] = \frac{1}{h_y h_x} \mathbf{M} [\mathbf{u}(x, y)]^T \mathbf{M}^T, \quad (7.15)$$

где верхний индекс «Т» означает знак транспонирования

$$[\mathbf{u}''_{yx}(x, y)] = \begin{bmatrix} u''_{yx}(x_0, y_0) & u''_{yx}(x_1, y_0) & \dots & u''_{yx}(x_{n-1}, y_0) \\ u''_{yx}(x_0, y_1) & u''_{yx}(x_1, y_1) & \dots & u''_{yx}(x_{n-1}, y_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u''_{yx}(x_0, y_{n-1}) & u''_{yx}(x_1, y_{n-1}) & \dots & u''_{yx}(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{u}(x, y)] = \begin{bmatrix} u(x_0, y_0) & u(x_0, y_1) & \dots & u(x_0, y_{n-1}) \\ u(x_1, y_0) & u(x_1, y_1) & \dots & u(x_1, y_{n-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u(x_{n-1}, y_0) & u(x_{n-1}, y_1) & \dots & u(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

Формулы (7.14) и (7.15) легко обобщаются на случай производных более высокого порядка.

§ 3. Аппроксимация уравнения в частных производных системой обыкновенных дифференциальных уравнений

Приближенная замена одного дифференциального уравнения в частных производных системой обыкновенных дифференциальных уравнений получила в прикладной математике название «метод прямых». Изложим этот метод на примере уравнения Пуассона.

Пусть необходимо воспроизвести на АВМ решение дифференциального уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (7.16)$$

путем сведения его к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение $u(x, y)$ уравнения Пуассона отыскивается для прямоугольной области $0 < x < a$, $0 < y < b$, на контуре которой (рис. 7.1, а) $u(x, y)$ должно удовлетворять краевым условиям $u(0, y) = \varphi_1(y)$, $u(a, y) = \varphi_2(y)$, $u(x, 0) = \varphi_3(x)$, $u(x, b) = \varphi_4(x)$.

В соответствии с методом прямых в области проведем ряд горизонтальных параллельных прямых на расстоянии h друг от друга (рис. 7.1, б)). Пусть число проведенных прямых n . Решение исходного уравнения (7.16) справедливо для любой точки области, а следовательно, и для любой из проведенных прямых.

Пусть координата y , соответствующая j -й прямой, обозначена через y_j . Тогда, очевидно, для j -й прямой справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, y_j)}{\partial x^2} &= \frac{d^2 u_j(x)}{dx^2}, \quad \text{где } u_j(x) = u(x, y_j); \\ \frac{\partial^2 u(x, y_j)}{\partial y^2} &\approx \frac{1}{h^2} [u_{j-1}(x) - 2u_j(x) + u_{j+1}(x)], \end{aligned}$$

где

$$u_{j-1}(x) = u(x, y_{j-1}), \quad u_{j+1}(x) = u(x, y_{j+1}); \quad f(x, y_j) = f_j(x).$$

Подставляя соответствующие выражения в уравнение (7.16), получаем краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_j(x)}{dx^2} + \frac{1}{h^2} [u_{j-1}(x) - 2u_j(x) + u_{j+1}(x)] &= f_j(x); \\ u_j(0) = \varphi_1(y_j) = \varphi_{1j}; \quad u_j(a) = \varphi_2(y_j) = \varphi_{2j}, \end{aligned} \quad (7.17)$$

где $j=1, 2, 3, \dots, n$. При этом $u_0(x) = \varphi_3(x)$, $u_{n+1}(x) = \varphi_4(x)$. Решая эту систему, получаем решение в виде n функций одного переменного $u_j(x)$.

Составим структурную схему АВМ для воспроизведения решения системы (7.17), когда $n=3$, т. е. в области проведены три прямых. Роль независимой переменной вместо x в АВМ

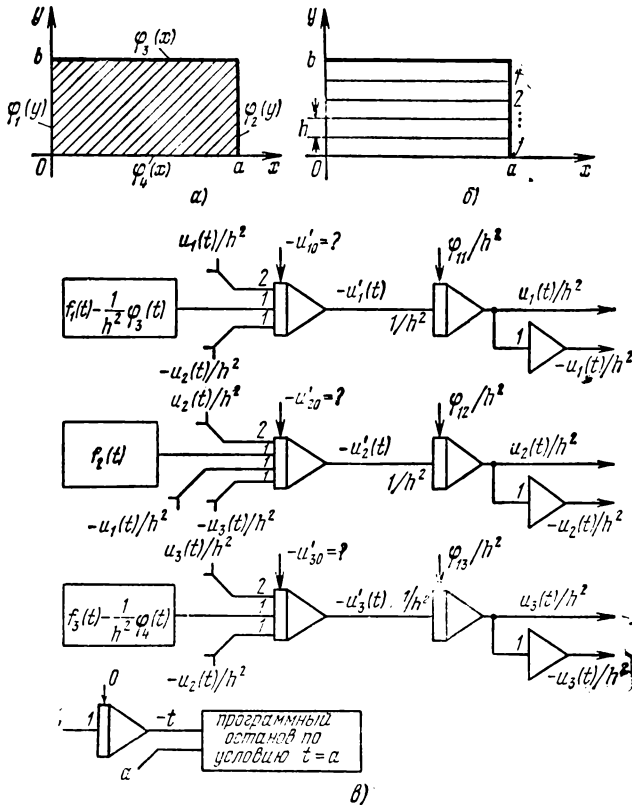


Рис. 7.1.

будет играть переменная t — время. В соответствии с (7.17) система обыкновенных дифференциальных уравнений будет:

$$\dot{u}_1'(t) = f_1(t) + \frac{1}{h^2} [-\varphi_3(t) + 2u_1(t) - u_2(t)];$$

$$\dot{u}_2''(t) = f_2(t) + \frac{1}{h^2} [-u_1(t) + 2u_2(t) - u_3(t)];$$

$$\dot{u}_3'''(t) = f_3(t) + \frac{1}{h^2} [-u_2(t) + 2u_3(t) - \varphi_4(t)]$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} u_1(0) &= \varphi_{11}, & u_2(0) &= \varphi_{12}, & u_3(0) &= \varphi_{13}, \\ u_1(a) &= \varphi_{21}, & u_2(a) &= \varphi_{22}, & u_3(a) &= \varphi_{23}. \end{aligned}$$

Получению решений этой системы должна предшествовать редукция краевых условий $u_1(a)$, $u_2(a)$, $u_3(a)$ к неизвестным начальным $u_1(0)$, $u_2(0)$, $u_3(0)$.

Структурная схема АВМ, соответствующая системе дифференциальных уравнений, представлена на рис. 7.1, в). Схема содержит три сходных цепочки интеграторов. Между цепочками имеются связи, места входа и выхода которых обозначены соответствующими надписями. В схеме предусмотрено программное прерывание воспроизведения решения по условию $t=a$.

§ 4. Пример программирования АВМ для исследования нестационарного распределения температуры

1. Постановка задачи. Толстая однородная стенка большой площади разделяет две среды с разной температурой (рис. 7.2): слева — среда, температура которой меняется во времени как $\varphi_1(t)$, справа — как $\varphi_2(t)$. Толщина стенки l . Требуется воспроизвести на АВМ распределение температуры для внутренних точек стенки при заданных функциях $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$.

Прежде всего введем математические переменные, с помощью которых описывается распределение температуры по глубине стенки. Для этого перпендикулярно стенке проведем ось y . Температура внутренних точек стенки — функция двух переменных: времени t и координаты y , т. е. $v(y, t)$. Точки стенки, лежащие на одной вертикали, имеют одинаковую температуру (изотермичны), вследствие большой площади стенки и ее однородности.

Функция $v(x, y)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\lambda}{c} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad (7.18)$$

где λ — коэффициент теплопроводности, c — удельная объемная теплоемкость стенки. Решение уравнения (7.18) должно соответствовать краевым условиям $v(0, t) = \varphi_1(t)$, $v(l, t) = \varphi_2(t)$ и начальному условию $v(y, 0) = T(y)$.

Здесь $T(y)$ — некоторая заданная функция, характеризующая распределение температуры по толщине стенки в первоначальный момент времени.

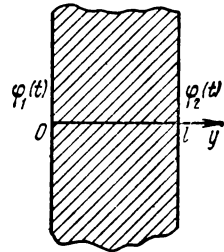


Рис. 7.2.

2. Аппроксимация уравнения теплопроводности системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Для отыскания системы обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимирующих уравнение (7.18), разобьем стенку вертикальными

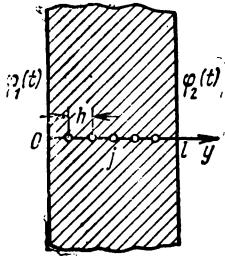


Рис. 7.3.

линиями на ряд слоев одинаковой толщины. При пересечении вертикальных прямых с осью y образуется ряд точек. Для каждой из этих точек температура будет лишь функцией одной переменной — времени. Будем считать, что точки на оси y расположены друг от друга на небольшом одинаковом расстоянии h (рис. 7.3). Подставим координату y_j некоторой точки j в уравнение (7.18):

$$\frac{\partial v(y_j, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{c} \frac{\partial^2 v(y_j, t)}{\partial y^2}. \quad (7.19)$$

Если обозначить $v(y_j, t)$ через $v_j(t)$, то $\frac{\partial v(y_j, t)}{\partial t} = \frac{dv_j(t)}{dt}$.

Частная производная $\frac{\partial^2 v(y_j, t)}{\partial y^2}$ приближенно может быть выражена через значения функции $v(y, t)$ в точке y_j и в двух соседних с ней точках $j+1$ и $j-1$ формулой

$$\frac{\partial^2 v(y_j, t)}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h^2} [v_{j+1}(t) - 2v_j(t) + v_{j-1}(t)],$$

где

$$v_{j+1}(t) = v(y_{j+1}, t); \quad v_{j-1}(t) = v(y_{j-1}, t).$$

С учетом этих выражений (7.19) превратится в обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dv_j(t)}{dt} = \mu [v_{j+1}(t) - 2v_j(t) + v_{j-1}(t)],$$

$$v_j(0) = T(y_j) = T_j; \quad \mu = \frac{\lambda}{ch^2}.$$

Таких уравнений будет столько, сколько точек было выделено на оси. Если точек n , то все уравнения вместе составят систему из n обыкновенных дифференциальных уравнений, которая аппроксимирует уравнение (7.19):

$$\frac{dv_j(t)}{dt} = \mu [v_{j+1}(t) - 2v_j(t) + v_{j-1}(t)], \quad (7.20)$$

$$v_j(0) = T_j; \quad v_0(t) = \varphi_1(t); \quad v_{n+1}(t) = \varphi_2(t); \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Особенность системы (7.20), в том, что она представляет собой задачу Коши.

3. Структурная схема АВМ. Структурная схема АВМ, вос-

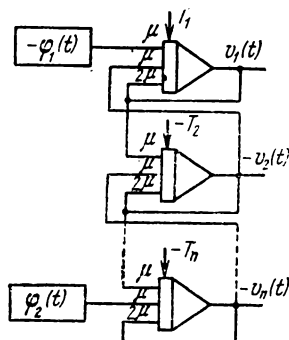


Рис. 7.4.

производящая решение системы дифференциальных уравнений (7.20), показана на рис. 7.4. Схема экономична: на воспроизведение каждого уравнения системы требуется всего один интегратор. Прямоугольниками на схеме показаны некоторые элементы схемы АВМ, воспроизводящие заданные функции времени $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$.

4. Масштабирование переменных. При масштабировании переменных следует иметь в виду, что температура внутренних точек стенки не может превосходить величин температур $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$.

§ 5. Интерполирование при воспроизведении решений уравнений в частных производных

АВМ воспроизводит $u(x, t)$ — решение некоторого дифференциального уравнения в частных производных лишь для отдельных фиксированных значений аргумента

$$x_0, x_1 = x_0 + h, \dots, x_j = x_0 + jh, \dots, x_n = x_0 + nh,$$

в виде совокупности функций

$$u(x_0, t), u(x_1, t), \dots, u(x_j, t), \dots, u(x_n, t). \quad (7.21)'$$

Часто бывает необходимо по (7.21) получить решение $u(x, t)$ для произвольного значения аргумента $x = x^*$ из интервала $[x_0, x_n]$. Искомая функция $u(x^*, t)$ может быть найдена путем интерполирования, для чего следует построить специальную схему — интерполятор, реализующую какую-либо интерполяцион-

ную формулу например, интерполяционную формулу Лагранжа

$$L(x^*, t) = \sum_{j=0}^n \frac{(x^* - x_0)(x^* - x_1) \dots (x^* - x_{j-1})(x^* - x_{j+1}) \dots (x^* - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)} u(x_j, t). \quad (7.22)$$

Формула Лагранжа представляет собой многочлен степени n , значения которого совпадают со значениями функции $u(x, t)$ в точках $x_0, x_1, \dots, x_j, \dots, x_n$. Это совпадение дает основание предполагать, что и для других значений аргумента соответствующие значения интерполяционного многочлена (7.22) и функции $u(x, t)$ будут достаточно близки друг к другу. Предполагаемая близость этих функций позволяет вместо неизвестного значения функции $u(x^*, t)$ воспользоваться тем значением, которое принимает интерполяционный многочлен в x^* . В специальной математической дисциплине, получившей название *теории интерполирования и приближения функций*, излагаются методы построения и исследования разнообразных интерполяционных формул. Мы здесь предпочли интерполяционную формулу Лагранжа другим лишь потому, что по ее внешнему виду просто выявить структурную схему интерполятора. Действительно, формула Лагранжа может быть записана в виде суммы произведений:

$$L(x^*, t) = \sum_{j=0}^n a_j(x^*) u(x_j, t), \quad (7.23)$$

где $a_j(x^*)$ — постоянный коэффициент, равный:

$$a_j(x^*) = \frac{(x^* - x_0)(x^* - x_1) \dots (x^* - x_{j-1})(x^* - x_{j+1}) \dots (x^* - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)}. \quad (7.24)$$

Запись интерполяционной формулы в виде суммы произведений сразу наводит на мысль, что в качестве интерполятора может выступать самый обыкновенный сумматор на $n+1$ вход. Входной переменной сумматора по j -му входу будет известная функция $u(x_j, t)$, а коэффициент передачи сумматора по j -му входу зависит от заданного значения аргумента $x=x^*$ и может быть вычислен по формуле (7.24).

Конечно, кроме сумматора могут потребоваться еще и инверторы, так как коэффициенты $a_j(x^*)$ не обязательно будут иметь одинаковые знаки.

Некоторая громоздкость выражения (7.24) внешне создает впечатление значительных затрат вычислительного труда по определению коэффициентов $a_j(x^*)$. В действительности это не

так. Обычно в практике интерполяционный многочлен строят не по всем $n+1$ значениям функции $u(x, t)$, а лишь по трем-четырем точкам, ближайшим к x^* . Отметим, что, когда интерполирование осуществляется по трем значениям функции $u(x, t)$, интерполяционный многочлен будет второй степени.

§ 6. Задачи

1. Записать формулы (7.10) в виде одного матричного выражения. Показать, что при этом четвертая степень матрицы оказывается нулевой матрицей. Почему?

2. Найти в общем виде выражение матрицы значений смешанной производной $u_{yx}^{ik}(x_j, y_l)$ через значения функции, заданные в узлах прямоугольной сетки:

$$\begin{array}{cccccccc} x_0, & x_0+h_x, & x_0+2h_x, & \dots, & x_0+jh_x, & \dots, & x_0+(n-1)h_x, \\ y_0, & y_0+h_y, & y_0+2h_y, & \dots, & y_0+ih_y, & \dots, & y_0+(m-1)h_y, \end{array}$$

где l и k — целые положительные числа, обозначающие порядок производных соответственно по переменным y и x , при этом $1 \leq l \leq m-1$, $1 \leq k \leq n-1$.

3. При программировании АВМ для воспроизведения решений дифференциальных уравнений в частных производных часто приходится отыскивать формулы дифференцирования для производных вида

$$v(x) = \frac{d^l}{dx^l} \varphi(x) \frac{d^k u(x)}{dx^k},$$

где l и k — целые положительные.

Показать, что для узлов

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad \dots, \quad x_{n-1} = x_0 + (n-1)h$$

справедливо равенство

$$v(x) \approx \frac{1}{h^{l+k}} M^l [\varphi(x)] M^k u(x),$$

где

$$\begin{aligned} v(x) &= [v(x_0), v(x_1), \dots, v(x_{n-1})], \\ u(x) &= [u(x_0), u(x_1), \dots, u(x_{n-1})], \\ \varphi(x) &= \begin{bmatrix} \varphi(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi(x_1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi(x_{n-1}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4. Для задач, следующих ниже, разработать структурные схемы АВМ, приближенно воспроизводящие решения дифференциальных уравнений в частных производных в виде решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

1) Струна единичной длины закреплена и колеблется под действием внешней силы в плоской среде, сила сопротивления которой пропорциональна скорости струны. Колебания описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + F(x, t)$$

с начальными условиями $u(x, 0) = \exp(-x)$; $u'_t(x, 0) = 1 - x$; $0 < x < 1$, и с краевыми условиями $u(0, t) = u(1, t) = 0$, $0 < t < \infty$. Здесь $u(x, t)$ — отклонение струны в сечении x в момент времени t от положения покоя струны; $F(x, t) = x \sin \omega t$ — внешняя сила, действующая на струну; α , β , ω — некоторые положительные константы.

2) Температура концов тонкого однородного стержня единичной длины меняется во времени как $u(0, t) = \sin \omega t$, $u(1, t) = \cos t$. Боковая поверхность стержня теплоизолирована. Начальная температура стержня $u(x, 0) = \sin \pi x$. Для внутренних точек стержня температура описывается функцией $u(x, t)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}; \quad 0 < x < 1; \quad 0 < t < \infty,$$

где a и ω — некоторые положительные константы.

3) Стержень, приведенный в задаче 2), помещен в среду, с которой у него по боковой поверхности происходит конвективный теплообмен. Температура среды u_0 является заданной функцией $u_0(x, t) = x \exp(-t)$ координаты x и времени t . Изменение температуры во времени и вдоль стержня описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \beta [u(x, t) - u_0(x, t)] \quad 0 < x < 1; \quad 0 < t < \infty,$$

где β — положительная константа.

4) Дана прямоугольная теплоизолированная пластина (рис. 7.5), на краях которой температура задана в виде функций:

$$\varphi_1(x) = \frac{x}{a} \left(1 - \frac{x}{a} \right);$$

$$\varphi_2(y) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{b} y;$$

$$\varphi_3(x) = 0;$$

$$\varphi_4(y) = \sin \frac{\pi}{b} y.$$

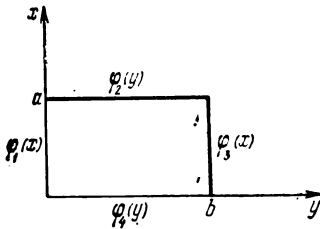


Рис. 7.5.

Стационарное распределение температуры $u(x, y)$ для внутренних точек пластины описывается дифференциальным уравнением Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ НА АВМ ЗАДАНЫХ ФУНКЦИЙ НЕЗАВИСИМОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Задачи, связанные с воспроизведением функций

Потребность в воспроизведении заданных функций независимого переменного возникает:

1. При решении дифференциальных уравнений с правой частью, здесь заданной функцией будет правая часть дифференциального уравнения;

2. При решении нелинейных дифференциальных уравнений, когда необходимо воспроизвести некоторую функцию от искомого решения уравнения;

3. При решении дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами; здесь заданной функцией независимого переменного является переменный коэффициент;

4. При исследовании функции с помощью АВМ, например, для определения ее нулей, экстремумов, особых точек и т. д.

Методы воспроизведения на АВМ некоторой функции определяются ее способом задания и ее свойствами. Наиболее просто в АВМ реализуется функция — константа. Ей соответствует постоянное электрическое напряжение. Для других типов функций обычно с помощью того или иного приема задачу ее воспроизведения сводят к реализации на АВМ решения некоторого специального образом подобранного дифференциального уравнения.

Однако этот прием в чистом виде применим лишь к некоторым многократно дифференцируемым функциям, заданным аналитически. Когда же функция получена в результате эксперимента, разрывна или кусочно-дифференцируема, то для ее воспроизведения приходится прибегать к другим методам.

Воспроизведенная функция может быть исследована средствами АВМ. Такую возможность создают блоки АВМ, реализующие логические операции. Они позволяют автоматически прерывать воспроизведение заданной функции в те моменты времени, когда выполняются некоторые заранее сформулированные логические условия. Так, можно прервать работу АВМ в момент, соответствующий нулю функции, ее экстремуму или какой-либо другой особой точке.

§ 2. Воспроизведение многократно дифференцируемых функций, заданных аналитически

1. Функция задана простым аналитическим выражением.

Пусть функция задана в виде аналитического выражения $f(t)$, которое допускает многократное дифференцирование по независимой переменной t . $f(t)$ последовательно дифференцируют и выявляют закономерности в выражении производных различных порядков, позволяющие найти дифференциальное уравнение, решением которого была бы заданная функция $f(t)$. Это дифференциальное уравнение называют *определяющим дифференциальным уравнением* для функции $f(t)$. Для одной и той же функции $f(t)$ можно найти несколько определяющих уравнений. Обычно стремятся найти «простое» уравнение, требующее малое число операционных блоков. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Воспроизвести на АВМ функцию от t $y(t) = a \exp(-\alpha t)$.

Найдем определяющие уравнения, для чего продифференцируем один раз исходную функцию $y'(t) = -\alpha a \exp(-\alpha t)$. Сравнивая функцию с выражением ее производной, замечаем, что $y'(t) = -\alpha y(t)$. Это и есть определяющее дифференциальное уравнение для исходной функции. Теперь необходимо найти начальное условие, которое отыскивается для значения аргумента $t=0$, так, что $y(0) = a$.

Далее разрабатывают структурную схему АВМ для воспроизведения решения определяющего дифференциального уравнения. Для рассматриваемой функции структурная схема представлена на рис. 8.1, а). Эта схема очень проста, так как требует всего лишь один интегратор. Поэтому функцию $a \exp(-\alpha t)$ следует считать функцией, которая легко реализуется на АВМ.

Пример 2. Воспроизвести на АВМ функцию $y(t) = b/(1+t)$.

Найдем определяющее дифференциальное уравнение, для чего продифференцируем один раз исходную функцию $y'(t) = -b/(1+t)^2$.

Сравнивая выражение исходной функции с ее производной, замечаем, что

$$y'(t) = -\frac{y^2(t)}{b}, \quad y(0) = b.$$

Структурная схема АВМ, соответствующая этому определяющему уравнению, представлена на рис. 8.1, б). Попутно заметим, что эта схема, кроме заданной функции $b/(1+t)$, вырабатывает после блока перемножения функцию $b/(1+t)^2$.

Пример 3. Воспроизвести на АВМ решение дифференциального уравнения

$$\dot{x} - \frac{b}{1+t} x + a \exp(-\alpha t) = 0.$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка с переменным коэффициентом. С учетом того, что мы уже умеем воспроизводить функции $b/(1+t)$ и $a \exp(-\alpha t)$, составить структурную схему не представляет труда. Схема показана на рис. 8.1, в). Прямоугольниками с соответствующими

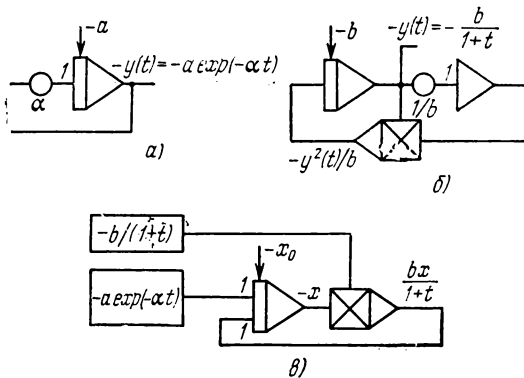


Рис. 8.1.

надписями показаны структурные схемы, воспроизводящие заданные функции времени.

В рассмотренных примерах процедура нахождения определяющего дифференциального уравнения не вызвала особых затруднений. Однако в практике решения задач на АВМ часто оказывается, что исходная функциональная зависимость $F(t)$, подлежащая реализации, имеет вид, затрудняющий поиск определяющего уравнения. При сравнении аналитического выражения исходной функции с рядом ее производных различных порядков бывает нелегко подметить какую-либо закономерность, необходимую для вывода определяющего дифференциального уравнения. В таких случаях бывает полезно представить исходную функцию $F(t)$ в виде

$$F(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_j(t) + \dots + f_n(t)$$

или

$$F(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot \dots \cdot f_j(t) \cdot \dots \cdot f_n(t),$$

или в виде комбинаций сумм и произведений функций. Применение этого приема оправдано лишь тогда, когда для каждой

$f_2(t)$ имеется определяющее уравнение, легко реализуемое на АВМ. Так, если необходимо реализовать функцию

$$F(t) = \frac{a \exp(-\alpha t)}{1+t},$$

то вряд ли целесообразно искать определяющее уравнение для функции $F(t)$, проще представить $F(t)$ в виде произведения:

$$F(t) = [a \exp(-\alpha t)] \cdot \frac{1}{1+t},$$

и для воспроизведения каждого из сомножителей найти необходимое определяющее уравнение.

При воспроизведении некоторых функций

$$y(t) = f(t), \quad (8.1)$$

иногда оказывается полезным использовать некоторое преобразование, облегчающее поиск определяющего дифференциального уравнения для $y(t)$. Преобразование состоит в том, что от правой и левой частей выражения (8.1) берется функция F :

$$F[y(t)] = F[f(t)]. \quad (8.2)$$

При надлежащем выборе функции F последовательное дифференцирование (8.2) часто быстрее приводит к получению определяющего уравнения. В качестве вспомогательной функции F можно применить функцию, обратную к $f(t)$, логарифм или какую-либо другую функцию.

Пример 4. Пусть необходимо найти определяющее дифференциальное уравнение для функции

$$y(t) = (1+t)^{-0,27}.$$

Здесь в качестве вспомогательной функции удобно взять логарифм

$$\ln y(t) = -0,27 \ln(1+t).$$

Дифференцирование последнего равенства по переменной t дает:

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{0,27}{1+t}.$$

После преобразований получаем простое линейное дифференциальное уравнение первого порядка $y'(t) = -t \cdot y'(t) - 0,27y(t)$, $y(0) = 1$. Заметим, что воспроизведение полинома пятой степени $y(t) = (1+t)^5$ по рассмотренному методу также требует реализации решения дифференциального уравнения первого порядка $y'(t) = -ty'(t) + 5y(t)$. Традиционный же способ после пятикратного последовательного дифференцирования функции $(1+t)^5$ приводит к дифференциальному уравнению пятого порядка $y^{(5)}(t) = 120$. Проиллюстрируем метод еще одним примером.

Пример 5. Требуется отыскать определяющее дифференциальное уравнение для воспроизведения функции $y(t) = t^{1/3}$.

Здесь в качестве вспомогательной функции удобно воспользоваться функцией, обратной к $t^{1/3}$. Другими словами, возведем в третью степень левую и правую части исходной функции $y^3(t) = t$. Дифференцирование последнего равенства по t приводит к дифференциальному уравнению $y'(t)y^2(t) - \frac{1}{3} = 0$, $y(0) = 0$.

На этой странице приведена таблица определяющих дифференциальных уравнений для некоторых элементарных функций.

2. Функция задана аналитически в виде суперпозиции функций. Часто встречаются функции от функций, иначе — суперпозиции функций. Так, $F(t) = f_2[f_1(t)]$ — суперпозиция двух функций, $F(t) = f_3[f_2[f_1(t)]]$ — трех функций. Суперпозиции функций могут быть реализованы на АВМ тем проще, чем легче реализуются определяющие уравнения для каждой из функций f_1, f_2, f_3 и т. д.

Таблица определяющих дифференциальных уравнений

Функция $x(t)$	Определяющее дифференциальное уравнение для $x(t)$	Область определения
$t\alpha$	$tx' - \alpha x = 0$	$t \geq 0$
$\exp t$	$x' - x = 0$	$-\infty < t < \infty$
at	$x' - x \ln a = 0$	$-\infty < t < \infty$
$\ln t$	$x' - \exp(-x) = 0, \quad tx' - 1 = 0$	$t > 0$
$\sin t, \cos t$	$x'' + x = 0$	$-\infty < t < \infty$
$\operatorname{tg} t$	$x' = 1 + x^2, \quad x'' = 2xx'$	$t \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$
$\operatorname{arctg} t$	$x' = \cos^2 x, \quad x'' = -t^2 x'' - 2tx'$	$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ $-\infty < t < \infty$
$\operatorname{ctg} t$	$x' = -1 - x^2, \quad x'' = -2xx'$	$t \neq n\pi$
$\operatorname{arctg} t$	$x' = -\sin^2 x, \quad x'' = t^2 x'' + tx'$	$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ $-\infty < t < \infty$
$\operatorname{arcsin} t$	$x' \cos x - 1 = 0$	$ t < 1$
$\operatorname{arccos} t$	$x' \sin x + 1 = 0$	$ t < 1$
$\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t$	$x'' - x = 0$	$-\infty < t < \infty$
$\operatorname{th} t,$	$x' = 1 - x^2, \quad x'' = -2xx'$	$-\infty < t < \infty$
$\operatorname{cth} t$	$x' = 1 - x^2, \quad x'' = -2xx'$	$t \neq 0$
$\operatorname{Arsh} t$	$x' \operatorname{ch} x - 1 = 0$	$-\infty < t < \infty$
$\operatorname{Arch} t$	$x' \operatorname{sh} x - 1 = 0$	$ t > 1$
$\operatorname{Arth} t$	$x' = \operatorname{ch}^2 x$	$ t < 1$
$\operatorname{Arcth} t$	$x' = -\operatorname{sh}^2 x$	$ t > 1$

Проиллюстрируем на примерах технику отыскания определяющих дифференциальных уравнений для суперпозиций.

Пример 1. Необходимо реализовать на АВМ функцию $y(t) = \exp(-t^2)$. Эта функция часто встречается в задачах, связанных с теорией вероятностей.

Представим исходную функцию в виде суперпозиции двух: $x(t) = t^2, y(t) = \exp[-x(t)]$ и найдем для них определяющие дифференциальные уравнения путем последовательного дифференцирования. Производные функций будут:

$$y'(t) = -\exp[-x(t)]x'(t) = -y(t)x'(t); \quad x'(t) = 2t; \quad x''(t) = 2.$$

Определяющие дифференциальные уравнения, точнее, система дифференциальных уравнений с начальными условиями будет

$$\begin{aligned} y'(t) &= -y(t)x'(t); & y(0) &= 1; \\ x''(t) &= 2; & x(0) &= x'(0) = 0. \end{aligned}$$

Структурная схема, воспроизводящая на АВМ решение этой системы, представлена на рис. 8.2, а). Если внимательно рассмотреть эту структурную схему, то можно заметить в ней отсутствие переменной $x(t)$. В схеме нет блоков, которые вырабатывают $x(t) = t^2$. Переменная $x(t)$ оказалась ненужной для воспроизведения суперпозиции $\exp[-x(t)]$. Эта отмеченная особенность оказывается

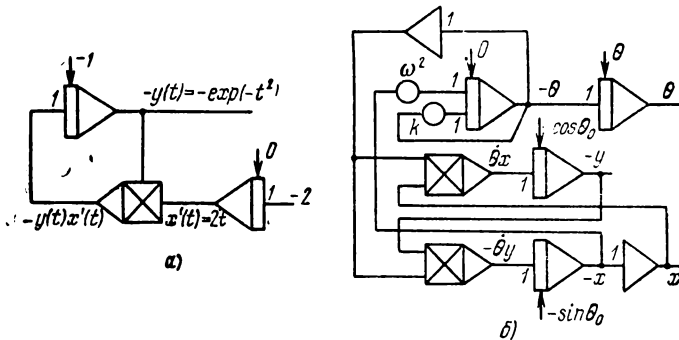


Рис. 8.2.

важным свойством суперпозиций. Очень часто при воспроизведении на АВМ произвольной суперпозиции $F(t) = f_2[f_1(t)]$ необходимо лишь воспроизведение $f_1(t)$, а не $f_1(t)$. Действительно, это прямо следует из цепного правила дифференцирования

$$F'(t) = \frac{df_2}{df_1} \frac{df_1}{dt}.$$

Метод определяющих дифференциальных уравнений часто бывает полезно применить при воспроизведении на АВМ решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, рассматривая нелинейности как суперпозиции функций. Такое применение позволяет перейти от исходного нелинейного дифференциального уравнения к новому, другому дифференциальному уравнению более высокого порядка, но реализация которого на АВМ не требует функциональных преобразователей.

Пример 2. Необходимо воспроизвести на АВМ решение нелинейного дифференциального уравнения с начальными условиями

$$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0; \quad \theta(0) = \theta_0; \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0.$$

Это дифференциальное уравнение встречается при исследовании колебаний математического маятника в сопротивляющейся среде, сила сопротивления которой пропорциональна угловой скорости отклонения маятника θ . Аналитического выражения решения через элементарные функции не существует. При воспроизведении решения на АВМ, вообще говоря, можно воспользоваться функциональным преобразователем, воспроизводящим функцию $\sin \theta(t)$. Однако здесь целесообразнее построить схему без функционального преобразователя, рассматривая функцию $\sin \theta(t)$ как суперпозицию из двух функций $\sin \theta$ и $\theta(t)$. Для получения необходимых определяющих уравнений введем две новые переменные

$$x(t) = \sin \theta(t), \quad y(t) = -\cos \theta(t),$$

дифференцируя которые один раз, получаем искомые определяющие уравнения

$$\dot{x} = -y(t)\dot{\theta}(t), \quad \dot{y} = x(t)\dot{\theta}(t).$$

Эти уравнения реализуются совместно с исходным уравнением так, что АВМ должна воспроизвести решение системы уравнений с начальными условиями

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -k\dot{\theta} - \omega^2 x(t), & \dot{\theta}(0) &= \dot{\theta}_0, & \theta(0) &= \theta_0; \\ \dot{x} &= -y(t)\dot{\theta}(t), & x(0) &= \sin \theta_0; \\ \dot{y} &= x(t)\dot{\theta}(t), & y(0) &= -\cos \theta_0. \end{aligned}$$

Структурная схема АВМ, соответствующая этим уравнениям, показана на рис. 8.2, б).

Вообще при воспроизведении на АВМ решений нелинейных дифференциальных уравнений не следует торопиться с использованием функциональных преобразователей, реализующих нелинейности вида $F_1[y(t)]$, $F_2[y'(t)]$, $F_3[y''(t)]$ и т. д. Применение функционального преобразователя неприятно тем, что требует дополнительных затрат труда на настройку преобразователя. Если для функции F имеется простое дифференциальное уравнение с устойчивыми решениями, то предпочтительней воспользоваться методом определяющих уравнений для реализации нелинейностей и тем самым избежать применения функциональных преобразователей. Правда, потребуются блоки перемножения и порядок уравнения будет выше, но в целом затрата труда и времени, связанные с подготовкой АВМ к воспроизведению решения, в большинстве случаев оказываются гораздо меньшими, чем при использовании настраиваемых функциональных преобразователей.

Теперь остановимся на выводе определяющих дифференциальных уравнений для простых суперпозиций произвольных функций.

Путь требуется найти определяющие дифференциальные уравнения для следующих функций:

$$1) y(t) = \ln f(t), \quad (8.3)$$

где $f(t) > 0$ — некоторая заданная произвольная функция:

$$2) y(t) = \exp f(t), \quad (8.4)$$

$$3) y(t) = f^\alpha(t), \quad (8.5)$$

$$4) y(t) = [f_1(t)]^{f_2(t)} \quad (8.6)$$

где $f(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ — некоторые заданные произвольные функции.

Дифференцируя (8.3) один раз по t , получаем:

$$y'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} \quad \text{или} \quad y'(t)f(t) - f'(t) = 0. \quad (8.7)$$

Это и есть искомое определяющее уравнение. Аналогично, дифференцируя (8.4), имеем искомое:

$$y'(t) = \exp f(t)f'(t) \quad \text{или} \quad y'(t) - f(t)f'(t) = 0.$$

Дифференцируем (8.5) по t : $y'(t) = \alpha f^{\alpha-1}(t) f'(t)$. Помножив обе части последнего равенства на $f(t)$, имеем:

$$y'(t) f(t) = \alpha f^\alpha(t) f'(t) \quad \text{или} \quad y'(t) f(t) - \alpha y(t) f'(t) = 0.$$

Функция (8.6) несколько сложнее. Ее целесообразно сначала прологарифмировать: $\ln y(t) = f_2(t) \ln f_1(t)$. Дифференцируя последнее равенство, получаем:

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = f_2'(t) \ln f_1(t) + f_2(t) \frac{f_1'(t)}{f_1(t)}.$$

Обозначив $z(t) = \ln f_1(t)$ и производя некоторые преобразования, имеем систему определяющих уравнений:

$$\begin{aligned} y'(t) f_1(t) - y(t) [f_2'(t) z(t) f_1(t) + f_2(t) f_1'(t)] &= 0; \\ z'(t) f_1(t) - f_1'(t) &= 0. \end{aligned}$$

Если необходимо воспроизвести функцию $y(t) = (1+t)^{-t}$, то после простых преобразований получаем систему определяющих дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} (1+t) y'(t) + y(t) [(1+t) z'(t) + 1] &= 0, \quad y(0) = 1; \\ (1+t) z'(t) - 1 &= 0, \quad z(0) = 0. \end{aligned}$$

§ 3. Воспроизведение функций, заданных таблично, графически или сложным аналитическим выражением

При проведении различного рода экспериментов изучаемая функциональная зависимость часто получается в виде ряда дискретных значений аргумента и соответствующих им значений функции:

$$\frac{x}{y} \left\| \begin{array}{c|c|c|c} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_n \\ \hline y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_j & \dots & y_n \end{array} \right. \quad (8.8)$$

Другая распространенная форма получения различных экспериментальных данных — графическая. Графики воспроизводятся с помощью особых приборов, называемых самописцами. Самописец на бумажной ленте или на каком-либо другом носителе графически изображает кривую, соответствующую изменению того или иного регистрируемого параметра. В тех случаях, когда необходимо заданные таким образом функции воспроизвести на АВМ, обычно поступают одним из следующих способов.

Способ первый состоит в том, что исходную функциональную зависимость, заданную таблично или графически, предварительно аппроксимируют некоторым аналитическим выражением, реализация которого на АВМ достаточно проста.

Второй способ состоит в использовании нелинейных функциональных преобразователей. В этом случае исходная зависимость аппроксимируется некоторой кусочно-линейной функцией, которая затем реализуется с помощью функциональных преобразователей.

Остановимся на первом способе. Здесь мы ограничимся рассмотрением лишь одного наиболее распространенного метода, получившего название *способа наименьших квадратов*, и отметим его особенности использования в связи с воспроизведением функций на АВМ.

Пусть исходная функциональная зависимость задана таблично (8.8). Будем искать приближенное аналитическое выражение исходной таблично заданной функции в виде следующего полинома: $\sum_{i=0}^m c_i \varphi_i(x)$, где $\varphi_i(x)$ — некоторая заранее выбранная система функции; c_i — пока неизвестные коэффициенты, которые необходимо определить, воспользовавшись табличными значениями x_j, y_j .

Обычно число неизвестных коэффициентов $m+1$ много меньше числа точек $n+1$, в которых задана исходная функция, т. е. $m \ll n$. Для определения c_i предварительно составляется функция

$$S(c_0, c_1, \dots, c_m) = \sum_{j=0}^n \left[y_j - \sum_{i=0}^m c_i \varphi_i(x_j) \right]^2.$$

Эта функция представляет сумму квадратов отклонений исходной функции от ее аппроксимирующего полинома в заданных точках x_j . Действительно, $y_j - \sum_{i=0}^m c_i \varphi_i(x_j)$ есть отклонения аналитической зависимости в точке x_j от исходного значения y_j . Ясно, что значение функции $S(c_0, c_1, \dots, c_m)$ зависит только от того, сколь удачно были выбраны значения c_i . Будем находить коэффициенты c из условия минимума функции $S(c_0, c_1, \dots, c_m)$. Необходимые условия экстремума этой функции дают систему линейных уравнений для определения неизвестных

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial c_i} = \sum_{j=0}^n \left[y_j - \sum_{i=0}^m c_i \varphi_i(x_j) \right] \varphi_i(x_j) = 0 \quad \text{для } i=0, 1, 2, \dots, m.$$

Иногда, когда функция, подлежащая реализации, задана аналитически, но это аналитическое выражение сложно реализовать средствами аналоговой вычислительной техники, то прибегают к замене исходной аналитической зависимости другим приближенным аналитическим представлением путем соответствующей аппроксимации.

Пусть задана на интервале $[x_1, x_2]$ некоторая функция $f(x)$, которую необходимо аппроксимировать системой функций $\varphi_i(x)$. Составим функцию в виде

$$S(c_0, c_1, c_2, \dots, c_m) = \int_{x_1}^{x_2} \left[f(x) - \sum_{i=0}^m c_i \varphi_i(x) \right]^2 dx.$$

Будем искать такой набор c_i , $i=0, 1, 2, \dots, m$, который обеспечит бы минимум $S(c_0, c_1, c_2, \dots, c_m)$. Как и ранее, необходимые условия экстремума дают систему уравнений для определения неизвестных c_i :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial c_i} = \int_{x_1}^{x_2} \left[f(x) - \sum_{i=0}^m c_i \varphi_i(x) \right] \varphi_i(x) dx = 0.$$

Воспроизведение приближенной аналитической зависимости на АВМ оправдано лишь тогда, когда она реализуется достаточно просто, т. е. с использованием малого числа операционных блоков. Это накладывает определенные ограничения на класс функций $\varphi_i(x)$ по которым производится разложение исходной функциональной зависимости. Элементы этого класса должны быть легко реализуемы на АВМ. К таким функциям следует отнести алгебраические и экспоненциальные многочлены. Алгебраический многочлен степени l имеет вид $\sum_{k=0}^l d_k x^k$. Экспоненциальный можно представить следующим выражением:

$$\sum_{k=c}^l A_k \exp \alpha_k x.$$

При экспоненциальной аппроксимации представляют интерес два случая. Первый — когда показатели экспонент α_k известны заранее. Тогда определение неизвестных коэффициентов A_k сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений. Во втором случае не только A_k , но и α_k являются неизвестными. Для определения этих неизвестных коэффициентов приходится решать более сложные нелинейные системы уравнений.

Менее удобными для реализации следует считать тригонометрические полиномы, конечно, если в состав АВМ не входит достаточно большое число блоков, воспроизводящих тригонометрические функции.

§ 4. Воспроизведение разрывных и кусочно-дифференцируемых функций

Часто при исследовании на АВМ ряда механических и электрических процессов возникает потребность в воспроизведении кусочно-непрерывных и кусочно-дифференцируемых функций. В механике особенно в сопротивлении материалов разрывные функции возникают вследствие действия на какую-либо механическую систему, например, балку сосредоточенных сил и пар сил. В электричестве и особенно в импульсной технике встречаются разрывные функции в виде последовательности электрических импульсов самой произвольной формы. Некоторые типы

разрывных функций показаны на рис. 8.3. На рис. 8.3, а) показана кусочно-непрерывная функция, имеющая две точки разрыва непрерывности первого рода в виде конечных скачков значений функции. На рис. 8.3, б) показана функция в виде последовательности прямоугольных импульсов. На рис. 8.3, в) даны

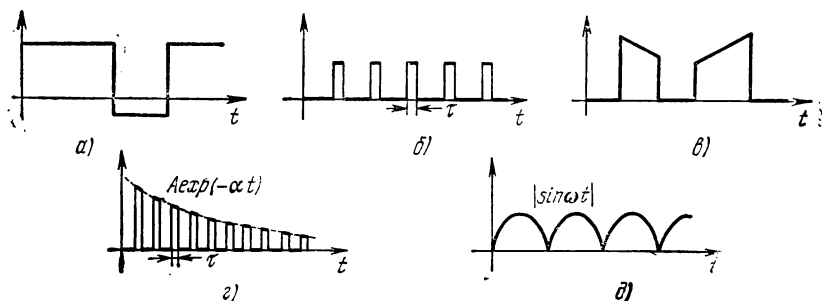


Рис. 8.3.

импульсы произвольной формы. На рис. 8.3, в) дана последовательность импульсов, амплитуда которых промодулирована функцией $A \exp(-\alpha t)$. На рис. 8.3, д) показана кусочно-дифференцируемая функция $y = |\sin \omega t|$.

Число примеров разрывных функций можно было бы продолжить и далее. Однако уже из приведенных видно, что недифференцируемость этих функций не дает возможности воспользоваться методом определяющих дифференциальных уравнений.

1. Разрывные функции. Воспроизведение разрывных функций с разрывами первого рода в виде конечных скачков осуществляется в АВМ на принципиально иной основе, чем метод определяющих дифференциальных уравнений. Скачки реализуются так называемыми релейными схемами, работа которых подробно рассматривалась в § 10 гл. 2. Коротко напомним два типа релейных схем АВМ.

Схемы первого типа — контактные. Одна из разновидностей схемы представлена на рис. 8.4, а). В момент перехода входного напряжения $u_{вх}(t)$ из положительной области в отрицательную срабатывает реле P . Нормально разомкнутые НР контакты замыкаются, а нормально замкнутые НЗ размыкаются. Если на НЗ контакт подается напряжение u_a , а на НР — напряжение u_b , то с выхода среднего контакта будет сниматься напряжение $u_{вых}$, равное u_a или u_b в зависимости от знака входного напряжения (рис. 8.4, б)). В релейной контактной схеме напряжения u_a и u_b могут быть как постоянными положительными и отрицательными вместе или порознь, так и любыми функциями

времени $u_a(t)$ и $u_b(t)$. Таким образом, в релейной контактной схеме:

$$u_{\text{вых}} = \begin{cases} u_a(t), & \text{если } u_{\text{вх}}(t) > 0, \\ u_b(t), & \text{если } u_{\text{вх}}(t) < 0. \end{cases}$$

Схемы второго типа — бесконтактные. Наиболее распространенный вариант показан на рис. 8.5, а). При переходе входного

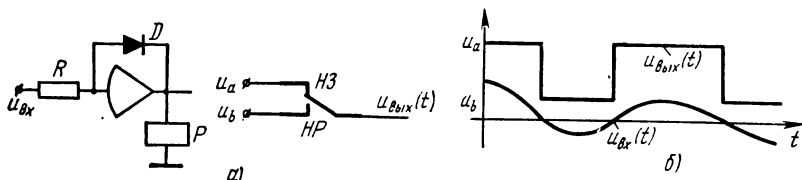


Рис. 8.4.

напряжения из положительной области в отрицательную на выходе схемы возникает скачок напряжения от $-u_b$ до $+u_a$. Таким образом, в релейной бесконтактной схеме

$$u_{\text{вых}} = \begin{cases} -u_b, & \text{если } u_{\text{вх}}(t) > 0, \\ +u_a, & \text{если } u_{\text{вх}}(t) < 0. \end{cases}$$

При этом абсолютное значение u_a и u_b может изменяться от 0 вольт до 100 В (рис. 8.5, б)).

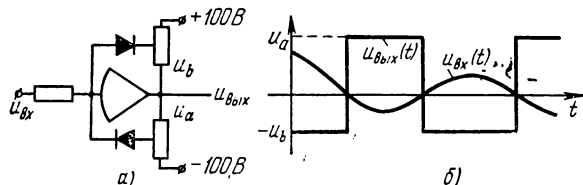


Рис. 8.5.

В обоих вариантах релейных схем место положения скачка входной функции определяется *нулем* входной функции. Поэтому при воспроизведении заданных разрывных функций в первую очередь необходимо подобрать такую *вспомогательную* входную функцию, нули которой соответствуют абсциссам скачков функции. Характер изменения во времени вспомогательной функции безразличен, важно только местоположение ее нулей, соответствующее абсциссам скачков. При этом, конечно, машинная переменная, представляющая вспомогательную функцию, не должна выходить за пределы рабочего диапазона ± 100 В.

Синтез вспомогательной функции по ее нулям, заданным на некотором отрезке, неоднозначен. Можно составить большое число самого произвольного вида функций, нули которых в заданном отрезке совпадают. Вспомогательная функция должна легко реализовываться на АВМ. Ранее мы выяснили, что легко реализуемые функции следует искать среди многократно дифференцируемых функций, для которых удастся найти достаточно простые определяющие дифференциальные уравнения.

Для практики представляют особый интерес два случая расположения нулей. Первый — произвольное расположение. Второй — расположение с постоянным шагом. Когда нули на заданном отрезке $[0, t^*]$ расположены произвольным образом, то в качестве вспомогательной функции можно выбрать алгебраический многочлен $y(t) = \sum_{j=0}^n c_j t^j$ степени n или экспоненциальный

многочлен $\sum_{j=0}^n c_j \exp \alpha_j t$. Алгебраический многочлен зависит от $n+1$ -го параметра, экспоненциальный — от $2n+1$ -го параметра. Определяющие дифференциальные уравнения для обоих многочленов — линейные n -го порядка, коэффициенты которых зависят от параметров многочленов. Многочлен алгебраический предпочтительней для реализации. Его аналитическое выражение просто представляется через нули, и потому отпадает потребность определять параметры по нулям. Если нулями являются абсциссы t_1, t_2, \dots, t_n , то многочлен будет иметь вид

$$y(t) = \prod_{j=1}^n (t - t_j).$$

Рассмотрим несколько примеров, в которых будем предполагать, что заданная к реализации функция определена на отрезке $[0, 1]$. В качестве релейных схем в основном будем использовать бесконтактные схемы.

Пример 1. Воспроизвести на АВМ функцию $x(t)$, представленную на рис. 8.6, а).

Исходная функция имеет один скачок непрерывности. Следовательно, один нуль имеет вспомогательная функция. Вспомогательную функцию возьмем в виде многочлена первой степени $y(t) = (t - \gamma)$. Определяющее дифференциальное уравнение для $y(t)$ будет:

$$y'(t) = 1, y(0) = -\gamma.$$

Коммутационная схема АВМ, воспроизводящая $x(t)$ в масштабе $m_x = 100$, показана на рис. 8.6, б). Вспомогательная функция $y(t)$ представлена в том же масштабе. Интегратор на входе релейной схемы воспроизводит вспомогательную функцию

$y(t)$ в соответствии с ее определяющим дифференциальным уравнением. На выходе релейной схемы воспроизводится заданная $x(t)$. Особенность этой коммутационной схемы в том, что, изменяя величину параметра γ , можно задать скачок функции $x(t)$ в любой точке отрезка $[0, 1]$.

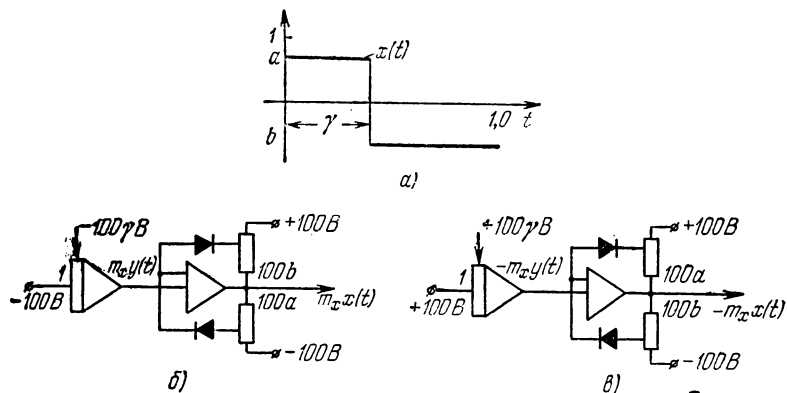


Рис 8.6.

Если потребовалось бы воспроизвести функцию $-x(t)$, то для этого достаточно изменить знак вспомогательной функции. Структурная схема для этого случая представлена на рис. 8.6 в).

Пример 2. Воспроизвести на АВМ функцию $x(t)$ представленную на рис. 8.7, а).

Исходная функция имеет один скачок. Вспомогательную функцию возьмем того же вида, что и в примере 1: $y(t) = -(t-\gamma)$. Бесконтактная релейная схема не может воспроизвести константы a и b одного знака. Поэтому с помощью релейной схемы воспроизводится функция $x(t) - b$, после чего

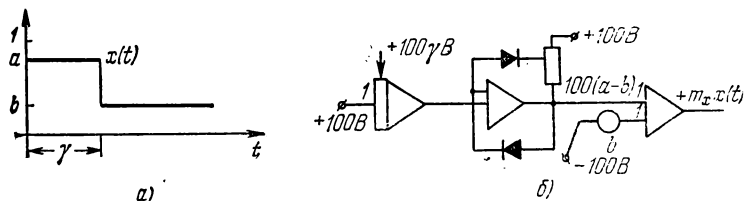


Рис. 8.7.

выходная переменная релейной схемы складывается с константой b . Коммутационная схема показана на рис. 8.7, б). Она отличается от предыдущей схемы дополнительным сумматором, осуществляющим указанное сложение.

Пример 3. Воспроизвести на АВМ функцию $x(t)$, показанную на рис. 8.8, а). Функция имеет два скачка одинаковой величины. Вспомогательную функцию возьмем в виде многочлена второй степени $y(t) = (t - \gamma_1)(t - \gamma_2)$, который имеет два нуля γ_1 и γ_2 . Определяющее дифференциальное уравнение для вспомогательной функции получается путем двукратного дифференцирования этой функции: $y'(t) = 2t - (\gamma_1 + \gamma_2)$, $y''(t) = 2$, отсюда имеем $y''(t) = 2$, $y'(0) = -(\gamma_1 + \gamma_2)$, $y(0) = \gamma_1 \gamma_2$.

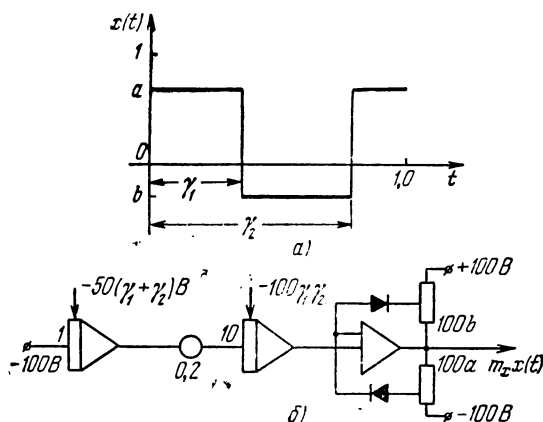


Рис. 8.8.

Реализация определяющего уравнения требует двух интеграторов. Коммутационная схема показана на рис. 8.8, б). Выходная переменная релейной схемы представляет заданную функцию $x(t)$ в масштабе $m_x = 100$. Изменяя величины начальных условий интеграторов, можно добиться возникновения скачков в произвольных точках отрезка $[0, 1]$.

Во всех примерах 1—3 абсциссы скачков были расположены произвольно. Когда же в расположении скачков наблюдается какая-либо закономерность, ее можно использовать, благодаря чему удастся упростить схему АВМ, воспроизводящую вспомогательную функцию.

Пример 4. Воспроизвести на АВМ функцию $x(t)$, показанную на рис. 8.9, а).

$x(t)$ представляет собой равноскажную периодическую последовательность прямоугольных импульсов постоянной амплитуды a и постоянной длительности τ . Период повторения импульсов, равный T , есть расстояние между ними по оси t . Легко подметить, что нули вспомогательной функции может иметь функция $y(t) = -A + \cos \omega t$, где $A = \text{число}$, причем $-1 < A < 1$ и $\omega = 2\pi/T$.

Величина A зависит от длительности импульса τ . Для определения A рассмотрим момент, когда $t = \frac{\tau}{2}$. В точке $\frac{\tau}{2}$, поскольку она — нуль функции $y(t)$, должно иметь место равенство $-A + \cos \omega \frac{\tau}{2} = 0$, отсюда $A = \cos \omega \frac{\tau}{2}$ и вспомогательная функция будет

$$y(t) = -\cos \omega \frac{\tau}{2} + \cos \omega t.$$

Найти определяющее дифференциальное уравнение для этой

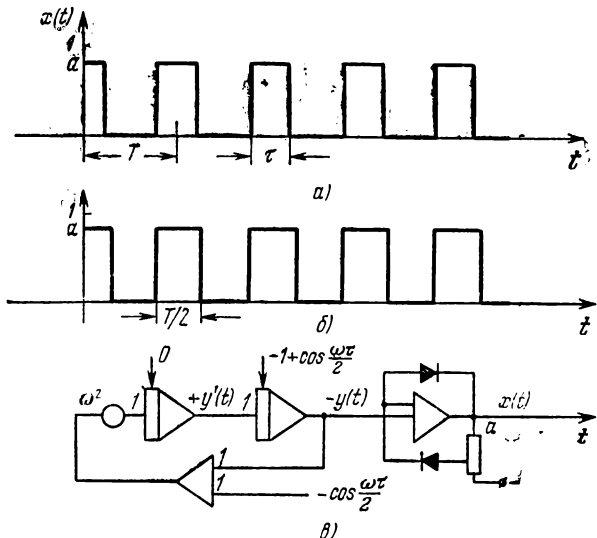


Рис. 8.9.

функции не представляет труда. Последовательное дифференцирование дает

$$y'(t) = -\omega \sin \omega t, \quad y''(t) = -\omega^2 \cos \omega t,$$

отсюда

$$y''(t) = -\omega^2 y - \omega^2 \cos \omega \frac{\tau}{2},$$

$$y(0) = 1 - \cos \omega \frac{\tau}{2}, \quad y'(0) = 0.$$

Структурная схема показана на рис. 8.9, в), где релейная схема настроена на пределы $\pm a, 0$.

Вспомогательная функция $y(t)$ образуется с помощью двух интеграторов и инвертора. Если $\tau = \frac{T}{2}$, то $A = 0$ и воспро-

изводится функция $x(t)$ в виде положительной прямоугольной волны, показанной на рис. 8.9, б).

Рассмотрим способ воспроизведения последовательности импульсов, амплитуда которых меняется в соответствии с какой-либо заданной функцией $z(t)$. В таких случаях говорят, что амплитуда импульсов промодулирована функцией $z(t)$. Функцию $z(t)$ будем называть огибающей, а последовательность прямоугольных импульсов — несущей последовательностью.

Получение на АВМ модулированной последовательности импульсов не представляет труда после того, как мы научились воспроизводить произвольную последователь-

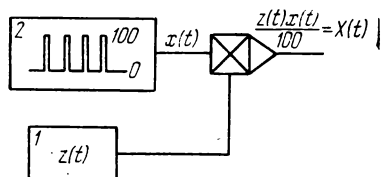


Рис. 8.10.

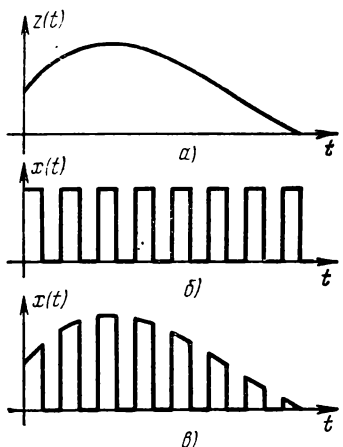


Рис. 8.11.

ность прямоугольных импульсов. Процесс переноса значений огибающей функции на несущую последовательность сводится к выполнению операции умножения. Блок-схема модуляции представлена на рис. 8.10. Схема, соответствующая блоку 1, вырабатывает огибающую функцию $z(t)$. Схема, показанная блоком 2, вырабатывает несущую последовательность прямоугольных импульсов с заданными параметрами. К параметрам относится длительность импульса τ и период их следования T . Существенно, что амплитуда импульсов не относится к параметрам. Она фиксирована и должна представляться электрическим напряжением 100 вольт. Это вызвано тем, что выполнение операции умножения осуществляется блоками перемножения со схемным масштабом $\mu = 0,01$.

На рис. 8.11, а) показана огибающая функция $z(t)$; на рис. 8.11, б) — заданная последовательность прямоугольных импульсов; на рис. 8.11, в) представлен результат перемножения графиков рис. 8.11, а) и б).

2. Кусочно-дифференцируемые функции. Однозначную функцию $f(t)$ будем называть кусочной на интервале $[0, 1]$, если ее аналитическое выражение различно для различных частей

интервала $[0, 1]$:

$$f(t) = \begin{cases} \varphi_1(t), & 0 \leq t < \gamma_1, \\ \varphi_2(t), & \gamma_1 \leq t < \gamma_2, \\ \varphi_3(t), & \gamma_2 \leq t < 1. \end{cases}$$

Эта функция состоит из трех кусков. Вообще говоря, в точках деления γ_1, γ_2 интервала $[0, 1]$ могут быть разрывы непрерывности первого рода в виде скачков. Однако здесь мы рассмотрим непрерывные кусочные функции.

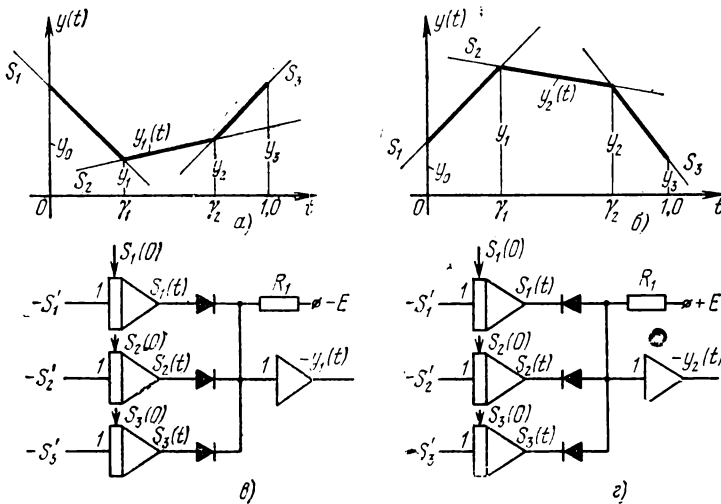


Рис. 8.12.

На рис. 8.12, а) и б) даны кусочно-линейные функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$. Обозначим через S_1, S_2, S_3 уравнения прямых, из отрезков которых образована функция. Тогда легко заметить, что

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \max \{S_1(t), S_2(t), S_3(t)\}, \\ y_2(t) &= \min \{S_1(t), S_2(t), S_3(t)\}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Уравнения (8.9) легко реализуются на АВМ с помощью схемы выделения максимальных и минимальных значений. Что же касается самих функций $S_1(t), S_2(t), S_3(t)$, то для них существуют простые определяющие дифференциальные уравнения. Из рис. 8.12, а), б), легко выводятся определяющие

дифференциальные уравнения

$$S_1'(t) = \frac{y_1 - y_0}{\gamma_1}, \quad S_1(0) = y_0; \quad S_2'(t) = \frac{y_2 - y_1}{\gamma_2 - \gamma_1}, \quad S_2(0) = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{\gamma_2 - \gamma_1} \gamma_1;$$

$$S_3'(t) = \frac{y_3 - y_2}{1 - \gamma_2}, \quad S_3(0) = y_2 - \frac{y_3 - y_2}{1 - \gamma_2} \gamma_2.$$

Структурные схемы АВМ, воспроизводящие $y_1(t)$ и $y_2(t)$, представлены на рис. 8.12, в), з). Схемы содержат по три интегратора для воспроизведения $S_1(t)$, $S_2(t)$, $S_3(t)$ и блоки выделения максимальных и минимальных значений. Величина сопротивления $R_1 \ll R$, где R — сопротивление входного резистора инвертора. В схеме выделения минимального значения переменных $|E| > S_j(t)$ для $j=1, 2, 3$. Эта схема реализует функцию $-y_2(t) = -\min\{S_1(t), S_2(t), S_3(t), E\}$. С учетом сделанного замечания о выборе величины E очевидно тождество:

$$\min\{S_1(t), S_2(t), S_3(t), E\} = \min\{S_1(t), S_2(t), S_3(t)\}.$$

В схеме выделения максимального значения переменных также $|E| > S_j(t)$ для $j=1, 2, 3$. Схема реализует функцию $-y_1(t) = -\max\{S_1(t), S_2(t), S_3(t), -E\} = -\max\{S_1(t), S_2(t), S_3(t)\}$.

Можно было бы обойтись без вспомогательной величины E , но в этом случае одна из переменных $S_j(t)$ должна была бы подаваться на вход инвертора не через диод, а через резистор R_1 , в результате чего масштаб представления этой переменной был бы иной, чем у остальных $S(t)$. Это неудобно, так как требует специальных мер по согласованию масштабов. Используемая схема с вспомогательной величиной E предпочтительней. В ней не нужно проводить согласование масштабов.

§ 5. Пример составления полной программы АВМ для воспроизведения заданной функции

Ранее при рассмотрении вопросов программирования АВМ для воспроизведения заданных функций независимого переменного программы АВМ составлялись нами до уровня структурных схем. В качестве примера проведем полное программирование АВМ МН-7 до уровня коммутационной схемы.

Пусть на машине МН-7 необходимо воспроизвести функцию $y(t) = \sin t^2$ на интервале t от 0 до 4.

Процесс разработки программы сводится к выполнению следующих этапов.

1. **Анализ задачи.** Цель этапа в данной задаче — отыскать определяющее дифференциальное уравнение или систему уравнений для заданной функции $y(t) = \sin t^2$.

Эта переменная не нужна для образования исходной функции $y(t) = \sin t^2$. В схеме организован программный останов для прекращения процесса воспроизведения функции, начиная с момента времени $t=4$, для чего используется переменная $-x'(t)$, которая для $t=4$ имеет значение -8 .

3. Масштабирование зависимых математических переменных. Цель этапа — определить масштабы представления математических переменных машинными переменными — электрическими напряжениями. Расчет масштабов выполнен в таблице:

Т а б л и ц а

Переменная	Максимальное значение переменной		Величина масштаба	Обозначение масштаба
	точное	округленное		
$y_1(t)$	1	1	$100/1 = 100$	m_{y_1}
$y_2(t)$	1	1	$100/1 = 100$	m_{y_2}
$x'(t)$	8	10	$100/10 = 10$	m_{x_1}

Для удобства проведения расчетов максимальное значение переменной $x'(t)$ округлено до 10.

4. Разработка коммутационной схемы, согласование масштабов. Коммутационная схема разрабатывается для машинных переменных с учетом ориентировки на конкретную АВМ. Будем разрабатывать схему для машины МН-7. Поэтому коммутационная схема, представленная на рис. 8.13, б), отражает особенности включения блоков этой машины. Блоки перемножения машины МН-7 осуществляют операцию умножения, лишь если перемножаемые переменные поступают на блок и в прямом, и в инверсном виде. Этим объясняется наличие дополнительных инверторов в коммутационной схеме. На коммутационной схеме проставлены номера операционных блоков, предполагаемых к использованию, и номера входов этих блоков. Коэффициенты передачи интеграторов 5 и 6 не определены. Величина коэффициента передачи β должна быть такой, чтобы обеспечить согласование масштабов переменных $y_1(t)$ и $y_2(t)$ с масштабами выходных переменных блоков перемножения. Потребность согласования вызвана необходимостью компенсации схемного масштаба 0,01 блоков перемножения.

Определим величину β для 5-го интегратора. На входе этого интегратора должна действовать математическая переменная

$$y_1'(t) = y_2(t) x'(t). \quad (8.10)$$

С учетом масштабов уравнению (8.10) должно соответствовать

уравнение для электрических напряжений

$$m_{y_1} y_1'(t) = \beta \frac{m_{x_1} m_{y_2}}{100} y_2(t) x'(t)$$

или

$$y_1'(t) = \beta \frac{m_{x_1} m_{y_2}}{100 m_{y_1}} y_2(t) x'(t). \quad (8.11)$$

Сравнивая коэффициенты в равенствах (8.10) и (8.11), получаем уравнение для определения β : $\beta : \beta \frac{m_{x_1} m_{y_2}}{100 m_{y_1}} = 1$, отсюда искомое

$$\beta = \frac{100 m_{y_1}}{m_{x_1} m_{y_2}} = 10.$$

На этом заканчивается разработка программы МН-7 для воспроизведения функции $\sin t^2$.

§ 6. Исследование заданных функций с помощью АВМ

При исследовании заданных функций независимого переменного обычно желательно найти графическое изображение функции, ряд ее точек, обладающих определенными характерными свойствами, и асимптоты. Необходимость в исследовании такого рода возникает при анализе решений дифференциальных уравнений. Изучение кривых с помощью АВМ представляет и самостоятельный интерес. Использование АВМ позволяет облегчить исследования кривой. Но для этого сначала необходимо кривую реализовать в АВМ, а воспроизведя ее, так организовать работу схемы программного управления, чтобы процесс воспроизведения прерывался в тех точках кривой, в которых она обладает интересующими свойствами. При этом графическое изображение кривой можно наблюдать на экране электронного индикатора. Часто встречаются задачи, в которых необходимо совместно исследовать не одну, а несколько кривых. В этих задачах в первую очередь выявляются общие точки кривых.

В основу реализации кривой в АВМ положен известный уже метод определяющих дифференциальных уравнений. Однако не для всякой функции легко отыскать достаточно простое и удобное к воспроизведению на АВМ дифференциальное уравнение. Это накладывает определенные ограничения на класс исследуемых функций с помощью АВМ. Кроме того, ограниченность диапазона изменения машинных переменных затрудняет отыскание вертикальных и наклонных асимптот кривой.

Способ задания исходной кривой определяет простоту ее реализации в АВМ и успех исследования с помощью АВМ. Здесь существенны три способа задания.

1. Кривая задана в явном виде. Это самый простой случай, при котором кривая задается уравнением $y(t) = f(t)$. Исследование кривой сводится к отысканию корней уравнений $f(t) = 0$, $f'(t) = 0$, $f''(t) = 0$ с помощью схемы программного управления. Корни первого уравнения — точки пересечения с координатной осью t . Корни второго уравнения представляют собой экстремальные точки (точки локальных максимумов и минимумов). Корни третьего уравнения — абсциссы точек перегиба. Конечно, здесь необходимо, чтобы определяющее дифференциальное уравнение для $y(t)$ было бы не ниже второго порядка. Иначе переменные $y''(t)$, $y'(t)$ не будут представлены явно, и их нельзя будет использовать для организации режима останова схемы программного управления.

2. Кривая задана в параметрическом виде. В этом случае плоская кривая задается парой функций $y(t) = f_1(t)$, $x(t) = f_2(t)$. Каждая из функций может быть воспроизведена по методу определяющих дифференциальных уравнений. При этом независимому параметру t в АВМ соответствует независимая машинная переменная — время. Графическое изображение кривой воспроизводится на экране ИЭЛ.

Точки пересечения кривой с осями координат отыскиваются с помощью программного прерывания по условию $f_1(t) = 0$, $f_2(t) = 0$.

Экстремумы (точки с горизонтальными и вертикальными касательными) отыскиваются по условию

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 0, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = 0,$$

или, что то же самое, $f_1'(t) = 0$; $f_2'(t) = 0$. Здесь точками отмечены производные по параметру t .

Точки перегиба находятся по условию

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^3} = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x} = 0.$$

3. Кривая задана в неявном виде. Для воспроизведения на АВМ кривой $F(x, y) = 0$ от неявного способа задания переходят к параметрическому $x(t)$, $y(t)$. Изложим метод, который позволяет сразу находить определяющие дифференциальные уравнения для $x(t)$, $y(t)$ по уравнению $F(x, y) = 0$, минуя получение явных аналитических выражений $x(t)$, $y(t)$.

1) Плоская кривая. Если точка с координатами $x(t)$, $y(t)$ принадлежит кривой $F(x, y) = 0$, то производная функции $F(x, y)$ по параметру t равна нулю: $\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0$.

Это тождество должно оставаться справедливым при любом параметрическом представлении $x(t)$, $y(t)$ кривой $F(x, y) = 0$. Оно справедливо и для представления

$$\frac{dx}{dt} = \omega \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\omega \frac{\partial F}{\partial x}, \quad (8.12)$$

где $\omega \neq 0$ — произвольное число.

Выражения (8.12) представляют собой искомые определяющие дифференциальные уравнения для функций $x(t)$, $y(t)$. К уравнениям следует присоединить начальные условия $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Они означают, что воспроизведение исходной кривой $F(x, y) = 0$ происходит с точки (x_0, y_0) , принятой за начальную. Начальная точка (x_0, y_0) разделяет кривую на две ветви. Одна ветвь воспроизводится при $\omega > 0$, другая при $\omega < 0$. Темп воспроизведения кривой машиной определяется абсолютной величиной числа ω .

Для иллюстрации найдем систему определяющих дифференциальных уравнений для воспроизведения произвольной кривой второго порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + G = 0. \quad (8.13)$$

Находя частные производные в соответствии с (8.12), имеем искомое $\frac{dx}{dt} = \omega(Bx + Cy + E)$, $\frac{dy}{dt} = -\omega(Ax + By + D)$. В зависимости от знака дискриминанта $AC - B^2$ уравнения (8.13), АВМ будет воспроизводить: эллипс ($AC^2 - B > 0$), параболу ($AC^2 - B = 0$), гиперболу ($AC^2 - B < 0$).

2) Пространственная кривая. Пусть для воспроизведения дана пространственная кривая как линия пересечения двух поверхностей:

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0. \quad (8.14)$$

От уравнений (8.14) перейдем к параметрическому способу задания путем отыскания соответствующей системы определяющих дифференциальных уравнений, для функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Для этого найдем производные функции $F_1(x, y, z)$ и $F_2(x, y, z)$ по параметру t , и приравняв их нулю, получаем для трех переменных $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ систему из двух линейных однородных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0,$$

Из алгебры известно, что такие системы могут иметь бесконечное множество ненулевых решений, удовлетворяющих отношению:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) : \left(-\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dz}{dt}\right) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{array} \right|.$$

И в частности, решением будет:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \omega \left[\frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial F_2}{\partial y} \right]; \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega \left[\frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial F_2}{\partial x} \right]; \\ \frac{dz}{dt} &= \omega \left[\frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial F_2}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (8.15)$$

где ω — произвольное число, отличное от нуля.

Выражения (8.15) представляют собой искомые определяющие дифференциальные уравнения для функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. К уравнениям (8.15) следует присоединить начальные условия $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$, которые означают, что воспроизведение исходной кривой начинается от точки (x_0, y_0, z_0) .

Для иллюстрации найдем систему определяющих дифференциальных уравнений для кривой, возникшей в результате сечения произвольной поверхности второго порядка произвольной плоскостью

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0; \\ a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + \\ &+ 2a_{31}zx + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \end{aligned}$$

Первое уравнение представляет собой общее уравнение плоскости. Второе уравнение — общее уравнение поверхности второго порядка. В соответствии с (8.15) имеем следующую систему линейных дифференциальных уравнений относительно искомых $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \omega [(a_{33}B - a_{23}C)z + (a_{23}B - a_{22}C)y + (a_{31}B - a_{12}C)x + \\ &+ a_{34}B - a_{24}C]; \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega [(a_{33}A - a_{31}C)z + (a_{23}A - a_{12}C)y + (a_{31}A - a_{11}C)x + \\ &+ a_{34}A - a_{14}C]; \\ \frac{dz}{dt} &= \omega [(a_{23}A - a_{31}B)z + (a_{22}A - a_{12}B)y + (a_{12}A - a_{11}B)x + \\ &+ a_{24}A - a_{14}B]. \end{aligned}$$

3) Применение к станкам с программным управлением. Чтобы станок из заготовки вырезал деталь заданной конфигурации, системе автоматического управления станком необходимо задать программу работы в виде $\dot{x}(t) = \varphi_1(t)$, $\dot{y}(t) = \varphi_2(t)$ (плоская деталь) или $\dot{x}(t) = \varphi_1(t)$, $\dot{y}(t) = \varphi_2(t)$, $\dot{z}(t) = \varphi_3(t)$ (пространственная деталь). Функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ задают скорости перемещения режущего инструмента вдоль координатных осей. Исходной информацией для получения $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ служат уравнение контура детали $\Phi_1(x, y) = 0$ и уравнение контура заготовки $\Phi_2(x, y) = 0$. По $\Phi_1(x, y) = 0$ в зависимости от применяемого типа режущего инструмента определяется траектория режущего инструмента $F(x, y) = 0$. И далее, по (8.12) отыскиваются искомые функции $\dot{x}(t) = \omega(x, y) \frac{\partial F}{\partial y} = \varphi_1(t)$, $\dot{y}(t) = -\omega(x, y) \frac{\partial F}{\partial x} = \varphi_2(t)$. С помощью функции $\omega(x, y)$ задается скорость перемещения режущего инструмента, (скорость резания), которая зависит от количества удаляемого материала (припуска на обработку). Для каждой точки контура детали $\Phi_1(x, y) = 0$ припуск определяется как расстояние по нормали к кривой $\Phi_1(x, y) = 0$ до контура заготовки $\Phi_2(x, y) = 0$.

4. **Определение общих точек плоских кривых.** Задача определения общих точек кривых $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$ равносильна решению системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} F_1(x, y) &= 0, \\ F_2(x, y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

Далее предполагается, что якобиан системы (8.16)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0,$$

а потому существует x^* , y^* — решение системы (8.16).

Отыскание x^* , y^* осуществляется с помощью схемы программного управления, работающей в режиме программного прерывания. Для этого на АВМ:

а) воспроизводится кривая $F_1(x, y) = 0$ посредством реализации решения системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial F_1}{\partial y}, & x(0) &= x_0; \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial F_1}{\partial x}, & y(0) &= y_0; \end{aligned} \quad (8.17)$$

б) воспроизводится функция $F_2(t) = F_2(x, y)$ с помощью функций $x(t)$ и $y(t)$. Функция $F_2(t)$ подается на вход схемы программного управления, которая прерывает решение в момент $t = t^*$ по условию $F_2(t^*) = 0$. При этом получают значения $x(t^*)$ и $y(t^*)$, являющиеся искомым решением x^* , y^* системы (8.16).

Пример. Найти математические выражения, удобные для определения с помощью АВМ общей точки кривых

$$\exp(x+y)+y=0, \exp(x-y)+x=0 \quad (8.18)$$

в квадрате $-1 < x < 0$, $-1 < y < 0$. Обозначим через $F_1(x, y)$ выражение $\exp(x+y)+y$, а через $F_2(x, y)$ — выражение $\exp(x-y)+x$.

Первое уравнение системы (8.18) используем для параметрического представления кривой $F_1(x, y)=0$ в виде $x(t)$, $y(t)$ с помощью (8.17):

$$x' = -[\exp(x+y)+1] = -(1-y), \quad x(0) = x_0, \quad (8.19)$$

$$y' = \exp(x+y) = -y, \quad y(0) = y_0.$$

Использовать прямо выражение

$$F_2(x, y) = \exp(x-y) + x \quad (8.20)$$

для образования функции $F_2(t)$ нецелесообразно. Потребуется функциональный преобразователь. Чтобы избежать применения функционального преобразователя, найдем для $F_2(t)$ определяющее дифференциальное уравнение. Дифференцирование (8.20) по переменной t с учетом (8.19) дает

$$\frac{dF_2}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{dy}{dt} = -(1-x-y+2xy).$$

В окончательном виде система дифференциальных уравнений будет:

$$\begin{aligned} x' &= -(1-y), & x(0) &= -0,2, \\ y' &= -y, & y(0) &= -0,5, \\ F_2' &= -(1-x-y+2xy), & F_2(0) &= 1,15. \end{aligned}$$

Здесь начальные условия выбраны так: $y(0)$ в середине отрезка $[-1, 0]$; условие $x(0) = -0,2$ получено путем решения уравнения $\exp(x_0 - 0,5) - 0,5 = 0$; условие $F_2(0) = 1,15$ получено путем подстановки значений $x(0)$ и $y(0)$ в выражение (8.20).

§ 7. Задачи

1. Разработать структурные и коммутационные схемы для воспроизведения и исследования на АВМ МН-7 заданных функций независимого переменного:

- 1) $y(t) = a \sin \omega t$.
- 2) $y(t) = b \cos \omega t$.
- 3) $y(t) = t \exp(-\alpha t)$.
- 4) $y(t) = t^2 \exp(-\alpha t)$.
- 5) $y(t) = \exp(-\alpha t) \sin \omega t$.
- 6) $y(t) = \sin^2 t$.
- 7) $y(t) = a \operatorname{sh} \omega t$.
- 8) $y(t) = b \operatorname{ch} \omega t$.
- 9) $y(t) = \exp(-\alpha t) \operatorname{sh} \omega t$.

- 10) $y(t) = \exp(-at) \operatorname{ch} \omega t$.
 11) $y(t) = 1+t+t^2+t^3, 0 \leq t \leq 1$.
 12) $y(t) = (1+t)^{-6,3}, 0 \leq t \leq 1$.
 13) $y(t) = (1+t)^{6,3}, 0 \leq t \leq 1$.
 14) $y(t) = (1+t)^n \exp(-t), 0 \leq t \leq 1$.
 15) $y(t) = \sin \sin t$.
 16) $y(t) = \exp(-\sin t)$.
 17) $y(t) = \exp(-t \exp(-t))$.

18) $y(t) = \ln(1+t)$.

19) $y(t) = \sin \ln(1+t)$.

20) $y(t) = (1+t)^{-\exp(-t)}, 0 \leq t \leq 1$.

21) $\left. \begin{aligned} x(t) &= \cos t(1 + \cos t), \\ y(t) &= \sin t(1 + \cos t), \end{aligned} \right\} \text{кардиоида.}$

22) $\left. \begin{aligned} x(t) &= \cos^3 t, \\ y(t) &= \sin^3 t, \end{aligned} \right\} \text{астроида.}$

23) $\left. \begin{aligned} x(t) &= m \cos t - \cos mt, \\ y(t) &= m \sin t - \sin mt, \end{aligned} \right\} \text{эпициклоида.}$

Исследовать при $m \geq 3, m$ — целом.

24) $\left. \begin{aligned} x(t) &= m \cos t + \cos mt, \\ y(t) &= m \sin t - \sin mt, \end{aligned} \right\} \text{гипоциклоида.}$

Исследовать при $m \geq 2, m$ — целом.

25) $\left. \begin{aligned} x(t) &= m \cos t - \lambda \cos mt, \\ y(t) &= m \sin t - \lambda \sin mt, \end{aligned} \right\} \text{эпитрохида.}$

Исследовать при $m \geq 3, m$ — целом, $1 < \lambda < 2$.

26) $\left. \begin{aligned} x(t) &= m \cos t + \lambda \cos mt, \\ y(t) &= m \sin t - \lambda \sin mt, \end{aligned} \right\} \text{гипотрохида.}$

Исследовать при $m \geq 2, m$ — целом, $1 < \lambda < 2$.

27) $\left. \begin{aligned} x(t) &= \sin(m+1)t + \sin(m-1)t, \\ y(t) &= \cos(m+1)t - \cos(m-1)t, \end{aligned} \right\} \text{розы.}$

28) $\left. \begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \cos t^2 dt, \\ y(t) &= \int_0^t \sin t^2 dt, \end{aligned} \right\} \text{спираль Корню, } 0 \leq t \leq 5.$

- 29) $\left. \begin{aligned} x(t) &= t \cos t, \\ y(t) &= t \sin t. \end{aligned} \right\} \text{ спираль Архимеда, } 0 \leq t \leq 4\pi.$
- 30) $\left. \begin{aligned} x(t) &= \cos t \exp(-t), \\ y(t) &= \sin t \exp(-t). \end{aligned} \right\} \text{ логарифмическая спираль.}$
- 31) $\left. \begin{aligned} x(t) &= \cos t + t \sin t, \\ y(t) &= \sin t - t \cos t. \end{aligned} \right\} \text{ эвольвента, } 0 \leq t \leq 4\pi.$
- 32) $x(t) = \min \{t \exp(-t), t^2 \exp(-t)\}.$
- 33) $x(t) = \max \{\sin \omega t, \cos \omega t, 0\}.$
- 34) $x(t) = \sin \omega t + |\sin \omega t|.$
- 35) $x(t) = \min \{\sin \omega t, \cos \omega t\}.$
- 36) $x(t) = \max \{t \exp(-t), \sin \omega t\}.$
- 37) $x(t) = \min \{t \exp(-t), \exp(-t^2)\}.$
- 38) $x(t) = \max \{\exp(-t), \exp(-t^2)\}.$

2. Для следующих ниже кривых найти системы определяющих дифференциальных уравнений и составить структурные схемы АВМ для воспроизведения их решений:

1) окружность $(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = R^2;$

2) эллипс $\frac{(x - a_1)^2}{a^2} + \frac{(y - b_1)^2}{b^2} = 1;$

3) гипербола $\frac{(x - a_1)^2}{a^2} - \frac{(y - b_1)^2}{b^2} = 1;$

4) парабола $(x - a_1)^2 = k(y - b_1);$

5) декартов лист $x^3 + y^3 = 3axy;$

6) алгебраическая кривая $x^4 + y^4 - 2xy = 0;$

7) улитка Паскаля $(x^2 + y^2 - ax)^2 = l(x^2 + y^2);$

8) лемниската $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0;$

9) овал Кассини $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4;$

10) строфоида $y^3 = x^3 \frac{a + x}{a - x}.$

3. Вывести необходимые дифференциальные уравнения (см. стр. 168) и, решая их аналитически, показать правильность определения общей точки линий

1) $a_{11}x + a_{12}y - b_1 = 0, \quad a_{21}x + a_{22}y - b_2 = 0;$

2) $x^2 + y^2 - R^2 = 0, \quad y - kx = 0;$

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x^3 - ky = 0.$

4. Показать, что если якобиан системы (8.16) равен нулю, то по изложенному методу (см. стр. 168) нельзя установить наличие общих точек кривых (8.16), так как при этом $F_2(t) = \text{const}$.

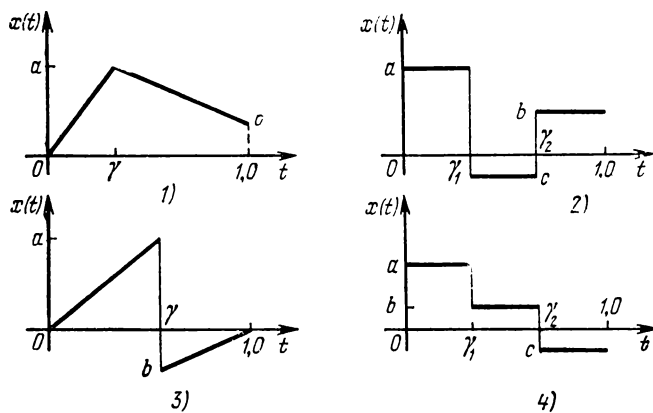


Рис. 8.14.

5. Составить коммутационные схемы для воспроизведения на АВМ МН-7 функций, показанных на рис. 8.14.

ЭЛЕМЕНТЫ НЕПРЕРЫВНОЙ ЛОГИКИ
§ 1. Булева алгебра выбора

Булева алгебра выбора представляет собой обобщение известной алгебры логики и содержит последнюю в себе в виде частного случая. Если алгебра логики нашла широкое применение при синтезе так называемых комбинационных логических схем и при программировании цифровых вычислительных машин, то алгебру выбора полезно использовать при разработке ряда диодных операционных блоков АВМ и при программировании работы аналоговых машин. В алгебре логики исследуются операции над переменными, которые меняются дискретно и могут принимать лишь два значения. В алгебре выбора изучаются операции над произвольными переменными (дискретными и непрерывными), но они должны быть ограничены по величине сверху и снизу. Алгебру выбора в литературе часто называют *непрерывной логикой*. В отношении алгебры выбора следует с самого начала оговориться, что ее применение при программировании АВМ не приводит непосредственно к схеме, «наилучшей» в каком-либо смысле. Алгебра выбора полезна тем, что позволяет путем формальных равносильных преобразований математических выражений получать большое разнообразие логических схем АВМ, из которых можно отобрать схемы, удобные для реализации.

1. Операции выбора и их свойства. Будем рассматривать множество M действительных ограниченных переменных, содержащее свою верхнюю грань p и нижнюю грань q .

Назовем центром множества M точку $\frac{p+q}{2}$. По отношению к этой точке предполагается симметричность множества M . Это означает, что, если x принадлежит M , то элемент $\bar{x} = p + q - x$, симметрично расположенный относительно центра, также принадлежит M . Ясно, что при $q = -p$ центр множества — нуль, а \bar{x} — элемент, симметричный элементу x , отличается от него лишь знаком, т. е. $\bar{\bar{x}} = -x$. В частности, это будет, когда $p = 1$, а $q = -1$.

Выбор по элементу x симметричного ему элемента $\bar{x} = p + q - x$ будем рассматривать как одноместную операцию,

заданную на множестве M . Эту операцию называют *инверсией* и иногда обозначают как $\text{inv } x = \bar{x}$.

Наряду с инверсией определим на множестве M еще две двуместных операции выбора

$$\begin{aligned} \max \{x_1, x_2\} &= \begin{cases} x_1 & \text{при } x_1 \geq x_2, \\ x_2 & \text{при } x_2 \geq x_1; \end{cases} \\ \min \{x_1, x_2\} &= \begin{cases} x_1 & \text{при } x_2 \geq x_1, \\ x_2 & \text{при } x_1 \geq x_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Множество переменных M , на котором определены три операции выбора inv , \max , \min , будем называть *булевой алгеброй выбора*. Выражения, содержащие конечное число переменных x_1, x_2, x_3, \dots , связанные операциями выбора, назовем *формулами алгебры выбора*. Предмет изучения алгебры выбора — методы установления равносильности вида $A(x_1, x_2, x_3, \dots) = B(x_1, x_2, x_3, \dots)$, где через $A(x_1, x_2, x_3, \dots)$ и $B(x_1, x_2, x_3, \dots)$ обозначены формулы алгебры выбора.

Из определения операций выбора следуют равносильности: инволюция

$$\overline{\bar{x}} = x; \quad (9.1)$$

коммутативность

$$\max(x_1, x_2) = \max(x_2, x_1), \quad (9.2)$$

$$\min(x_1, x_2) = \min(x_2, x_1); \quad (9.3)$$

ассоциативность

$$\max\{x_1, \max(x_2, x_3)\} = \max\{x_1, x_2, x_3\}, \quad (9.4)$$

$$\min\{x_1, \min(x_2, x_3)\} = \min\{x_1, x_2, x_3\}; \quad (9.5)$$

дистрибутивность

$$\max\{x_1, \min(x_2, x_3)\} = \min\{\max(x_1, x_2), \max(x_1, x_3)\}, \quad (9.6)$$

$$\min\{x_1, \max(x_2, x_3)\} = \max\{\min(x_1, x_2), \min(x_1, x_3)\}; \quad (9.7)$$

свойство А. де Моргана

$$\overline{\min(x_1, x_2)} = \max(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \quad (9.8)$$

$$\overline{\max(x_1, x_2)} = \min(\bar{x}_1, \bar{x}_2); \quad (9.9)$$

идемпотентность

$$\max(x, x) = x, \quad (9.10)$$

$$\min(x, x) = x; \quad (9.11)$$

нейтральность граней

$$\max(x, q) = x, \quad (9.12)$$

$$\min(x, p) = x; \quad (9.13)$$

экстремальность граней

$$\max(x, p) = p, \quad (9.14)$$

$$\min(x, q) = q. \quad (9.15)$$

Соотношения равносильности (9.1) — (9.15) позволяют выполнять над произвольными формулами алгебры выбора различные преобразования, приводящие их к более простому или более удобному виду. Равносильность формул алгебры выбора можно установить, используя равносильности (9.1) — (9.15), или непосредственной проверкой с помощью так называемых таблиц выбора. Для иллюстрации применения таблицы выбора покажем, например, справедливость равносильности (9.7) $\min\{x_1, \max(x_2, x_3)\} = \max\{\min(x_1, x_2), \min(x_1, x_3)\}$. Для этого обозначим через y_1 левую часть $\min\{x_1, \max(x_2, x_3)\}$, а через y_2 — правую $\max\{\min(x_1, x_2), \min(x_1, x_3)\}$.

Т а б л и ц а 1

<			$\max(x_2, x_3)$	y_1	$\min(x_1, x_2)$	$\min(x_1, x_3)$	y_2
x_1	x_2	x_3	x_3	x_1	x_1	x_1	x_1
x_1	x_3	x_2	x_2	x_1	x_1	x_1	x_1
x_2	x_1	x_3	x_3	x_1	x_2	x_1	x_1
x_2	x_3	x_1	x_3	x_3	x_2	x_3	x_3
x_3	x_1	x_2	x_2	x_1	x_1	x_3	x_1
x_3	x_2	x_1	x_2	x_2	x_2	x_3	x_2

В первых трех столбцах таблицы выбора располагаются переменные x_1, x_2, x_3 во всех возможных соотношениях в порядке возрастания слева направо так, что для первой строки $x_1 < x_2 < x_3$, а для второй $x_1 < x_3 < x_2$ и т. д. Сравнение содержимого столбцов таблицы левой и правой частей выражения (9.7) убеждает в справедливости (9.7). Столбцы $\max(x_2, x_3)$, $\min(x_1, x_2)$, $\min(x_1, x_3)$ играют вспомогательную роль: содержат результаты промежуточных операций.

Часто равносильность формул алгебры выбора можно установить на основе соотношений двойственности. Операцию \max будем называть двойственной операции \min и наоборот. Формулы A и A^* называются *двойственными*, если одна получается из другой заменой каждой операции на двойственную. Из равносильностей (9.8) и (9.9) следует, что, если $A(x_1, x_2, x_3, \dots)$ и $A^*(x_1, x_2, x_3, \dots)$ — двойственные формулы, то формулы $A(x_1, x_2, x_3, \dots)$ и $A^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots)$ равносильны. И далее, как

следствие, получаем для равносильных формул A и B равносильность их двойственных A^* и B^* .

Все операции выбора выражаются через алгебраическое сложение и функцию модуль (абсолютное значение). Для операции inv этот факт следует из ее определения. Для операций max и min имеют место такие легко устанавливаемые представления:

$$\text{min}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} [x_1 + x_2 - |x_1 - x_2|],$$

$$\text{max}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} [x_1 + x_2 + |x_1 - x_2|].$$

Операции выбора сочетаются с обычными алгебраическими операциями сложения и умножения, с которыми они дистрибутивны:

$$x_1 + \text{max}(x_2, x_3) = \text{max}\{(x_1 + x_2), (x_1 + x_3)\}, \quad (9.16)$$

$$\text{max}(x_1, x_2) + \text{max}(x_3, x_4) =$$

$$= \text{max}\{(x_1 + x_3), (x_2 + x_3), (x_1 + x_4), (x_2 + x_4)\}, \quad (9.17)$$

$$x_1 \text{max}(x_2, x_3) = \text{max}\{x_1 x_2, x_1 x_3\}. \quad (9.18)$$

Равносильности (9.16) — (9.18), конечно, сохраняются при замене операции max двойственной операцией min .

Реализация операции выбора на АВМ рассматривалась нами в § 10 гл. 2.

2. Предикаты. *Предикатами* называют логические функции, заданные в M . Предикат может быть функцией одного переменного или нескольких. Особенность предикатов как логических функций — в том, что их область значений содержит лишь два элемента — два действительных числа из множества M . Мы дальше будем встречаться с предикатами, которые в множестве M принимают лишь значения p и q , соответствующие граням множества M . Тот факт, что значения предикатов лежат в M , позволяет рассматривать предикаты как дискретные переменные из M , и следовательно, позволяет применять к ним операции выбора inv , max , min . Предикаты в дальнейшем будем обозначать заглавной буквой P латинского алфавита.

В простейшем случае предикат $P(x)$ имеет один аргумент x . Такой предикат выражает некоторое свойство переменной x . Например, предикат: « x — положительное число». Этот предикат можно записать так:

$$P(x) = \begin{cases} p & \text{для } x > 0, \\ q & \text{для } x \leq 0. \end{cases}$$

Переменная x , пробегая все значения от q до p , с помощью предиката $P(x)$ разбивает множество значений x на два под-

множества. В одном, для которого $P(x) = p$, сосредоточены все положительные значения x , в другом все остальные.

Наиболее важны предикаты от нескольких переменных. Такими предикатами можно задавать отношения между переменными, как-то: $x_1(t) < x_2(t)$; $x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) < 0$ и другие.

В качестве примера рассмотрим предикат $P(x_1, x_2) = \text{sign}(x_1^2 + x_2^2 - R^2)$, определенный на прямоугольнике $q \leq x_1 \leq p, q \leq x_2 \leq p$. Напомним, что

$$\text{sign } z = \begin{cases} 1 & \text{для } z \geq 0, \\ -1 & \text{для } z < 0. \end{cases}$$

На рис. 9.1 показана прямоугольная область задания предиката и окружность в ней $x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0$. Легко замечается, что для всех внутренних точек области, ограниченной окружностью, предикат принимает значение $P(x_1, x_2) = -1$. Для всех остальных точек $P(x_1, x_2) = 1$.

С помощью предикатов образуют так называемые штрафные функции, используемые при программировании АВМ для решения задач математического программирования (§ 4 гл. 10) и для решения систем неравенств. Примером штрафной функции по отношению к области, ограниченной окружностью $x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0$, может быть функция

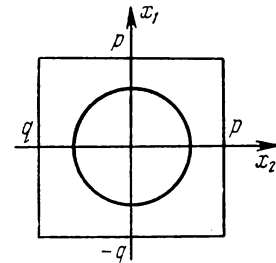


Рис. 9.1.

$$\psi(x_1, x_2) = |x_1^2 + x_2^2 - R^2| \text{sgn}(x_1^2 + x_2^2 - R^2), \quad (9.19)$$

где предикат

$$\text{sgn}(x_1^2 + x_2^2 - R^2) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1^2 + x_2^2 - R^2 \leq 0, \\ 1, & \text{если } x_1^2 + x_2^2 - R^2 > 0. \end{cases}$$

Из (9.19) следует, что штрафная функция не отрицательна. Для всех пар (x_1, x_2) , лежащих внутри области $x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0$, штрафная функция равна нулю, а вне области значения штрафной функции тем больше, чем больше от области удалена точка (x_1, x_2) . Таким образом, «штраф» пропорционален степени отклонения от допустимой области.

Воспроизведение предикатов на АВМ осуществляется с помощью схемы программного управления или с помощью бесконтактной релейной схемы. Предикат представляет собой разрывную функцию с разрывами первого рода в виде конечных скачков. Воспроизведение таких функций уже было рассмотрено в § 4 гл. 8.

3. Связь алгебры логики с алгеброй выбора. Алгебра логики содержится в алгебре выбора. Чтобы убедиться в этом, достаточно выделить из множества переменных M подмножество предикатов M' и рассмотреть на M' операции выбора. Для операций выбора, определенных на M' , характерно то, что исходные переменные (предикаты) принимают лишь два значения p или q , и соответственно результаты операций выбора и формулы алгебры выбора будут принимать лишь одно из двух значений p или q . В алгебре логики операции тах соответствует конъюнкция, а операции min — дизъюнкция. Все равносильности (9.1) — (9.13) сохраняются и в алгебре логики. Диодные схемы выбора максимума (рис. 2.29, б)) реализуют логическую операцию конъюнкции. Эта схема получила название «схема и». Диодная схема выбора минимума (рис. 2.29, г)) реализует логическую операцию дизъюнкции. Схема получила названия «схема или».

§ 2. Условные операторы присваивания и их реализация на АВМ

1. Условный оператор общего вида. Понятие условного оператора присваивания возникло в алгоритмических языках для программирования цифровых вычислительных машин. Например, в алгоритмическом языке «Алгол-60» условный оператор присваивания записывается в следующем виде:

$$y := \text{if } B \text{ then } x \text{ else } z, \quad (9.20)$$

где B — некоторое булево выражение, принимающее в зависимости от своей истинности значения 0 или 1; y — переменная, которой присваиваются значения переменной x или переменной z . В обычной математической символике условному оператору присваивания (9.20) соответствует запись

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } B = 0, \\ z, & \text{если } B = 1. \end{cases} \quad (9.21)$$

Потребность в реализации условных операторов присваивания возникает и при программировании АВМ особенно, когда решаемая задача приводит к схеме, имеющей переменную структуру. При программировании АВМ роль булевой переменной B выполняет предикат $P(t)$. С учетом этого оператор можно **записать аналогично (9.21)**;

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } P(t) = p, \\ z(t), & \text{если } P(t) = q. \end{cases} \quad (9.22)$$

Запись условного оператора присваивания (9.22) через операции выбора не представляет особого труда.

Действительно,

$$y(t) = \max \{ \min \{ x(t), P(t) \}, \min \{ z(t), \bar{P}(t) \} \}; \quad (9.23)$$

или в равносильной форме

$$y(t) = \min \{ \max \{ x(t), \bar{P}(t) \}, \max \{ z(t), P(t) \} \}. \quad (9.24)$$

В обоих случаях $\bar{P}(t) = \text{inv } P(t) = -P(t)$.

На рис. 9.2 представлены схемы АВМ, воспроизводящие (9.23). Схема а) — структурная. Ей соответствуют три принци-

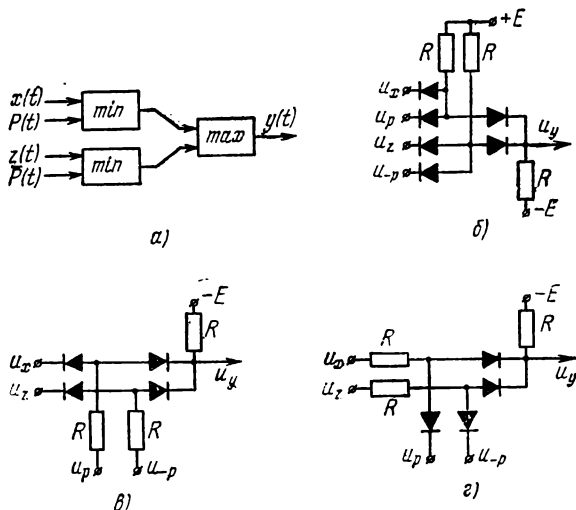


Рис. 9.2.

пиальные электрические схемы б), в), г). Схема б) реализует выражение

$$u_y = \max \{ \min (u_x, u_p, +E), \min (u_z, u_{-p}, +E), -E \} = \\ = \max \{ \min (u_x, u_p), \min (u_z, u_{-p}) \},$$

так как $+E = |-E| > |u_p| = |u_{-p}|$. Схема содержит шесть диодов и по числу диодов не является экономичной. Более экономичная схема показана на рис. 9.2, в). Она реализует выражение $u_y = \max \{ \min (u_x, \alpha u_p), \min (u_z, \alpha u_{-p}), -E \}$, где α — некоторый постоянный положительный коэффициент, меньший единицы и зависящий от величин сопротивлений резисторов, используемых в схеме. Практическая реализация последнего выражения требует масштабирования, чтобы сохранилось условие $|u_x| < |\alpha u_p|$. На рис. 9.2, г) показана схема, отличающаяся лишь тем, что в ней изменено положение входных резисторов

и диодов. Схема реализует выражение $u_v = \max\{\min\{\alpha u_x, u_p\}, \min\{\alpha \bar{u}_x, u_{-p}\}, -E\}$, которое также требует масштабирования.

Аналогично можно построить схемы, реализующие условный оператор присваивания по выражению (9.24).

2. Ключевые схемы. Ключевыми схемами (ключами) называют схемы, реализующие частный вид условного оператора присваивания

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } P(t) = p, \\ 0, & \text{если } P(t) = q. \end{cases}$$

Ключевая схема получается из схем рис. 9.2 заменой переменных $z(t)$ и u_z на константу 0. В практике встречается большое разнообразие ключевых схем. Рассмотрим некоторые из них. Из общих выражений условного оператора присваивания (9.23) и (9.24) при $z(t) = 0$ получаем отдельно для $x > 0$ и $x < 0$ следующие выражения:

$$y(t) = \begin{cases} \max\{0, \min\{x(t), P(t)\}\} & \text{для } x(t) > 0, \\ \min\{0, \max\{x(t), \bar{P}(t)\}\} & \text{для } x(t) < 0 \end{cases} \quad (9.25)$$

или после равносильных преобразований

$$y(t) = \begin{cases} \min\{x(t), \max\{0, P(t)\}\} & \text{для } x(t) > 0, \\ \max\{x(t), \min\{0, \bar{P}(t)\}\} & \text{для } x(t) < 0. \end{cases} \quad (9.26)$$

Воспользуемся сначала выражением (9.25). Соответствующая ему структурная схема показана на рис. 9.3, а). Верхняя

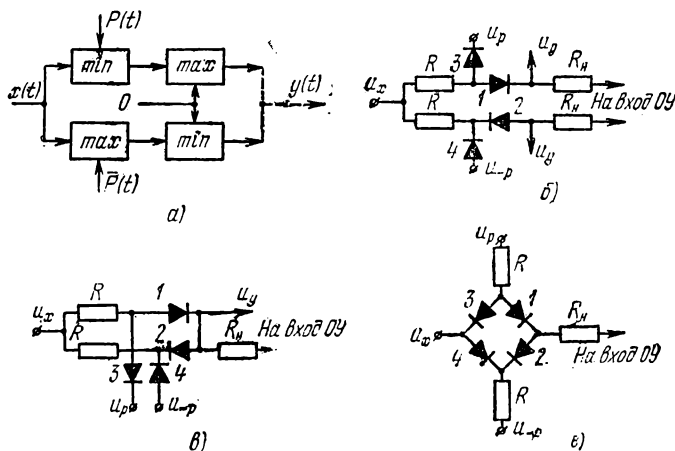


Рис. 9.3.

ветвь схемы реализует $y(t) = \max\{0, \min\{x(t), P(t)\}\}$, нижняя ветвь реализует $y(t) = \min\{0, \max\{x(t), \bar{P}(t)\}\}$. Выходы ветвей

объединены между собой пунктирной линией. Электрические эквиваленты каждой ветви структурной схемы рис. 9.3, а) показаны на рис. 9.3, б). Выходы электрических цепочек обозначены через u_p .

Роль резистора нагрузки R_n обычно играет входной резистор масштабного усилителя, к которому подключается ключевая схема. Напомним, что вход ОУ масштабного усилителя потенциально заземлен, поэтому именно через резистор R_n в схему выбора подается константа 0. Все одноименные клеммы обеих электрических цепочек можно объединить, в результате чего получаем схему так называемого последовательного ключа, показанного на рис. 9.3, в). Основанием к электрическому объединению одноименных клемм является тот факт, что переменная $x(t)$ не может быть одновременно и положительной, и отрицательной. Поэтому в рабочем состоянии находится всегда лишь одна ветвь. Наличие диодов 1, 2, 3, 4 и разнополярных напряжений u_p и u_{-p} исключает электрическое влияние цепочек друг

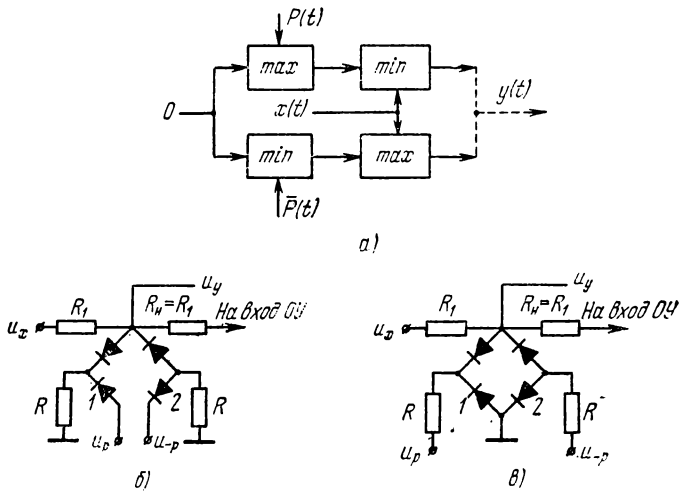


Рис. 9.4.

на друга. Последовательный ключ рис. 9.3, в) может быть преобразован в последовательный ключ мостового типа, показанный на рис. 9.3, г). В этой схеме по сравнению со схемой рис. 9.3, в) диоды 3 и 4 и резисторы R поменялись местами. Такая перемена радиоэлементов в силу коммутативности операций $\min \{x(t), P(t)\}$ и $\max \{x(t), \bar{P}(t)\}$ не меняет логики работы схемы.

Если теперь воспользоваться выражениями (9.26), то получим так называемый параллельный ключ. Структурная схема

его, как и схема последовательного ключа, состоит из двух ветвей, показанных на рис. 9.4, а). Выходы каждой ветви пунктирно соединены по причине того, что в рабочем состоянии пребывает всегда одна ветвь. Две электрические схемы, логически эквивалентные схеме рис. 9.4, а), показаны на рис. 9.4, б) и в). Различия электрических схем вызваны лишь способами подачи переменных u_p , u_{-p} и 0. В схеме рис. 9.4, б) u_p и u_{-p} подаются через диоды 1 и 2, а 0 — через резисторы, в схеме рис. 9.4, в) наоборот, u_p и u_{-p} — через резисторы, а 0 — через диоды 1 и 2.

§ 3. Некоторые применения булевой алгебры выбора

Здесь будет описана работа ряда схем АВМ, иллюстрирующих применение булевой алгебры выбора.

1. Переключательные цепи. 1) Переключательная цепь I. На рис. 9.5, а) изображена структурная схема переключательной цепи, на вход которой поступает переменная $y(t)$ и два предиката $P_1(t)$, $P_2(t)$ с инверсиями $\bar{P}_1(t)$, $\bar{P}_2(t)$. Покажем, что в зависимости от значений, принимаемых предикатами, переменная $y(t)$ появляется лишь на каком-либо одном выходе

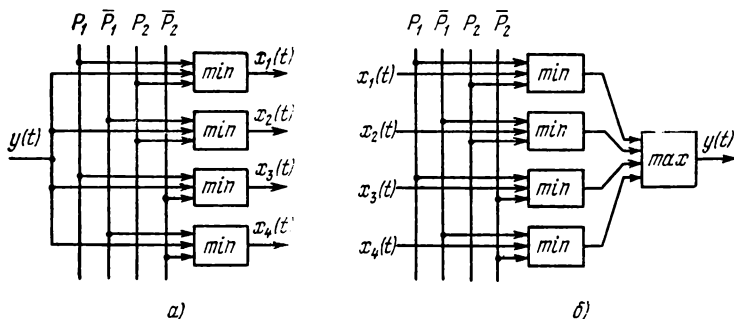


Рис. 9.5.

схемы. Действительно, прямо по схеме легко установить, что, например, переменная $x_1(t)$ выражается через условный оператор присваивания

$$x_1(t) = \begin{cases} y(t), & \text{если } P_1(t) = P_2(t) = p, \\ q & \text{в любом другом случае.} \end{cases}$$

Аналогично

$$x_2(t) = \begin{cases} y(t), & \text{если } \bar{P}_1(t) = P_2(t) = p, \\ q & \text{в любом другом случае} \end{cases}$$

■ т. д.

2) Переключательная цепь II. На рис. 9.5, б) дана структурная схема переключательной цепи, на вход которой поступает четыре произвольных переменных $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$ и два предиката $P_1(t)$, $P_2(t)$ с инверсиями $\bar{P}_1(t)$, $\bar{P}_2(t)$. На выходе схемы вырабатывается одна переменная $y(t)$, причем, как следует из рис. 9.5, б),

$$y(t) = \max \{ \min \{x_1(t), P_1(t), P_2(t)\}, \min \{x_2(t), \bar{P}_1(t), P_2(t)\}, \min \{x_3(t), P_1(t), \bar{P}_2(t)\}, \min \{x_4(t), \bar{P}_1, \bar{P}_2\} \}. \quad (9.27)$$

Последнее выражение представляет собой обобщение оператора присваивания (9.22). Действительно, в другой записи (9.27) будет выглядеть так:

$$y(t) = \begin{cases} x_1(t), & \text{если } P_1(t) = P_2(t) = p, \\ x_2(t), & \text{если } \bar{P}_1(t) = P_2(t) = p, \\ x_3(t), & \text{если } P_1(t) = \bar{P}_2(t) = p, \\ x_4(t), & \text{если } \bar{P}_1(t) = \bar{P}_2(t) = p. \end{cases}$$

Таким образом, переменной $y(t)$ в зависимости от значений, принимаемых предикатами $P_1(t)$, $P_2(t)$, присваиваются значения одной из четырех переменных $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$.

Сравнивая работу переключательных цепей I и II, можно заметить, что они решают противоположные задачи. Первая цепь одну входную переменную «пропускает» в одном из четырех возможных направлений. Вторая из четырех возможных переменных выделяет лишь одну из них, «пропуская» ее на выход схемы. Не представляет особого труда построить аналогичные переключательные цепи для большего числа переменных. Так, для построения переключательной цепи I на восемь возможных направлений достаточно к двум имеющимся предикатам $P_1(t)$ и $P_2(t)$ добавить еще один $P_3(t)$. Вообще, располагая n предикатами $P_1(t)$, $P_2(t)$, ..., $P_n(t)$ и их инверсиями, можно построить: а) переключательную цепь I на 2^n направлений; б) переключательную цепь II, осуществляющую выбор одной функции из 2^n функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_{2^n}(t)$.

2. Схемы запоминания. Схемы запоминания значений переменных строятся на базе интеграторов, входные переменные которых содержат специально подобранные предикаты. Запоминающим элементом в интеграторе является конденсатор обратной связи (см. рис. 2.10, а).

Рассмотрим в общем виде принцип построения схемы, способной осуществить запоминание значения переменной. Пусть необходимо запомнить значение переменной $x(t)$, соответствующее аргументу t^* .

Выявим сначала переменные, которые должны поступать на вход схемы запоминания. Таких переменных две. Первая — $x'(t)$, по ней интегратор вырабатывает саму функцию $x(t)$, значение которой подлежит хранению. Вторая переменная — предикат $P(t)$. С помощью него задается значение аргумента t^* :

$$P(t) = \begin{cases} p, & \text{если } t \leq t^*, \\ q, & \text{если } t > t^*. \end{cases}$$

Из предиката $P(t)$ и переменной $x'(t)$ формируется условный оператор присваивания

$$y(t) = \begin{cases} -x'(t), & \text{если } P(t) = p, \text{ т. е. если } t \leq t^*, \\ 0, & \text{если } P(t) = q, \text{ т. е. если } t > t^*. \end{cases} \quad (9.28)$$

Оператор (9.28) уже знаком нам. Его реализуют ключевые схемы, рассмотренные в § 2 гл. 9. Нетрудно заметить, что, если переменную $y(t)$ подать на вход интегратора, то, спустя момент времени t^* , на выходе интегратора будет константа, равная $x(t^*)$. Для доказательства этого достаточно проинтегрировать переменную $y(t)$. Интеграл от $y(t)$ с точностью до знака и начального значения $x(0) = x_0$ будет равен

$$\int_0^t y(t) dt = \int_0^{t^*} x'(t) dt + \int_{t^*}^t 0 \cdot dt = x(t^*)$$

для всех $t \geq t^*$.

Аппаратурно схема запоминания должна содержать два операционных блока: интегратор и ключ на его входе. Для ряда частных случаев эта общая схема иногда упрощается.

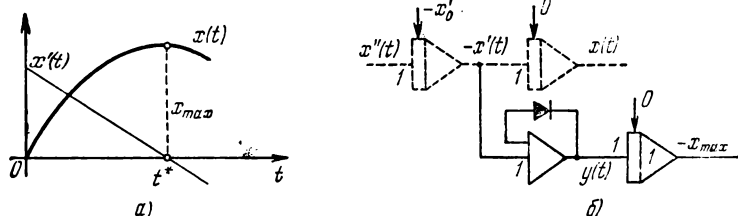


Рис. 9.6.

1) Запоминание величины локального экстремума. Пусть переменная $x(t)$ изменяется так, как показано на рис. 9.6, а). Переменная $x(t)$ вырабатывается цепочкой из двух последовательно включенных интеграторов. На рис. 9.6, б) цепочка изображена пунктиром. Необходимо построить схему, которая способна запоминать значение $x_{\max} = x(t^*)$. Такая схема показана на том же рис. 9.6, б) сплошными линиями.

Покажем, что на выходе интегратора I спустя момент времени t^* вырабатывается константа, равная $-x_{\max} = -x(t^*)$. Для этого запишем выражение переменной $y(t)$:

$$y(t) = \begin{cases} x'(t), & \text{если } x'(t) > 0, \\ 0, & \text{если } x'(t) \leq 0. \end{cases}$$

Если теперь ввести в рассмотрение предикат

$$\text{sgn } x'(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } x'(t) > 0, \\ 0, & \text{если } x'(t) \leq 0, \end{cases}$$

то переменную $y(t)$ можно записать иначе: $y(t) = x'(t) \text{sgn}[x'(t)]$. Интегратор вырабатывает интеграл от этой переменной:

$$\begin{aligned} -\int_0^t y(t) dt &= -\int_0^t x'(t) \text{sgn}[x'(t)] dt = \\ &= -\int_0^{t^*} x'(t) dt - \int_{t^*}^t 0 \cdot dt = -x(t^*) \end{aligned}$$

для всех $t \geq t^*$.

Мы рассмотрели схему для запоминания величины локального максимума. Аналогично строится схема и для запоминания значения локального минимума.

2) Запоминание момента времени свершения некоторого события. Будем под *событием* понимать факт перехода некоторой переменной через нуль. На рис. 9.7, а) изображена переменная $y(t)$, которая в момент времени t^* переходит через нуль. Необходимо запомнить величину t^* .

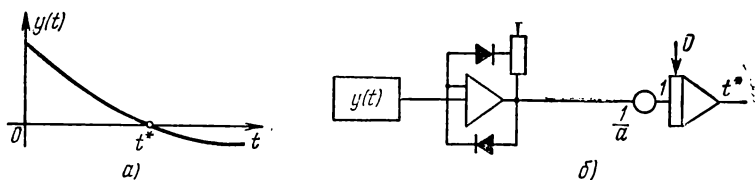


Рис. 9.7.

Структурная схема запоминания t^* представлена на рис. 9.7, б). Схема содержит блок, вырабатывающий $y(t)$, схему ограничения пределов, которая воспроизводит предикат $-a \text{sgn}[y(t)]$, и интегратор. Легко заметить, что выходной переменной интегратора после момента времени t^* будет константа t^* . Действительно,

$$\frac{1}{a} \int_0^t a \text{sgn}[y(t)] dt = \int_0^{t^*} 1 \cdot dt + \int_{t^*}^t 0 \cdot dt = t^*.$$

Только что рассмотренная схема может иметь одно важное обобщение. Рассмотрим его. Пусть некоторый исследуемый процесс характеризуется двумя переменными $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Пусть, далее, при наилучшем течении этого процесса переменных $x_1(t)$, $x_2(t)$ не должны попадать в некоторую область. Будем считать, например, что эта область ограничена окружностью $x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0$ так, как это показано на рис. 9.1. Предполагается, что процесс происходит не лучшим образом и иногда изображающая точка процесса заходит в область. Требуется определить суммарное время пребывания изображающей точки в области. Это время могло бы характеризовать качество течения процесса. Искомое время может быть получено с помощью схемы рис. 9.7, б) при условии, что переменная $y(t) = x_1^2(t) + x_2^2(t) - R^2$. Конечно, при этом на вход блока, воспроизводящего $y(t)$, необходимо подать переменные $x_1(t)$ и $x_2(t)$ от исследуемого процесса.

3. Воспроизведение функции «медиана». Медианой от трех переменных $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ называют функцию

$$\text{med}\{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\} =$$

$$= \begin{cases} x_1(t), & \text{если } x_2(t) \leq x_1(t) \leq x_3(t) \text{ или } x_3(t) \leq x_1(t) \leq x_2(t), \\ x_2(t), & \text{если } x_1(t) \leq x_2(t) \leq x_3(t) \text{ или } x_3(t) \leq x_2(t) \leq x_1(t), \\ x_3(t), & \text{если } x_1(t) \leq x_3(t) \leq x_2(t) \text{ или } x_2(t) \leq x_3(t) \leq x_1(t). \end{cases}$$

На рис. 9.8 показаны три переменные $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ и более жирно выделена медиана. Из рисунка следует, что для разных моментов времени в качестве медианы выступают разные переменные.

Аналогично тому, как мы определили медиану от трех переменных, можно определить медиану от пяти, семи и вообще от любого нечетного числа переменных. Однако мы ограничимся лишь тремя переменными.

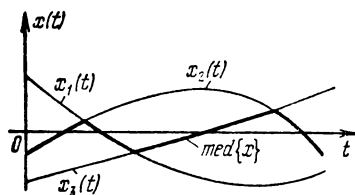


Рис. 9.8.

Функцию «медиана» можно использовать для выбора наиболее достоверного результата из ряда результатов, получаемых одновременно на АВМ. Пусть имеются три одинаковые схемы АВМ, которые одновременно воспроизводят решение одной и той же задачи с результатами $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$. В идеальном случае все эти три переменные должны совпасть. Однако из-за различных погрешностей совпадения не происходит. Считается, что наиболее достоверный результат дает медиана от них.

В идеальном случае все эти три переменные должны совпасть. Однако из-за различных погрешностей совпадения не происходит. Считается, что наиболее достоверный результат дает медиана от них.

Медиана достаточно просто выражается операциями выбора

$$\text{med} \{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\} = \\ = \max \{ \min \{x_1(t), x_2(t)\}, \min \{x_1(t), x_3(t)\}, \min \{x_2(t), x_3(t)\} \} \quad (9.29)$$

или

$$\text{med} \{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\} = \\ = \min \{ \max \{x_1(t), x_2(t)\}, \max \{x_1(t), x_3(t)\}, \max \{x_2(t), x_3(t)\} \}. \quad (9.30)$$

Медиану можно представить через операции сложения, вычитания и операции выбора

$$\text{med} \{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\} = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) - \\ - \max \{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\} - \min \{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\}.$$

4. Воспроизведение решений дифференциальных уравнений с переменной структурой. В качестве иллюстрации использования булевой алгебры выбора для программирования АВМ при воспроизведении решений дифференциальных уравнений с переменной структурой рассмотрим так называемую задачу с подвижной границей.

Такие задачи встречаются при изучении явлений переноса некоторой субстанции (массы, тепла, энергии) в какой-либо среде. В процессе переноса в среде возникают фазовые превращения, определяемые интенсивностью переноса. Первоначально однородная среда разделяется на зоны разного фазового состояния. Зоны отделяются поверхностями — границами. Границы не фиксированы в пространстве и с течением времени меняют свое положение. Простейшим примером этому может служить явление зимнего замерзания воды в водоемах. По вертикали водоем разбивается на две зоны: твердую фазу (лед) и жидкую фазу (еще не замерзшую воду). Толщина льда — величина переменная, зависящая от меняющейся температуры воздуха.

Механизм переноса субстанции в разных фазах несколько отличается. Поэтому процесс переноса в каждой фазе описывается разными дифференциальными уравнениями, структура которых меняется при переходе через границу.

Для простоты остановимся на одномерном переносе в двухфазовой среде. Предполагая, что дифференциальные уравнения в частных производных, описывающих перенос, аппроксимируются системой обыкновенных дифференциальных уравнений, имеем систему уравнений

$$x_j' = f_j(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n), \quad j = 1, 2, \dots, n, \text{ для } x_j \leq A$$

или

$$x_j' = P_j(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n), \quad j = 1, 2, \dots, n, \text{ для } x_j > A.$$

Здесь n — порядок системы обыкновенных уравнений; A — некоторая константа, фиксированная для данной среды и определяющая условия фазового превращения. Системы уравнений могут быть представлены и реализованы в АВМ с помощью условных операторов присваивания вида

$$x_j' = \max \{ \min \{f_j, P_j\}, \min \{\varphi_j, \bar{P}_j\} \},$$

где предикат

$$P_j(x_j) = \begin{cases} p, & \text{если } A - x_j \geq 0, \\ q, & \text{если } A - x_j < 0. \end{cases}$$

§ 4. Задачи

1. Доказать равносильности

$$1) \max \{ \min(x_1, x_2), \min(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \} = \min \{ \max(x_1, \bar{x}_2), \max(\bar{x}_1, x_2) \} = \\ = \max \{ \min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2) \} = \min \{ \max(x_1, x_2), \min(x_1, x_2) \}.$$

$$2) \max \{ \min(x_1, x_2), \min(x_1, x_3), \min(x_2, x_3) \} = \\ = \min \{ \max(x_1, x_2), \max(x_1, x_3), \max(x_2, x_3) \}.$$

2. Разработать структурную и электрическую схемы АВМ для присваивания переменной $x(t)$ знака переменной $s(t)$.

У к а з а н и е: для переменной $y(t) = |x(t)| \operatorname{sign}[s(t)]$ доказать равносильность представления

$$y(t) = \max \{ \min\{x(t), P(t)\}, \min\{-x(t), P(t)\}, \min\{x(t), -x(t), -P(t)\} \},$$

где предикат

$$P(t) = \begin{cases} p, & \text{если } s(t) > 0, \\ q, & \text{если } s(t) < 0. \end{cases}$$

3. Доказать, что знак произведения двух переменных x_1 и x_2 можно образовать с помощью выражения $\max \{ \min(z_1, z_2), \min(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \}$, где $z_1 = \operatorname{sign} x_1$, $z_2 = \operatorname{sign} x_2$. Построить структурные и электрические схемы.

4. Показать, что, если выходы схемы рис. 9.5, а) подать на одноименные входы схемы рис. 9.5, б), то получится схема, осуществляющая гождественное преобразование. Можно ли ожидать тождественности преобразования входных переменных, если выход схемы рис. 9.5, б) подать на одноименный вход схемы рис. 9.5, а)?

5. Построить структурные и электрические схемы для воспроизведения медианы по формулам (9.29) и (9.30).

6. Разработать структурную и электрическую схемы АВМ для воспроизведения функции $x(t)$ по заданным функциям $a(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$, если известно, что

$$b_1(t) = \max \{ a(t), x(t) \}, \\ b_2(t) = \min \{ a(t), x(t) \}.$$

У к а з а н и е: показать, что

$$x(t) = \max \{ \min\{b_1(t), P(t)\}, \min\{b_2(t), \bar{P}(t)\} \},$$

где предикат

$$P(t) = \begin{cases} p, & \text{если } b_1(t) - a(t) > 0, \\ q, & \text{если } b_1(t) - a(t) < 0. \end{cases}$$

7. Описать с помощью операций выбора работу схемы рис. 2.24, разрешающей неявное уравнение $F(x, y) = 0$ относительно переменной y . По полученным выражениям разработать бесконтактный эквивалент структурной схемы рис. 2.24.

**МЕТОД ГРАДИЕНТА И НЕКОТОРЫЕ СВЯЗАННЫЕ
С НИМ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА АВМ**

**§ 1. Дифференциальные уравнения наискорейшего
спуска и подъема**

Градиентные методы позволяют свести решения ряда математических задач к поиску локального экстремума функций многих переменных посредством решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта важная особенность градиентного метода делает его применение особо привлекательным при программировании аналоговых вычислительных машин.

1. Вывод дифференциальных уравнений. Пусть необходимо найти локальный экстремум функционала (функции многих переменных) $J(x)$, где $x = \{x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n\}$. В дальнейшем всюду предполагается, что в области определения функционала $J(x)$ локальный экстремум $x^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_j^*, \dots, x_n^*\}$ существует и единствен.

Поставленная задача будет решена, если мы укажем способ построения траектории $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_j(t), \dots, x_n(t)\}$, которая обеспечивает попадание в x^* изображающей точки, начавшей движение из произвольной точки $x(0) = x_0 = \{x_{10}, x_{20}, \dots, x_{j0}, \dots, x_{n0}\}$ области определения $J(x)$.

Для определенности рассмотрим минимизацию функционала $J(x)$, т. е. поиск его минимума. В области определения можно проложить бесконечное множество траекторий, соединяющих произвольно взятую точку x_0 с искомой x^* . Выберем из этих траекторий наилучшую и найдем соответствующее ей определяющее дифференциальное уравнение. Под наилучшей траекторией будем понимать ту, для которой dJ/dt — скорость убывания функционала — наибольшая. Выражение для скорости изменения функционала представляет собой скалярное произведение

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial J}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt}$$

вектора градиента

$$\text{grad } J(x) = \left\{ \frac{\partial J}{\partial x_1}, \frac{\partial J}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial J}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial J}{\partial x_n} \right\}$$

и вектора скорости изображающей точки

$$\frac{dx}{dt} = \left\{ \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_j}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right\}.$$

Всякое скалярное произведение принимает наибольшее абсолютное значение, когда сомножители коллинеарны. Это требует, чтобы соответствующие компоненты перемножаемых векторов были пропорциональны друг другу, т. е.

$$dx_j/dt = -\rho \cdot \partial J / \partial x_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

или в векторной форме

$$dx/dt = \rho \operatorname{grad} J(\mathbf{x}),$$

где ρ — произвольное положительное число, играющее роль коэффициента пропорциональности компонент. Если к последним выражениям присоединить в качестве начальных условий координаты начальной точки \mathbf{x}_0 , то получим искомые определяющие дифференциальные уравнения в форме задачи Коши в векторной записи

$$\frac{dx}{dt} = -\rho \operatorname{grad} J(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (10.1)$$

или в скалярной —

$$\frac{dx_j}{dt} = -\rho \frac{\partial J}{\partial x_j}, \quad x_j(0) = x_{j0}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (10.2)$$

Дифференциальные уравнения (10.1), (10.2), называют *дифференциальными уравнениями наискорейшего спуска*.

В тех случаях, когда отыскивается локальный максимум функционала $J(\mathbf{x})$, естественно потребовать максимального возрастания $J(\mathbf{x})$ на траектории, что приводит к получению *дифференциальных уравнений наискорейшего подъема*, отличающихся от дифференциальных уравнений (10.1) и (10.2) лишь знаком перед коэффициентом ρ :

$$\frac{dx}{dt} = \rho \operatorname{grad} J(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (10.3)$$

или

$$\frac{dx_j}{dt} = \rho \frac{\partial J}{\partial x_j}, \quad x_j(0) = x_{j0}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (10.4)$$

Геометрическая интерпретация минимизации функционала $J(x_1, x_2)$ от двух переменных показана на рис. 10.1. Функционалу $J(x_1, x_2)$ в трехмерном пространстве соответствует поверхность, изображенная на рисунке. На плоскости $x_1 O x_2$ показаны линии

уровня функционала $J(x_1, x_2) = \text{const}$ и траектория изображающей точки $x_1(t), x_2(t)$, которая, начинаясь из точки x_0 , приводит в точку x^* . Эта траектория для каждого момента времени имеет направление, ортогональное к линиям уровня.

Дифференциальные уравнения наискорейшего спуска (подъема) часто используют в несколько ином обобщенном виде:

$$\frac{dx}{dt} = \pm \rho(t) \text{grad } J(x); \quad x(0) = x_0 \quad (10.5)$$

или

$$\frac{dx}{dt} = \pm \rho(t, x) \text{grad } J(x); \quad x(0) = x_0. \quad (10.6)$$

В первом уравнении $\rho(t)$ — некоторая положительная функция, а во втором уравнении $\rho(t, x)$ — соответственно положительная функция, зависящая еще и от местоположения движущейся точки. В выборе этих функций допустим определенный произвол, что позволяет получить большое разнообразие дифференциальных уравнений спуска и отобрать из них те, которые обеспечивают желательный характер движения при достаточно простой реализации на АВМ.

Иногда вместо одной функции $\rho(t, x)$ вводят в уравнение (10.6) даже целую матрицу функций $[\rho(t, x)]$.

В простейшем случае это — диагональная матрица:

$$\begin{bmatrix} \rho_1(t, x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho_2(t, x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \rho_n(t, x) \end{bmatrix} \quad (10.7)$$

где все $\rho_j(t, x) > 0, j=1, 2, \dots, n$.

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = - [\rho(t, x)] \text{grad } J(x), \quad (10.8)$$

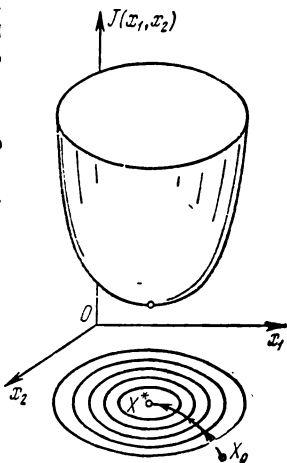


Рис. 10.1.

строго говоря, уже нельзя называть уравнением наискорейшего спуска из-за нарушения условия коллинеарности векторов $\frac{dx}{dt}$ и $\text{grad } J(x)$, вызванного введением матрицы $[\rho(t, x)]$.

Пример. Необходимо определить локальный минимум функционала

$$J(x_1, x_2) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0.$$

Очевидно, что этот функционал достигает минимума, равного нулю в точке $x_1 = x_2 = 0$. Однако будем игнорировать этот очевидный факт и начнем движение из некоторой точки x_{10}, x_{20} . Минимизацию функционала проведем двумя способами.

Первый способ. В соответствии с (10.2) дифференциальные уравнения наискорейшего спуска будут:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\rho \frac{\partial J}{\partial x_1} = -2\rho a_1 x_1, \quad x_1(0) = x_{10}, \quad (10.9)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\rho \frac{\partial J}{\partial x_2} = -2\rho a_2 x_2, \quad x_2(0) = x_{20}.$$

Решения этих уравнений

$$x_1(t) = x_{10} \exp(-2\rho a_1 t), \quad x_2(t) = x_{20} \exp(-2\rho a_2 t)$$

при $t \rightarrow \infty$ асимптотически стремятся к точке искомого экстремума $x_1 = x_2 = 0$.

Второй способ. Возьмем дифференциальные уравнения спуска в форме (10.8), для чего выберем

$$\rho_1(x_1, t) = (1 + x_1^2)(1 + t)\rho; \quad \rho_2(x_2, t) = (1 + x_2^2)(1 + t)\rho,$$

где ρ — некоторое положительное число. Дифференциальные уравнения спуска примут вид

$$\frac{dx_1}{dt} = -2\rho a_1 (1 + x_1^2)(1 + t)x_1, \quad x_1(0) = x_{10};$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -2\rho a_2 (1 + x_2^2)(1 + t)x_2, \quad x_2(0) = x_{20}.$$

Переменные в уравнениях легко разделяются, и решение системы будет:

$$x_1(t) = \sqrt{\frac{x_{10}^2 \exp\left[-4\rho a_1 \left(t + \frac{t^2}{2}\right)\right]}{1 + x_{10}^2 \left[1 - \exp\left[-4\rho a_1 \left(t + \frac{t^2}{2}\right)\right]\right]}},$$

$$x_2(t) = \sqrt{\frac{x_{20}^2 \exp\left[-4\rho a_2 \left(t + \frac{t^2}{2}\right)\right]}{1 + x_{20}^2 \left[1 - \exp\left[-4\rho a_2 \left(t + \frac{t^2}{2}\right)\right]\right}}}.$$

Видно, что решение асимптотически стремится к $x_1 = x_2 = 0$.

Сравнивая результаты обоих способов, замечаем, что дифференциальные уравнения во втором способе по сравнению с дифференциальными уравнениями (10.9) обеспечивают большую скорость процесса минимизации функционала за счет дополнительных сомножителей $(1 + x_1^2)$, $(1 + x_2^2)$ и $(1 + t)$.

2. Устойчивость уравнений спуска. В только что рассмотренном примере решения дифференциальных уравнений спуска оказались асимптотически устойчивыми. Это явилось следствием того, что при выводе уравнений спуска мы потребовали убывания функционала $J(\mathbf{x})$ вдоль траектории.

Устойчивость решений дифференциальных уравнений спуска (10.2) устанавливается в общем виде на основе так называемого второго метода Ляпунова. При этом не приходится прибегать к исследованию явного аналитического решения дифференциального уравнения. Метод Ляпунова применим к произвольным системам дифференциальных уравнений и может быть сформулирован в виде теоремы.

Если для дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = F(t, \mathbf{x})$$

существует дифференцируемая функция $V(\mathbf{x})$, называемая *функцией Ляпунова*, удовлетворяющая в окрестности начала координат условиям:

1) $V(\mathbf{x}) \geq 0$, причем $V(\mathbf{x}) = 0$ лишь при $\mathbf{x} = 0$, т. е. функция имеет строгий минимум в начале координат;

$$2) \frac{dV}{dt} = \text{grad } V \cdot F(t, \mathbf{x}) \leq 0,$$

то решение $\mathbf{x}(t) = 0$ устойчиво.

Если $\frac{dV}{dt} < 0$, то решение $\mathbf{x}(t) = 0$ устойчиво асимптотически.

Мы не будем здесь проводить строгое доказательство этой теоремы, а наметим лишь идею доказательства в случае асимптотической устойчивости.

Пусть $\mathbf{x}(0) \neq 0$. Тогда $V(\mathbf{x}) > 0$. Поскольку

$$\frac{dV}{dt} < 0, \quad V(\mathbf{x})$$

убывает по t и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Однако, если $V(\mathbf{x}) = 0$, то $\mathbf{x} = 0$. Следовательно, решение асимптотически устойчиво.

Для дифференциальных уравнений спуска роль функции Ляпунова $V(\mathbf{x})$ играет минимизируемый функционал $J(\mathbf{x})$. Для уравнения спуска (10.2) всегда имеет место неположительная скорость изменения функционала вдоль траектории при $t \rightarrow \infty$, так как

$$\frac{dJ}{dt} = -\rho(t) \sum_{j=1}^n \frac{\partial J}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = -\rho(t) \text{grad}^2 J \leq 0.$$

Аналогично для дифференциальных уравнений спуска более общего вида

$$\frac{dx}{dt} = -[\rho(t, x)] \text{grad}^2 J,$$

где $[\rho(t, x)]$ — диагональная матрица (10.7), имеем:

$$\frac{dJ}{dt} = - \sum_{j=1}^n \rho_j(t, x) \left(\frac{\partial J}{\partial x_j} \right)^2 \leq 0.$$

Часто локальные экстремумы отыскиваются для функционалов, которые зависят от времени $J(x, t)$. Такие функционалы называют *нестационарными* в отличие от уже рассмотренных *стационарных* функционалов вида $J(x)$.

При программировании АВМ приходится иметь дело именно с нестационарными функционалами. Зависимость функционала от времени геометрически проявляется в том, что поверхность, заданная им, с течением времени меняет свою форму. Это сопровождается изменением места положения локальных экстремумов. Локальные экстремумы перемещаются. Изображающая точка, соответствующая системе дифференциальных уравнений спуска (подъема), следует за перемещающимся экстремумом и достигает его в благоприятных случаях. Когда же изображающая точка отстает от экстремума, говорят, что процесс слежения за экстремумом *неустойчив*.

Найдем условия, при которых минимизируемый функционал $J(x, t)$ уменьшается ($dJ/dt < 0$) вдоль траектории, заданной уравнениями спуска (10.5)

$$\frac{dx_j}{dt} = -\rho(t) \frac{\partial J}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Полная производная $J(x, t)$ по t

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial J}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial J}{\partial t} \quad (10.10)$$

с учетом (10.5) будет равна

$$\frac{dJ}{dt} = -\rho(t) \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial J}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial J}{\partial t},$$

где $\sum_{j=1}^n (\partial J / \partial x_j)^2$ — положительная величина, которая обращается в нуль лишь в локальных экстремумах.

Функционал $J(x, t)$ будет уменьшаться вдоль траектории ($dJ/dt \leq 0$), если

$$\rho(t) \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial J}{\partial x_j} \right)^2 > \left| \frac{\partial J}{\partial t} \right|. \quad (10.11)$$

Однако это условие всегда нарушается, как только изображающая точка оказывается в окрестности экстремума, где величина $\sum_{j=1}^n (\partial J / \partial x_j)^2$ достаточно мала. Размер этой окрестности определяется функциями $\rho(t)$ и $\partial J / \partial t$ и, в частности, может асимптотически стремиться к нулю. В этом случае будем говорить, что процесс оптимизации функционала $J(x, t)$ *асимптотически устойчив*.

В качестве иллюстрации влияния $\rho(t)$ на устойчивость процесса оптимизации найдем вне связи с (10.11) условия, при которых будет устойчивым поиск минимума x_1^* , x_2^* функционала

$$J(x, t) = [x_1 - \varphi_1(t)]^2 + [x_2 - \varphi_2(t)]^2. \quad (10.12)$$

В отношении функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ предполагается дифференцируемость и возрастание их модулей: $|\varphi_1(t)|$, $|\varphi_2(t)|$.

Положение экстремума функционала (10.12) очевидно:

$$x_1^* = \varphi_1(t), \quad x_2^* = \varphi_2(t).$$

Убедимся, что при надлежащем выборе $\rho(t)$ решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = -\rho(t) \frac{\partial J}{\partial x_1} = -2\rho(t) [x_1 - \varphi_1(t)], \quad (10.13)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\rho(t) \frac{\partial J}{\partial x_2} = -2\rho(t) [x_2 - \varphi_2(t)] \quad (10.14)$$

будут асимптотически эквивалентны $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\varphi_1(t) - x_1(t)] = 0;$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\varphi_2(t) - x_2(t)] = 0.$$

Оба уравнения (10.13) и (10.14) одинаковы по форме, поэтому исследование решения проведем лишь для первого.

Введем новую переменную

$$\delta_1(t) = \varphi_1(t) - x_1(t).$$

Выражая $x_1(t)$ через $\varphi_1(t)$ и $\delta_1(t)$ и подставляя в (10.13), получаем

$$\delta'(t) + 2\rho(t) \delta(t) = \dot{\varphi}_1(t). \quad (10.15)$$

Условия асимптотической эквивалентности $x_1(t)$ и $\varphi_1(t)$ будут найдены, если

мы укажем способ выбора $\rho(t)$ в зависимости от $\varphi_1(t)$, при котором

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_1(t) = 0.$$

Выражение общего решения для уравнения (10.15) будет выглядеть так:

$$\delta_1(t) = \exp \left[-2 \int \rho(t) dt \right] \left\{ \int \varphi_1'(t) \exp \left[2 \int \rho(t) dt \right] dt + C \right\}.$$

Соответственно выражение для искомого предела может быть несколько упрощено:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int \varphi_1'(t) \exp \left[2 \int \rho(t) dt \right] dt}{\exp \left[2 \int \rho(t) dt \right]} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_1'(t)}{2\rho(t)}.$$

Последний предел равен нулю, лишь если порядок роста функции $\rho(t)$ выше порядка роста функции $\varphi_1'(t)$.

Таким образом, для (10.12) всегда можно по функции $\varphi_1(t)$ подобрать такую функцию $\rho(t)$, чтобы сходимость процесса была обеспечена. Например, $\rho(t)$ можно взять в виде $\rho(t) = t^4 \varphi_1'(t)$.

§ 2. Метод неявных функций

Ранее метод неявных функций был изложен рецептурно применительно к конечным уравнениям в § 9 гл. 2 и в § 4 гл. 5 применительно к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно старшей производной. Теперь имеется возможность обосновать его.

По сути своей метод неявных функций является градиентным методом. Он связан с минимизацией некоторого специального образом подобранного функционала посредством реализации решений дифференциальных уравнений спуска. Покажем это для конечных и дифференциальных уравнений.

1. Конечное уравнение. Требуется разрешить конечное уравнение

$$F(y, \mathbf{x}) = 0 \quad (10.16)$$

относительно переменной y при заданном векторе $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n\}$ и при условии, что $F'_y(y, \mathbf{x}) \neq 0$. Эта задача решается путем минимизации дифференцируемого положительного функционала

$$J(y) = \frac{1}{2} F^2(y, \mathbf{x}), \quad (10.17)$$

минимум которого совпадает с искомым корнем уравнения (10.16). В соответствии с (10.2) для (10.17) имеем дифференциальное уравнение спуска $\frac{dy}{dt} = -\rho(y, \mathbf{x}) F(y, \mathbf{x}) F'_y(y, \mathbf{x})$ с начальным условием $y(0) = y_0$. Свобода в выборе положительной функ-

ции $\rho(y, \mathbf{x})$ позволяет положить $\rho(y, \mathbf{x}) = K |F'_y(y, \mathbf{x})|$, где $K \geq 4 \cdot 10^4$ — коэффициент усиления ОУ. С учетом этого получаем уже знакомое по § 9 гл. 2 дифференциальное уравнение спуска (2.17) в форме задачи Коши:

$$\frac{dy}{dt} = -KF(y, \mathbf{x}) \operatorname{sign} [F'_y(y, \mathbf{x})], \quad y(0) = y_0. \quad (10.18)$$

В качестве начального условия в § 9 гл. 2 было выбрано $y_0 = 0$, что допустимо в связи с асимптотической устойчивостью решения уравнения (10.18). В самом деле, функционал (10.17) — дифференцируемый, положительный, скорость его изменения при $\mathbf{x} = \text{const}$ отрицательна:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= F(y, \mathbf{x}) F'_y(y, \mathbf{x}) \frac{dy}{dt} = \\ &= -KF^2(y, \mathbf{x}) F'_y(y, \mathbf{x}) \operatorname{sign} [F'_y(y, \mathbf{x})] = \\ &= -KF^2(y, \mathbf{x}) |F'_y(y, \mathbf{x})| < 0, \end{aligned}$$

и потому выполняются все условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Если же вектор $\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_j(t), \dots, x_n(t)\}$ меняется во времени, то минимизация функционала (10.17) будет при условии, что

$$KF^2(y, \mathbf{x}) |F'_y(y, \mathbf{x})| > \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial J}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} \right|.$$

2. Дифференциальное уравнение. Пусть требуется разрешить относительно старшей производной дифференциальное уравнение

$$F(x^{(n)}, \mathbf{x}, t) = 0, \quad (10.19)$$

заданное с начальным условием $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, где $\mathbf{x} = \{x^{(n-1)}, \dots, x^{(j)}, \dots, x\}$ и соответственно $\mathbf{x}_0 = \{x_0^{(n-1)}, \dots, x_0^{(j)}, \dots, x_0\}$. Как и ранее для конечного уравнения, определим $x^{(n)}$ путем минимизации функционала

$$J(x^{(n)}) = \frac{1}{2} F^2(x^{(n)}, \mathbf{x}, t) \quad (10.20)$$

посредством воспроизведения на АВМ решения дифференциального уравнения спуска $\frac{dx^{(n)}}{dt} = -\rho(x^{(n)}, \mathbf{x}) F(x^{(n)}, \mathbf{x}, t) F'_{x^{(n)}}(x^{(n)}, \mathbf{x}, t)$

с начальными условиями $x^{(n)}(0) = x_0^{(n)}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, где $x_0^{(n)}$ — некоторое произвольно взятое число. Взяв положительную функцию в виде $\rho(x^{(n)}, \mathbf{x}) = K |F'_{x^{(n)}}(x^{(n)}, \mathbf{x}, t)|$, получаем дифференциальное уравнение $n+1$ -го порядка, разрешенное относительно

старшей производной

$$x_1^{n+1} = -KF(x_1^{(n)}, \mathbf{x}_1, t) \operatorname{sign} [F'_{x^{(n)}}(x_1^{(n)}, \mathbf{x}_1, t)] \quad (10.21)$$

с начальными условиями $x_1^{(n)} = x_0^{(n)}$, $\mathbf{x}_1(0) = \mathbf{x}_0$.

Дифференциальное уравнение спуска (10.21) реализуется на АВМ вместо исходного уравнения. Уравнение (10.21) разрешено относительно старшей производной, но порядок его на единицу превышает порядок уравнения (10.19). Уравнения (10.19) и (10.21) не эквивалентны, поэтому их решения $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{x}_1(t)$ различны и разность $\delta(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_1(t)$ представляет собой ошибку, вызванную заменой уравнения (10.19) уравнением (10.21). В благоприятных случаях $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = 0$ и $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}(t)$ асимптотически

эквивалентны. Для этого необходима устойчивость решения дифференциального уравнения (10.21). Функционал (10.20) положителен, дифференцируем, однако нестационарен. Для устойчивой его минимизации в соответствии с теоремой Ляпунова должна быть отрицательна скорость его изменения

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial x_1^{(n)}} x_1^{(n+1)} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial J}{\partial x_1^{(j)}} x_1^{(j+1)} + \frac{\partial J}{\partial t} < 0,$$

или с учетом (10.21)

$$KF^2(x_1^{(n)}, \mathbf{x}_1, t) |F'_{x^{(n)}}(x_1^{(n)}, \mathbf{x}_1, t)| > \left| \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial J}{\partial x_1^{(j)}} x_1^{(j+1)} + \frac{\partial J}{\partial t} \right|. \quad (10.22)$$

Из (10.22) следует, что устойчивость (10.21) зависит от вида исходного дифференциального уравнения (10.19).

Минимизацию функционала (10.20) можно провести так, что полученное дифференциальное уравнение спуска будет одного порядка с исходным уравнением (10.19). Для этого надо минимизировать функционал не по переменной $x^{(n)}$, а по переменной $x^{(n-1)}$, что дает

$$x_2^{(n)} = -KF(x_2^{(n)}, \mathbf{x}_2, t) \operatorname{sign} [F'_{x^{(n-1)}}(x_2^{(n)}, \mathbf{x}_2, t)], \quad \mathbf{x}_2(0) = \mathbf{x}_0. \quad (10.23)$$

Условия устойчивости решения этого уравнения более жесткие, чем уравнения (10.21).

3. Анализ работы некоторых схем, разрешающих неявные уравнения. Представляет определенный интерес остановиться на анализе работы ряда схем АВМ, которые встречались ранее при реализации неявных выражений. Сначала остановимся на работе схем деления (см. § 9 гл. 2), а затем исследуем схему воспроизведения текущего среднего (см. § 4 гл. 5).

Для нахождения частного $z = x/y$, где x и y — постоянные, переходят к эквивалентному уравнению, неявному относительно z :

$$x - zy = 0.$$

Если воспользоваться функционалом (10.17), то в соответствии с (10.2) и (10.18) получаются следующие дифференциальные уравнения для нахождения частного:

$$\frac{dz}{dt} = \rho [x - zy] y, \quad z(0) = z_0; \tag{10.24}$$

$$\frac{dz}{dt} = \rho [x - zy] \text{sign } y, \quad z(0) = z_0. \tag{10.25}$$

Найдем решение уравнения (10.24). В нем переменные легко разделяются и

$$\frac{dz}{zy^2 - xy} = -\rho dt,$$

отсюда

$$z(t) = \frac{x}{y} + \left(z_0 - \frac{x}{y} \right) \exp(-\rho y^2 t). \tag{10.26}$$

Решение $z(t)$ асимптотически устойчиво вне зависимости от начального z_0 и знака переменной y . Структурная схема АВМ, соответствующая уравнению (10.24), содержит два блока перемножения (рис. 10.2, а). Правильное значение выходной величины $-z(t)$ при постоянных x и y появляется с некоторым запаздыванием во времени, численно равным примерно $4/(\rho y^2)$ с.

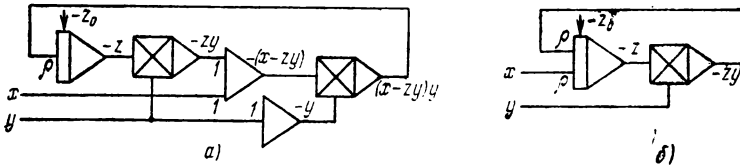


Рис. 10.2.

Найдем решение уравнения (10.25). Обычно для упрощения структурной схемы АВМ это уравнение используется лишь для переменной y одного знака. Пусть $y > 0$, тогда, разделяя переменные, получаем

$$\frac{dz}{(zy - x)} = -\rho dt,$$

отсюда

$$z(t) = \frac{x}{y} + \left(z_0 - \frac{x}{y} \right) \exp(-\rho y t).$$

Решение $z(t)$ асимптотически устойчиво вне зависимости от начального значения z_0 . При смене знака переменной y с плюса на минус решение оказывается неустойчивым, аргумент, стоящий под знаком экспоненты, становится положительным. Однако структурная схема для этого уравнения достаточно проста и требует для своей реализации лишь один блок перемножения (рис. 10.2, б)). Поэтому эта схема получила широкое распространение в практике решения задач на АВМ. Как и в предыдущей схеме деления, выходная величина несколько запаздывает на время, равное приблизительно $\frac{4}{\rho y}$ с.

Проанализируем теперь погрешности схемы АВМ, которая воспроизводит текущее среднее $m(t)$ функции $x(t)$ (§ 4 гл. 5), реализуя решение дифференциального уравнения

$$tm'(t) + m(t) - x(t) = 0, \quad (10.27)$$

которое неразрешено относительно старшей производной $m'(t)$. Имеется точное выражение текущего среднего, которое исчисляется как

$$m^*(t) = \frac{1}{t} \int_0^t x(t) dt.$$

Наличие точного выражения для текущего среднего позволяет легко выявить поведение погрешностей АВМ для различных типов усредняемых функций.

Остановимся на двух случаях приближенного воспроизведения решения уравнения (10.27) на основе метода наискорейшего спуска.

В первом случае в соответствии с (10.21) разрешим уравнение (10.27) относительно переменной $m'(t)$, что приводит к дифференциальному уравнению второго порядка

$$m_1''(t) + \rho [tm_1'(t) + m_1(t) - x(t)] = 0. \quad (10.28)$$

Здесь мы должны будем выявить наличие асимптотической эквивалентности между $m^*(t)$ и $m_1(t)$, т. е. другими словами, должны оценить предел функции $\delta(t)$ для различных типов усредняемых функций $x(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [m^*(t) - m_1(t)].$$

Во втором случае в соответствии с (10.23) разрешим уравнение (10.27) относительно $m(t)$, что приведет к дифференциальному уравнению первого порядка

$$m_2'(t) + \rho [tm_2'(t) + m_2(t) - x(t)] = 0. \quad (10.29)$$

Как и в первом случае, здесь потребуются выявить асимптотическую эквивалентность $m^*(t)$ и $m_2(t)$ путем анализа предела для погрешности $\varepsilon(t) = m^*(t) - m_2(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [m^*(t) - m_2(t)].$$

Вернемся к первому случаю.

Сначала найдем дифференциальное уравнение для $\delta(t)$. Подставив в уравнение (10.28) $m_1(t)$, выраженное через $\delta(t)$ и $x(t)$, получаем после преобразований линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\delta''(t) + \rho t \delta'(t) + \rho \delta(t) = -\frac{2}{t^3} \int_0^t x(t) dt + 2 \frac{x(t)}{t^2} - \frac{x'(t)}{t}. \quad (10.30)$$

В качестве усредняемых функций возьмем функции $x(t)$:

$$\alpha \cdot 1(t); \quad \alpha t; \quad \alpha t^2; \quad \alpha t^3, \quad (10.31)$$

отличающиеся друг от друга порядком роста. Здесь $\alpha \neq 0$ — произвольное число. Правая часть уравнения (10.30) для этих функций будет соответственно равна

$$0; \quad 0; \quad -\frac{2}{3} \alpha; \quad -\frac{3}{2} \alpha t.$$

Выявление асимптотической эквивалентности $m(t)$ и $m_1(t)$ при первых усредняемых функциях $\alpha \cdot 1(t)$ и αt сводится к отысканию и исследованию поведения при больших t общего решения однородного уравнения:

$$\delta''(t) + \rho t \delta'(t) + \rho(t) = 0. \quad (10.32)$$

Легко угадывается одно частное решение этого уравнения $\delta_1(t) = \exp(-\rho t^2/2)$. Общее решение однородного уравнения находится по известной формуле

$$\delta_0(t) = \delta_1(t) \left\{ \int \frac{C_1 \exp(-\rho \int t dt)}{\delta_1^2(t)} dt + C_2 \right\}, \quad (10.33)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

После подстановки $\delta_1(t)$ в выражение для общего решения имеем

$$\delta_0(t) = C_1 \frac{\int \exp(\rho t^2/2) dt}{\exp(\rho t^2/2)} + C_2 \exp\left(-\rho \frac{t^2}{2}\right).$$

Легко убеждаемся, что $m(t)$ и $m_1(t)$ асимптотически эквивалентны:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_0(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_1 \int \exp(\rho t^2/2) dt}{\exp(\rho t^2/2)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_1 \exp(\rho t^2/2)}{t \rho \exp(\rho t^2/2)} = 0.$$

Если усреднению подвергаются функции с порядком роста типа αt^2 , то вопрос об асимптотической эквивалентности $m_1(t)$ и $m(t)$ разрешается при исследовании решения неоднородного дифференциального уравнения

$$\delta''(t) + \rho t \cdot \delta'(t) + \rho \delta(t) = -2\alpha/3. \quad (10.34)$$

Легко угадывается одно частное решение этого уравнения $\delta_2(t) = -2\alpha/(3\rho)$. Общее решение неоднородного уравнения (10.34) будет

$$\delta(t) = -\frac{2\alpha}{3\rho} + \delta_0(t), \quad (10.35)$$

где $\delta_0(t)$ — общее решение (10.33) однородного уравнения (10.32). Из (10.35) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = -\frac{2\alpha}{3\rho}.$$

Это значит, что $m_1(t)$ и $m(t)$ асимптотически неэквивалентны. Воспроизведение функции $m_1(t)$ запаздывает по отношению к $m(t)$, что сопровождается установившейся погрешностью, численно равной $-(2\alpha)/(3\rho)$. Уничтожить эту погрешность нельзя, но ее можно сделать достаточно малой путем увеличения числа ρ . Для выявления асимптотической эквивалентности $m_1(t)$ и $m(t)$ при усреднении функций с порядком роста типа αt^3 следует рассмотреть при $t \rightarrow \infty$ решение неоднородного уравнения

$$\delta''(t) + \rho t \delta'(t) + \rho \delta(t) = -3\alpha t/2.$$

Общее решение его отыскивается просто. Оно равно

$$\delta(t) = -\frac{3\alpha}{4\rho} t + \delta_0(t), \quad (10.36)$$

где $\delta_0(t)$ — общее решение (10.33) однородного уравнения (10.32). Из (10.36) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = -\infty.$$

существования совокупности неявных функций предполагают отличие от нуля определителя матрицы Якоби системы (10.37):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В дальнейшем мы всюду будем считать, что это неравенство имеет место во всей области изменения переменных.

Если заданные переменные y_1, y_2, \dots, y_m представляют собой совокупность констант, то (10.37) превращается в обычную систему n уравнений с n неизвестными, которую можно записать в традиционной форме:

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned} \tag{10.39}$$

Однако довольно часто, особенно в ряде практических задач управления, y_1, y_2, \dots, y_m не являются постоянными числами, а представляют собой некоторые известные функции времени $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$, которые характеризуют поведение объекта управления. Эти функции поступают на АВМ системы автоматического управления. Задача АВМ здесь состоит в воспроизведении функций $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ и передаче их на органы управления объектом. Таким образом, АВМ, функционируя в системе автоматического управления, непрерывно отслеживает решение системы (10.37).

Далее мы в основном будем рассматривать системы типа (10.39). Однако изложенные ниже приемы решения (10.39) в ряде случаев без труда можно будет распространить и на более общую систему (10.37).

1. Решение систем уравнений общего вида. Как всегда, при программировании АВМ, решение исходной задачи стараются свести к решению некоторой эквивалентной системы дифференциальных уравнений. Применительно к (10.39) такой переход можно сделать достаточно разнообразными способами. Важно однако то, чтобы решения систем дифференциальных уравнений асимптотически стремились бы к решению системы (10.39). В противном же случае систему дифференциальных уравнений нельзя считать эквивалентной (10.39).

Наиболее эффективный прием решения (10.39) с точки зрения устойчивости получаемых эквивалентных дифференциальных уравнений базируется на градиентных методах минимизации функционала

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i^2(\mathbf{x}) \quad (10.40)$$

или

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n |F_i(\mathbf{x})|. \quad (10.41)$$

Соответствующие им дифференциальные уравнения наискорейшего спуска будут:

$$\frac{dx_j}{dt} = -\rho(t) \sum_{i=1}^n F_i(\mathbf{x}) \frac{\partial F_i}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (10.42)$$

$$\frac{dx_j}{dt} = -\rho(t) \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \operatorname{sign} F_i(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (10.43)$$

Выражения (10.42) и (10.43) часто оказываются сложными для аппаратной реализации, что вызвано большим числом слагаемых в выражении функционалов (10.40) и (10.41).

В следующем методе, по существу тоже градиентном, вместо одного сложного функционала типа (10.40) или (10.41) проводится независимая минимизация n простых функционалов

$$J_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} F_i^2(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10.44)$$

или

$$J_i(\mathbf{x}) = |F_i(\mathbf{x})|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10.45)$$

При этом функционал $J_j(\mathbf{x})$ минимизируется по переменной x_j , в результате чего получается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_j}{dt} = -\rho_j(t) \frac{\partial J_j}{\partial x_j} = -\rho_j(t) \frac{\partial F_j}{\partial x_j} F_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (10.46)$$

или

$$\frac{dx_j}{dt} = -\rho_j(t) \frac{\partial J_j}{\partial x_j} = -\rho_j(t) \frac{\partial F_j}{\partial x_j} \operatorname{sign} F_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (10.47)$$

Дифференциальные уравнения (10.46) и (10.47) гораздо легче реализовать на АВМ, чем (10.42) и (10.43). Однако, к сожалению, полученные уравнения могут иметь неустойчивые реше-

ния. Поясним причину этой неустойчивости. В процессе минимизации каждого i -го функционала производится разрешение i -го неявного уравнения $F_i(x) = 0$ системы (10.39) относительно переменной x_i . При этом полностью игнорируется влияние (чувствительность) всех остальных переменных x_j , $j \neq i$, на уравнение $F_i(x) = 0$. Возникающая в процессе минимизации ошибка $\varepsilon_i = F_i(x)$ может слабо изменяться при больших изменениях x_i и очень сильно меняться при малых изменениях некоторых из остальных переменных x_j , $j \neq i$. Это и приводит к появлению неустойчивых решений или к возникновению нежелательных «паразитных» колебаний. Более формально в этом можно убедиться, рассмотрев скорость изменения величины функционала $J_i(x)$. Как известно, устойчивость решений (10.46) или (10.47) предполагает, что $dJ_i/dt < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Оценим факторы, влияющие на знак скорости изменения функционала $J_i(x)$. В общем случае скорость можно записать выражением

$$\frac{dJ_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial J_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = - \sum_{j=1}^n \rho_j(t) \frac{\partial J_i}{\partial x_j} \frac{\partial J_j}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

которое запишем в несколько измененном виде:

$$\frac{dJ_i}{dt} = -\rho_i(t) \left(\frac{\partial J_i}{\partial x_i} \right)^2 - \sum_{j \neq i}^n \rho_j(t) \frac{\partial J_i}{\partial x_j} \frac{\partial J_j}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10.48)$$

Видно, что знак dJ_i/dt неопределен. Все зависит от членов, стоящих под знаком суммы в (10.48). Однако в частном случае, если система (10.39) оказалась такой, что

$$\rho_i(t) \left(\frac{\partial J_i}{\partial x_i} \right)^2 > \left| \sum_{j \neq i}^n \rho_j(t) \frac{\partial J_i}{\partial x_j} \frac{\partial J_j}{\partial x_j} \right|, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10.49)$$

то решения систем дифференциальных уравнений (10.46) и (10.47) асимптотически стремятся к решению (10.39). Выражения $\partial J_j/\partial x_j$ пропорциональны частным производным $\partial F_j/\partial x_j$. Поэтому, если есть возможность, то целесообразно j -е уравнение $F_j(x) = 0$ системы (10.39) разрешать относительно той переменной x_k , по которой частная производная $\partial F_j/\partial x_k$ — наибольшая. Так, скажем, первое уравнение $F_1(x) = 0$ будем разрешать относительно x_2 , если $\partial F_1/\partial x_2 > \partial F_1/\partial x_j$ для всех $j \neq 2$. Но даже при этом условии не может быть всегда гарантирован успех.

Существует еще один прием сведения решения системы (10.39) к решению системы дифференциальных уравнений. Поясним его смысл на простом примере. Пусть требуется решить уравнение $x = \exp(-x)$. Запишем его в неявной форме

$$-x + \exp(x) = 0 \quad (10.50)$$

и для получения решения на АВМ заменим его дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = -x + \exp(-x). \quad (10.51)$$

Основанием для перехода от (10.50) к (10.51) могут служить следующие соображения. Если решение дифференциального уравнения (10.51) при некотором произвольно взятом начальном значении $x(0) = x_0$ асимптотически стремится к некоторой постоянной величине x^* , то эта величина и есть искомый корень уравнения (10.50). Действительно, при этом производная dx/dt стремится к нулю, и следовательно, дифференциальное уравнение (10.51) превращается в конечное $-x + \exp(-x) = 0$. Главная неприятность этого метода в том, что априори в общем случае нет никакой уверенности в асимптотической устойчивости полученных таким образом дифференциальных уравнений. Действительно, даже в нашем простом примере достаточно было бы уравнение (10.50) записать в виде $x - \exp(-x) = 0$, как это сразу привело бы к дифференциальному уравнению $dx/dt = x - \exp(-x)$ с неустойчивым решением.

Применительно к системе (10.39) излагаемый способ приводит к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \pm F_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, n. \quad (10.52)$$

Мы сознательно взяли разные индексы у переменных $x_i(t)$ и уравнений $F_j(x) = 0$ с тем, чтобы подчеркнуть необходимость подбора этих индексов i и j , а также знаков правых частей уравнений (10.52). Подбор индексов и знаков правых частей осуществляется путем пробных воспроизведений решений системы (10.52) и отбора из них устойчивых решений. Количество возможных пробных вариантов факториально зависит от $2n$, поэтому число неудачных проб может быть значительным.

Последний метод можно существенно улучшить, если над системой (10.37) предварительно совершить некоторые преобразования. В ряде задач, связанных с автоматическим управлением, исходную систему (10.37) предварительно слева умножают на обратную матрицу Якоби этой системы, что приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = - \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^{-1} F(x, y(t)), \quad (10.53)$$

где $(\partial F / \partial x)$ — матрица Якоби системы (10.37).

В задачах автоматического слежения за меняющимися корнями системы (10.37) благодаря такому преобразованию векторное уравнение (10.53) по существу распадается на n скалярных

мы (10.39). Поэтому все изложенные ранее приемы перехода от (10.39) к системам эквивалентных дифференциальных уравнений применимы и к системе (10.56).

Но на первый взгляд может показаться, что для получения решения линейной системы алгебраических уравнений (10.56) вовсе и необязательно переходить к каким-то эквивалентным дифференциальным уравнениям. Может создаться впечатление, что для аппаратного решения (10.56) достаточно располагать лишь сумматорами и инверторами. Число сумматоров должно быть равно n — числу уравнений, а количество необходимых инверторов определяется числом отрицательных коэффициентов среди a_{ij} . При этом первый сумматор, реализуя первое уравнение $F_1(x) = 0$, разрешает его относительно переменной x_1 ; второй сумматор разрешает второе уравнение $F_2(x) = 0$ относительно переменной x_2 и т. д. К сожалению, оказывается, что практического значения описанный способ не имеет и в общем случае не приводит к получению желаемого результата. Причина здесь в том, что сумматоры АВМ воспроизводят сумму приближенно, и, как было отмечено в § 1 гл. 3, выходная переменная сумматора зависит от производной выходной переменной по времени. Поэтому описанный способ решения системы (10.56) по существу приводит к воспроизведению решений некоторой системы дифференциальных уравнений с неизвестными малыми параметрами. Эти решения часто оказываются неустойчивыми и характеризуются быстрыми изменениями машинных переменных. Проконтролировать устойчивость решений и, тем более, изменить параметры дифференциальных уравнений для достижения устойчивости не представляется возможным. Замена системы алгебраических уравнений системой эквивалентных дифференциальных уравнений существенно меняет дело. Реализация решений эквивалентной системы дифференциальных уравнений, конечно, не уничтожает малые параметры сумматоров, а лишь уменьшает их влияние и тем сильнее, чем медленнее воспроизводится на АВМ решение эквивалентной системы дифференциальных уравнений. Это подтверждается данными практики, а для ряда систем алгебраических уравнений удается доказать строго.

Рассмотрим подробнее основные методы перехода от линейной алгебраической системы (10.56) к системам эквивалентных дифференциальных уравнений. Самый универсальный метод основан на минимизации функционала

$$J(x) = \frac{1}{2} (Ax - b)^T (Ax - b). \quad (10.58)$$

Функционал (10.58) является векторной записью (10.40). Символ «т» означает знак транспонирования. Функционал имеет минимум, равный нулю. Этот минимум соответствует решению ис-

ходной системы уравнений. По выражению (10.58) легко находится дифференциальное уравнение спуска, эквивалентное системе (10.57):

$$dx/dt = -\rho \operatorname{grad} J(\mathbf{x}),$$

где

$$\operatorname{grad} J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [\mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) + (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})^T \mathbf{A}] = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}).$$

Теперь в окончательном виде получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\rho [\mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{b}]. \quad (10.59)$$

Это уравнение всегда имеет асимптотически устойчивое решение $\mathbf{x}(t)$. Некоторое неудобство при программировании АВМ доставляет необходимость умножения исходной системы (10.57) на транспонированную матрицу \mathbf{A}^T , что может сопровождаться значительными вычислениями.

Покоординатные градиентные методы, основанные на минимизации функционала $J_i(\mathbf{x}) = |F_i(\mathbf{x})|$ или $J_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} F_i^2(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \dots, n$, не требуют предварительных затрат вычислительного труда, но они могут привести к получению неустойчивой системы дифференциальных уравнений.

Остановимся сначала на решении системы уравнений (10.56) посредством минимизации функционалов вида $J_i(\mathbf{x}) = |F_i(\mathbf{x})|$, $i = 1, 2, \dots, n$. Этому соответствует система дифференциальных уравнений спуска

$$dx_j/dt = -\rho_j a_{jj} \operatorname{sign} F_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (10.60)$$

где $\rho_j > 0$ — произвольное число. В частности, если $\rho_j = \frac{1}{|a_{jj}|}$, то получаем удобную для реализации на АВМ систему дифференциальных уравнений

$$dx_j/dt = -\operatorname{sign} a_{jj} F_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (10.61)$$

Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений (10.60) и (10.61) определяется свойствами матрицы \mathbf{A} системы (10.56). Условия устойчивости достаточно просто установить, если найти отношения, которым должны удовлетворять элементы матрицы \mathbf{A} , для того чтобы скорость изменения всех минимизируемых функционалов все время оставалась бы отрицательной, т. е. $dJ_i/dt < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Скорость изменения функционала J_i

$$\frac{dJ_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \operatorname{sign} F_i(\mathbf{x}) \frac{dx_j}{dt} \quad (10.62)$$

с учетом уравнений (10.61) будет

$$dJ_i/dt = - \sum_{j=1}^n a_{ij} \operatorname{sign} [a_{ij} F_i(\mathbf{x}) F_j(\mathbf{x})]; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Вынесем за знак суммы единственное положительное определенное слагаемое $a_{ii} \operatorname{sign} [a_{ii} F_i^2(\mathbf{x})]$ и, потребовав отрицательности последнего выражения

$$- a_{ii} \operatorname{sign} [a_{ii} F_i^2(\mathbf{x})] - \sum_{j \neq i}^n a_{ij} \operatorname{sign} [a_{ij} F_j(\mathbf{x}) F_i(\mathbf{x})] < 0, \\ i = 1, 2, \dots, n,$$

получим достаточные условия асимптотической устойчивости решений системы (10.61):

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10.63)$$

Таким образом, если матрица системы (10.56) — диагонально доминирующая в смысле (10.63), то решения системы дифференциальных уравнений (10.61) асимптотически стремятся к решению исходной системы алгебраических уравнений (10.56).

Условия устойчивости решений системы дифференциальных уравнений (10.60) — несколько иные, но и здесь требуется доминирование диагональных членов матрицы. Убедимся в этом, для чего выражение (10.62) запишем с учетом (10.60), предполагая, что все $\rho_j = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$,

$$\frac{dJ_i}{dt} = - \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{jj} \operatorname{sign} [F_j(\mathbf{x}) F_i(\mathbf{x})], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Последние выражения будут всегда отрицательными, если

$$a_{ii}^2 > \sum_{j \neq i}^n |a_{ij} a_{jj}|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10.64)$$

Наиболее легко реализуемый на АВМ вариант системы дифференциальных уравнений дает минимизация функционалов $J_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} F_i^2(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \dots, n$. При этом получают дифференциальные уравнения спуска

$$dx_j/dt = -\rho_j a_{jj} F_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

которые при $\rho_j = \frac{\lambda_j}{|a_{jj}|}$, где все числа $\lambda_j > 0$, превращаются в систему дифференциальных уравнений

$$dx_j/dt = -\lambda_j F_j(x) \operatorname{sign} a_{jj}, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (10.65)$$

При надлежащем подборе чисел $\lambda_j, j=1, 2, \dots, n$, система (10.65) имеет устойчивые решения при условии, что матрица A — диагонально доминирующая в смысле (10.63). Доказательство этого факта мы опускаем. Обычно совокупность чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ подбирается в процессе пробных воспроизведений решений системы (10.65) на АВМ.

3. Определение комплексных корней алгебраических уравнений. Вещественные корни полиномов могут быть найдены с использованием программного прерывания АВМ по условию смены знака полинома при переходе через нуль (§ 6 гл. 8). Для определения комплексных корней предварительно переходят к эквивалентной системе двух уравнений с двумя неизвестными. Этими двумя неизвестными являются действительная и мнимая часть искомого корня.

Пусть необходимо найти корни полинома, коэффициенты которого — действительные числа:

$$\omega(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0, \quad (10.66)$$

а $z = x + iy = r \cdot e^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ — комплексное переменное, записанное в трех эквивалентных формах представления.

Если теперь подставить выражения z в (10.66) и сгруппировать действительную u и мнимую v части, то получим

$$\omega(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (10.67)$$

или

$$\omega(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta). \quad (10.68)$$

Любое комплексное переменное лишь тогда равно нулю, когда отдельно равны нулю его действительная и мнимая части. Поэтому для определения комплексных корней получаем из (10.67) и (10.68) систему из двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= 0, \\ v(x, y) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.69)$$

или

$$\left. \begin{aligned} u(r, \theta) &= 0, \\ v(r, \theta) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.70)$$

Какая из этих систем предпочтительней, определяется наличием составом операционных блоков АВМ. Для системы уравнений, записанной в декартовых координатах x и y , при реализации на

АВМ по методу градиента, необходимо значительное количество блоков перемножения. Для реализации уравнения, записанного в полярных координатах, необходимо располагать достаточным количеством блоков АВМ, воспроизводящих тригонометрические функции.

Системы уравнений (10.69) и (10.70) могут быть решены на АВМ не только по методу градиента, но и по методу отыскания общих точек кривых (§ 6 гл. 8).

§ 4. Определение экстремумов функционалов при ограничениях

Многие задачи практики, связанные с математическим программированием, с планированием и исследованием операций, с теорией автоматического управления, математически формулируются в виде задач на условный экстремум. В этих задачах отыскивается некоторый вектор $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, который должен соответствовать экстремуму функционала $J(\mathbf{x})$ и одновременно должен удовлетворять некоторым ограничениям. По форме математической записи ограничения разделяют на три типа.

К первому относятся *ограничения в виде равенств*

$$g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m < n. \quad (10.71)$$

Ко второму типу относятся *ограничения в виде неравенств*

$$g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (10.72)$$

Третий тип — смешанный: часть ограничений задано в виде равенств, а часть в виде неравенств.

Отыскание условного экстремума — значительно более сложная задача, чем определение безусловного экстремума. Поэтому обычно поиск условного экстремума сводят к отысканию безусловного экстремума путем эквивалентной замены исходного функционала вместе с ограничениями на некоторый специальным образом подобранный функционал, безусловный экстремум которого совпадает с условным экстремумом исходного функционала. В дальнейшем будем предполагать, что система заданных ограничений не противоречива, а заданный функционал имеет один экстремум.

1. Ограничения типа равенства. Можно предложить несколько вариантов определения экстремумов при ограничениях типа равенств.

Самый простой вариант рассмотрим на примере минимизации функционала $J(x_1, x_2)$ при одном ограничении $g(x_1, x_2) = 0$. Геометрически минимизация такого функционала соответствует

отысканию на кривой $g(x_1, x_2) = 0$ такой точки M , координаты которой давали бы наименьшее значение функционалу $J(x_1, x_2)$ по сравнению с другими точками кривой.

На рис. 10.3 показаны на плоскости x_1, x_2 линии уровня функционала $J(x_1, x_2)$ в виде системы кривых. Там же изображена кривая, заданная уравнением $g(x_1, x_2) = 0$. Искомая точка M условного экстремума является точкой касания кривой $g(x_1, x_2) = 0$ и одной из линий уровня. Эта линия на рисунке выделена более **жирно**. Найти точку M средствами АВМ не представляет особого труда. Действительно, воспроизведем на АВМ кривую $g(x_1, x_2) = 0$ от начальной точки M_0 путем реализации решений дифференциальных уравнений (§ 6 гл. 8)

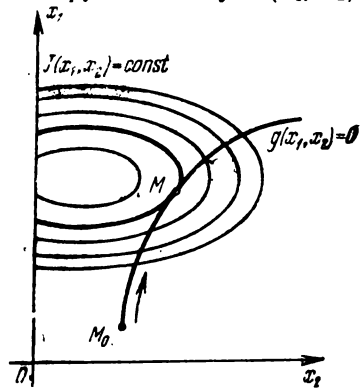


Рис. 10.3.

$$\frac{dx_1}{dt} = \omega \frac{\partial g}{\partial x_2}; \quad \frac{dx_2}{dt} = -\omega \frac{\partial g}{\partial x_1}; \quad x_1(0) = x_{10}; \quad x_2(0) = x_{20}.$$

где x_{10} , x_{20} — координаты начальной точки M_0 кривой $g(x_1, x_2) = 0$.

Одновременно с этим будем следить за скоростью изменения функционала $J(x_1, x_2)$, которая равна

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial J}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt}.$$

Сначала скорость изменения функционала отрицательна. Это значит, что, двигаясь по кривой $g(x_1, x_2) = 0$, изображающая точка приближается к искомой точке экстремума M . В момент времени t^* , когда скорость $\frac{dJ}{dt}$ переходит из положительной области в отрицательную, следует с помощью схемы программного останова прервать воспроизведение $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Полученные при этом значения $x_1(t^*)$ и $x_2(t^*)$ будут координатами искомой точки M . В самом деле, во-первых, точка с такими координатами принадлежит кривой $g(x_1, x_2) = 0$, во-вторых, численные значения координат обращают в минимум функционал $J(x_1, x_2)$.

Изложенный способ отыскания условного экстремума скорее представляет геометрическую иллюстрацию сущности задачи на условный экстремум, а не метод, который можно рекомендовать для использования. С ростом n размерности вектора x и с ростом числа m ограничений применимость метода ограничена условием $m+1 = n$. И даже в этом исключительном случае уже при

$m=2$ выражение скорости изменения функционала становится громоздким и сложным для реализации на АВМ.

Практическое применение нашли два других способа: *метод множителей Лагранжа* и *метод штрафных функций (метод Куранта)*.

1) **Метод множителей Лагранжа.** Лагранж показал, что условный локальный экстремум функционала $J(\mathbf{x})$ при ограничениях типа равенств (10.71) совпадает с безусловным локальным экстремумом функционала

$$I(\mathbf{x}, \lambda) = J(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x}), \quad (10.73)$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \lambda_m)$ — пока неизвестный вектор множителей Лагранжа.

Отыскание безусловного минимума функционала $I(\mathbf{x}, \lambda)$ не представляет труда и осуществляется в соответствии с градиентным методом, для чего воспроизводятся решения дифференциальных уравнений спуска

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= -\rho(t) \frac{\partial I}{\partial x_j} = -\rho(t) \frac{\partial J}{\partial x_j} - \rho(t) \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}, \\ \frac{d\lambda_i}{dt} &= -\rho(t) g_i(\mathbf{x}), \quad x_j(0) = x_{j0}, \quad \lambda_i(0) = \lambda_{i0}, \\ j &= 1, 2, \dots, n; \quad i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (10.74)$$

где λ_{i0} — некоторые произвольно взятые начальные значения множителей Лагранжа.

Уравнения наискорейшего спуска включают в себя два вида дифференциальных уравнений. Первые воспроизводят $x_j(t)$ и зависят от исходного минимизируемого функционала $J(\mathbf{x})$ и от заданной системы ограничений (10.71). Дифференциальные уравнения второго вида воспроизводят $\lambda_i(t)$ и зависят только от ограничений. Существенно, что когда $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет некоторому i -му ограничению ($g_i(\mathbf{x}) = 0$), то величина соответствующего множителя λ_i Лагранжа перестает изменяться во времени.

Таким образом, метод множителей Лагранжа позволяет свести задачу условного экстремума к решению задачи безусловно экстремума ценой повышения размерности исходной задачи на число наложенных ограничений.

2) **Метод штрафных функций.** Метод штрафных функций в отличие от точного метода множителей Лагранжа — приближенный метод. Как и в методе множителей Лагранжа, определение условного экстремума сводят к задаче на безуслов-

ный путем изменения минимизируемого функционала. Так, условный минимум функционала $J(\mathbf{x})$ при ограничениях типа равенств (10.71) совпадает с безусловным экстремумом функционала

$$I(\mathbf{x}) = \gamma J(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i^2(\mathbf{x}) \quad (10.75)$$

или

$$I(\mathbf{x}) = \gamma J(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i |g_i(\mathbf{x})|. \quad (10.76)$$

Здесь в обоих случаях $\lambda_i \gg \gamma > 0$ — некоторые заранее выбранные числа достаточно большой величины. Заметим, что в методе множителей Лагранжа при сходном строении функционала (10.73) величины λ_i были заранее неизвестны и подлежали определению.

Положительные слагаемые $\lambda_i g_i^2(\mathbf{x})$ и $\lambda_i |g_i(\mathbf{x})|$ называют *штрафными функциями*. Если ограничения (10.71), налагаемые на \mathbf{x} , выполнены, то $I(\mathbf{x}) = J(\mathbf{x})$. Если же ограничения не удовлетворены, то каждое слагаемое $g_i^2(\mathbf{x})$ или $|g_i(\mathbf{x})|$ в правых частях (10.75) и (10.76) характеризует величину отклонения \mathbf{x} от поверхности $g_i(\mathbf{x}) = 0$ ($i = 1, 2, \dots$). Чем больше будут числа λ_i , тем больше будет значение функционала $I(\mathbf{x})$, и следовательно, тем больше будет штраф за нарушение ограничения. Курант доказал, что при $\lambda_i \rightarrow \infty$ безусловный минимум функционала совпадает с точным значением условного экстремума, который можно получить, например, по методу множителей Лагранжа.

Отметим, что при отыскании условных максимумов по методу штрафных функций функционалы (10.75) и (10.76) должны быть заменены такими:

$$I(\mathbf{x}) = \gamma J(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i^2(\mathbf{x}), \quad I(\mathbf{x}) = \gamma J(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i |g_i(\mathbf{x})|,$$

где все $\lambda_i > 0$ и, как раньше, — большие числа. Функционалы отличаются от (10.75) и (10.76) только знаком перед членом суммарного штрафа за нарушения ограничений.

Метод штрафных функций нашел распространение главным образом из-за простоты своей аппаратной реализации. Легко заметить, что дифференциальные уравнения наискорейшего спуска для функционалов (10.75) и (10.76) соответственно будут:

$$\frac{dx_j}{dt} = -\rho(t) \gamma \frac{\partial J}{\partial x_j} - \rho(t) \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x}) \frac{\partial g_i}{\partial x_j};$$

$$\frac{dx_j}{dt} = -\rho(t) \gamma \frac{\partial J}{\partial x_j} - \rho(t) \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \text{sign}[g_i(\mathbf{x})],$$

где $\rho(t)$ — параметризующая функция, которую в дальнейшем будем считать равной единице.

На простом примере минимизации функционала $J(x_1, x_2)$ при одном ограничении $g(x_1, x_2) = 0$ покажем геометрическую сущность метода штрафных функций. Минимизации подвергается функционал

$$I(x_1, x_2) = \gamma J(x_1, x_2) + \frac{1}{2} \lambda g^2(x_1, x_2)$$

посредством воспроизведения решений дифференциальных уравнений спуска

$$\frac{dx_1}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial x_1} - \lambda g(x_1, x_2) \frac{\partial g}{\partial x_1}, \quad (10.77)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial x_2} - \lambda g(x_1, x_2) \frac{\partial g}{\partial x_2}. \quad (10.78)$$

На рис. 10.4 представлены на плоскости $x_1 \times x_2$ линии уровня функционала $J(x_1, x_2)$ в виде семейства кривых $J(x_1, x_2) = \text{const}$ и линии уровня функции $F(x_1, x_2) = g^2(x_1, x_2)$. Рельеф поверхности $F(x_1, x_2) = g^2(x_1, x_2) = g^2(x_1, x_2)$ напоминает овраг, дно которого $g(x_1, x_2) = 0$ показано на рисунке более жирной линией. Более жирной линией изображена и линия уровня функционала $J(x_1, x_2)$, которая касается кривой $g(x_1, x_2) = 0$ в точке относительного минимума M .

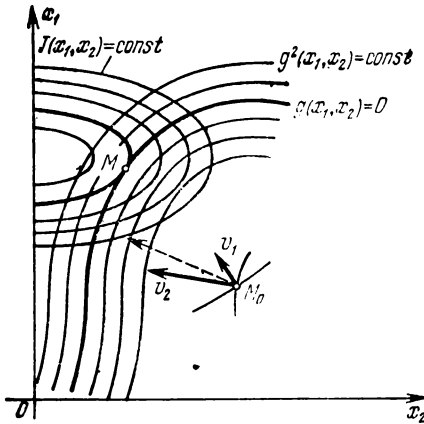


Рис. 10.4.

Дифференциальные уравнения спуска имеют простой геометрический смысл. В самом деле, в соответствии с (10.77) и (10.78) изображающая точка, находящаяся в произвольной точке M_0 плоскости $x_1 \times x_2$ имеет две составляющие скорости (за исключением кривой $g(x_1, x_2) = 0$). Первая составляющая v_1 обеспечивает движение в направлении, перпендикулярном к линиям уровня функционала $J(x_1, x_2)$, вторая v_2 — в направлении, перпендикулярном к линиям уровня функции $F(x_1, x_2) = g^2(x_1, x_2)$. При этом составляющая движения со скоростью v_2 доминирует над составляющей v_1 , что определяется большим значением числа $\lambda \gg \gamma$. Поэтому изображающая точка быстро движется в сторону дна оврага и медленно в сторону минимума функционала $J(x_1, x_2)$.

Достигнув дна, она смещается в сторону минимума $J(x_1, x_2)$ под действием v_1 и быстро возвращается на кривую $g(x_1, x_2) = 0$; вновь смещается в сторону минимума $J(x_1, x_2)$, вновь возвращается на кривую и т. д. Так возникает медленный дрейф изображающей точки в окрестности кривой $g(x_1, x_2) = 0$ к минимуму $J(x_1, x_2)$. В точке же условного экстремума M поступательное движение к минимуму $J(x_1, x_2)$ прекращается, так как обе составляющие v_1 и v_2 оказываются коллинеарными. В окрестности минимума остаются быстрые перемещения изображающей точки по склонам оврага.

2. Ограничения типа неравенств. Поиск экстремума функционала $J(\mathbf{x})$ при ограничениях типа неравенств обычно осуществляется по изложенному уже выше методу штрафных функций. Однако для этого предварительно систему ограничений, заданных в виде неравенств $g_i(\mathbf{x}) \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, m$), заменяют эквивалентными ограничениями в форме равенств путем введения некоторых вспомогательных функций. При программировании АВМ оказались удобны такие вспомогательные функции:

$$\psi_i(\mathbf{x}) = g_i(\mathbf{x}) \operatorname{sgn} g_i(\mathbf{x}), \quad i=1, 2, \dots, m, \quad (10.79)$$

где

$$\operatorname{sgn} g_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{при } g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \\ 1 & \text{при } g_i(\mathbf{x}) < 0. \end{cases}$$

Соответственно

$$\Psi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{при } g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \\ g_i(\mathbf{x}) & \text{при } g_i(\mathbf{x}) < 0, \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, m.$$

После изменения типа ограничений отыскание условного экстремума уже не представляет особого труда. Займемся максимизацией функционала $J(\mathbf{x})$ при ограничениях типа неравенств. По методу штрафных функций для этого следует отыскать безусловный максимум одного из функционалов

$$I(\mathbf{x}) = \gamma J(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i \psi_i^2(\mathbf{x}) \quad (10.80)$$

или

$$I(\mathbf{x}) = \gamma J(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i |\psi_i(\mathbf{x})|, \quad (10.81)$$

где все $\lambda_i \gg \gamma > 0$.

Легко заметить, что, когда вектор \mathbf{x} удовлетворяет заданной системе ограничений, то $I(\mathbf{x}) = \gamma J(\mathbf{x})$.

Остановимся сначала на функционале (10.80) и найдем соответствующие ему дифференциальные уравнения наискорейшего подъема. Предварительно выражение суммарного штрафа в (10.80) несколько упростим, и учитывая, что $[\operatorname{sgn} g_i(\mathbf{x})]^2 = \operatorname{sgn} g_i(\mathbf{x})$, запишем функционал (10.80) в новом виде:

$$I(\mathbf{x}) = \gamma J(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i^2(\mathbf{x}) \operatorname{sgn} g_i(\mathbf{x}). \quad (10.82)$$

Для (10.82) находятся дифференциальные уравнения наискорейшего подъема

$$\frac{dx_j}{dt} = \gamma \frac{\partial J}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x}) \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \operatorname{sgn} g_i(\mathbf{x}), \quad (10.83)$$

$$j = 1, 2, \dots, n.$$

Перейдем теперь к функционалу (10.81). Его выражение упрощается на основе очевидного тождества $|\psi_i(\mathbf{x})| = |g_i(\mathbf{x})| \operatorname{sgn} g_i(\mathbf{x})$:

$$I(\mathbf{x}) = \gamma J(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i |g_i(\mathbf{x})| \operatorname{sgn} g_i(\mathbf{x}), \quad (10.84)$$

отсюда дифференциальные уравнения наискорейшего подъема

$$\frac{dx_j}{dt} = \gamma \frac{\partial J}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \operatorname{sign} g_i(\mathbf{x}) \operatorname{sgn} g_i(\mathbf{x}),$$

$$j = 1, 2, \dots, n.$$

Заметив, что $\operatorname{sign} g_i(\mathbf{x}) \operatorname{sgn} g_i(\mathbf{x}) = -\operatorname{sgn} g_i(\mathbf{x})$, в окончательном виде имеем:

$$\frac{dx_j}{dt} = \gamma \frac{\partial J}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \operatorname{sgn} g_i(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (10.85)$$

Каждое дифференциальное уравнение типа (10.83) или (10.85) по существу объединяет в себе два уравнения. В самом деле, когда \mathbf{x} удовлетворяет ограничениям $g_i(\mathbf{x}) \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), то $\operatorname{sgn} g_i(\mathbf{x}) = 0$, и процесс поиска экстремума описывается уравнениями

$$\frac{dx_j}{dt} = \gamma \frac{\partial J}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (10.86)$$

В противном же случае, когда нарушено хотя бы одно из ограничений $g_i(\mathbf{x}) \geq 0$, процесс описывается уравнениями (10.83) или (10.85), так как соответствующее значение $\operatorname{sgn} g_i(\mathbf{x}) = 1$. Таким образом, система ограничений разбивает n -мерное век-

торное пространство x на две области. Одной области соответствует уравнение (10.86), а другой — уравнение (10.83) или (10.85). О процессах, которые описываются такими составными дифференциальными уравнениями, как известно, принято говорить, что они имеют переменную структуру.

На рис. 10.5 для $n=2$ и $m=1$ дана геометрическая интерпретация поиска условного максимума функционала $J(x_1, x_2)$ при одном ограничении $g(x_1, x_2) \geq 0$. Ограничение $g(x_1, x_2) \geq 0$ выделяет на плоскости $x_1 O x_2$ область допустимых значений переменных x_1, x_2 , для которых $g(x_1, x_2) > 0$ и $\text{sgn } g(x_1, x_2) = 0$. Для точек плоскости $x_1 O x_2$, не вошедших в эту область, справедливо обратное отношение $g(x_1, x_2) < 0$ и $\text{sgn } g(x_1, x_2) = 1$. Границей раздела служит кривая $g(x_1, x_2) = 0$. На рисунке в виде системы

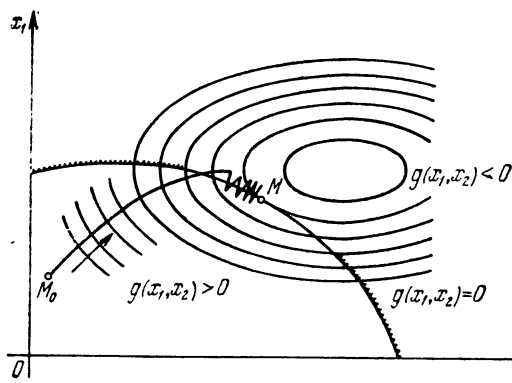


Рис. 10.5.

кривых показаны линии уровня функционала $J(x_1, x_2)$. Искомому условному максимуму M соответствует точка касания линии уровня кривой $g(x_1, x_2) = 0$. Траектория изображающей точки начинается из точки M_0 . Траектория описывается системой дифференциальных уравнений (10.86) до тех пор, пока не нарушено ограничение $g(x_1, x_2) \geq 0$. Как только траектория пересекла кривую $g(x_1, x_2) = 0$, процесс описывается уже уравнениями (10.83) или (10.85), которые содержат по две составляющие скорости. Одна направлена к максимуму функционала $J(x_1, x_2)$ с коэффициентом пропорциональности γ , другая, с коэффициентом пропорциональности λ — по нормали к кривой $g(x_1, x_2) = 0$ в сторону допустимой области. Движение в сторону допустимой области доминирует над движением к максимуму $J(x)$. Однако как только изображающая точка оказывается в допустимой области, остается лишь одна составляющая скорости, обеспечивающая движение к максимуму. Поэтому изображающая точка то пересекает границу $g(x_1, x_2) = 0$, то вновь возвращается в допусти-

мую область. В результате такого ступенчатого движения изображающей точки она как бы скользит по кривой $g(x_1, x_2) = 0$, приближаясь к искомой точке M . Это движение изображающей точки вдоль границы называют *скользящим режимом*. Для его возникновения необходимо, чтобы $\lambda \gg \gamma$.

3. Ограничения смешанного типа. Определение условного экстремума функционала при ограничениях смешанного типа удобно проводить по методу штрафных функций, для чего предварительно все ограничения типа неравенств заменяются эквивалентными ограничениями в форме равенств.

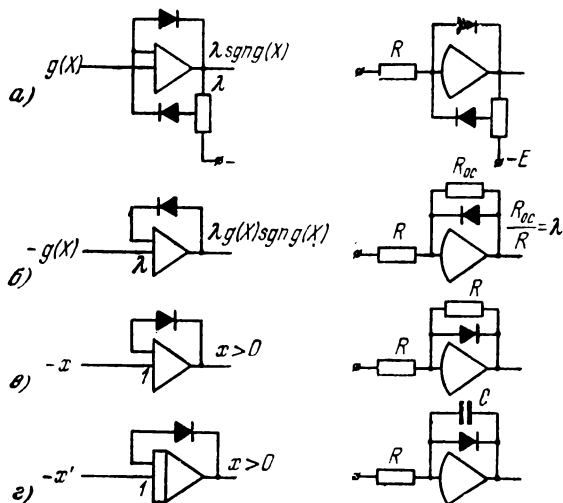


Рис. 10.6

Так, если максимизируется функционал от n переменных $J(x)$ при ограничениях $g_i(x) = 0$; $i = 1, 2, \dots, m$; $\varphi_k(x) \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, l$, то в соответствии с методом штрафных функций отыскивается безусловный экстремум функционала

$$I(x) = \gamma J(x) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i^2(x) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^l \mu_k \varphi_k^2(x) \operatorname{sgn} \varphi_k(x)$$

или

$$I(x) = \gamma J(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i |g_i(x)| - \sum_{k=1}^l \mu_k |\varphi_k(x)| \operatorname{sgn} \varphi_k(x),$$

где все $\lambda_i \gg \gamma > 0$, $\mu_k \gg \gamma$.

4. Замечания об аппаратной реализации метода штрафных функций. Некоторая громоздкость аналитических выражений

(10.83) и (10.85) может создать ложное представление о сложности их воспроизведения на АВМ. В действительности это не так. Зависимости

$$\lambda_i \operatorname{sgn} g_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{при } g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \\ \lambda_i & \text{при } g_i(\mathbf{x}) < 0, \end{cases}$$

$$\lambda_i g_i(\mathbf{x}) \operatorname{sgn} g_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{при } g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \\ \lambda_i g_i(\mathbf{x}) & \text{при } g_i(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}$$

достаточно просто осуществляются релейными диодными блоками, построенными на основе схемы ограничения пределов (§ 10 гл. 2). Это обстоятельство и определило выбор вспомогательных функций в виде (10.79). На рис. 10.6, а) и б) показаны соответствующие блоки и их электрические эквиваленты.

Особенно просто воспроизводятся ограничения типа $x_j \geq 0$ или $x_j \leq 0$. На рис. 10.6, в) и г) изображены два таких блока. Видно, что аппаратная реализация этих ограничений требует лишь включения дополнительного диода в обратную связь ОУ, который вырабатывает переменную x_j .

§ 5. Задачи

1. Подобрать функцию $\rho(t)$ так, чтобы решение дифференциального уравнения $z'(t) = \rho(t)y \operatorname{sign}[x(t) - yz(t)]$ асимптотически стремилось к функции $z_1(t) = x(t)/y$. Здесь $x(t)$ — возрастающая функция аргумента t , y — некоторая постоянная.

У к а з а н и е: исследовать условия убывания функционала

$$J(z, t) = |x(t) - yz(t)|.$$

2. Найти необходимые математические соотношения, чтобы по заданным функциям $y_1(t)$ и $y_2(t)$ АВМ воспроизводила бы решение $x_1(t)$ и $x_2(t)$ системы уравнений

$$\begin{aligned} x_1(t) \cos x_2(t) + y_1(t) &= 0, \\ x_1(t) \sin x_2(t) + y_2(t) &= 0. \end{aligned}$$

Обосновать целесообразность выбранного метода.

3. Показать, что для устойчивости решений дифференциальных уравнений спуска (10.47) при $\rho_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$, достаточно, чтобы матрица Якоби системы (10.37) была диагонально доминирующей в смысле

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right)^2 > \sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \frac{\partial F_j}{\partial x_j} \right|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

4. Показать, что для устойчивости дифференциальных уравнений спуска (10.47) при

$$\rho_j(t) = \frac{1}{|\partial F_j / \partial x_j|}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

достаточно, чтобы матрица Якоби системы (10.37) была диагонально доминирующей в смысле

$$\left| \frac{\partial F_l}{\partial x_l} \right| > \sum_{j \neq l} \left| \frac{\partial F_l}{\partial x_j} \right|, \quad l = 1, 2, \dots, n.$$

5. Запрограммировать АВМ МН-7 известными вам способами для получения решения системы

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 3 = 0,$$

$$3x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 1 = 0,$$

$$x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0.$$

6. Запрограммировать АВМ МН-7 для получения решения системы уравнений

$$x_2 + x_3 + x_4 + 1 = 0,$$

$$2x_1 + x_3 + 2x_4 - 1 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_4 + 1 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0.$$

Обосновать выбранный метод решения.

7. Запрограммировать АВМ МН-7 для получения корней алгебраического уравнения $x^3 + 6x + 2 = 0$.

8. Запрограммировать АВМ МН-7 для минимизации функционала

$$J(x) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_3^2$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 + x_3 - 2 \leq 0,$$

$$x_1 - x_2 - 2 \leq 0,$$

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3 \leq 0,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 1. Движение материальной точки, брошенной под углом к горизонту в сопротивляющейся среде

Материальная точка массой m брошена под углом α к горизонту (рис. 11.1). Начальная скорость точки v_0 (скорость бросания). Движение точки происходит в плоской сопротивляющейся среде. Сила сопротивления движению пропорциональна скорости движения $Q = -kmv$, где k — коэффициент пропорциональности. Требуется запрограммировать АВМ МН-7 для исследования движения точки.

1. Вывод дифференциальных уравнений движения. Движение точки происходит в соответствии с законом Ньютона:

$$X = m\ddot{x}, \quad Y = m\ddot{y}, \quad (11.1)$$

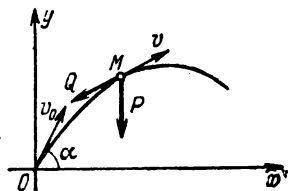


Рис. 11.1.

где X, Y — проекции всех сил, действующих на материальную точку, на оси координат; \ddot{x}, \ddot{y} — ускорения материальной точки вдоль осей координат.

В рассматриваемой задаче движение точки происходит под действием двух сил. Силы тяжести $P = mg$ и силы сопротивления среды $Q = -kmv$.

Для вывода дифференциальных уравнений движения материальной точки достаточно найти выражения проекции этих сил на оси координат.

Пусть в некоторый момент времени t материальная точка занимает положение M (см. рис. 11.1). Проекции сил P и Q на оси координат будут:

$$X_P = 0, \quad Y_P = -mg, \quad X_Q = -kmv \frac{dx}{ds}, \quad Y_Q = -kmv \frac{dy}{ds},$$

где dx/ds и dy/ds — косинусы углов между силой Q и осями координат; s — дуга траектории. Подставляя проекции сил в выражения (11.1) и учитывая, что $v = ds/dt$, получаем искомую

систему дифференциальных уравнений

$$\ddot{x} = -kx, \quad \ddot{y} = -ky - g \quad (11.2)$$

с начальными условиями

$$x(0) = y(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha; \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha.$$

2. Структурная схема. Структурная схема, соответствующая дифференциальным уравнениям (11.2), представлена на рис. 11.2. В схеме организован программный останов по условию $y=0$. Физически остановка машины в момент времени, когда $y=0$, соответствует расположению точки бросания и точки падения на одной высоте. Выходы интеграторов, вырабатывающих переменные $x(t)$ и $y(t)$, подаются на вертикальные и горизонтальные пластины электроннолучевого индикатора. На экране ИЭЛ отображается зависимость $y=\varphi(x)$, представляющая собой траекторию движения материальной точки.

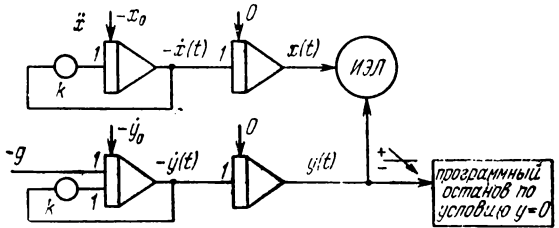


Рис. 11.2.

Контроль правильности работы АВМ при воспроизведении решений (11.2) удобно провести с помощью контрольного соотношения

$$kx + \dot{x} + ky + \dot{y} - z = 0,$$

где z — вспомогательная избыточная переменная. Дифференцируя контрольное соотношение по переменной t , имеем:

$$\dot{z} = k\dot{x} + \ddot{x} + k\dot{y} + \ddot{y}.$$

Отсюда с учетом (11.2) получаем необходимое определяющее дифференциальное уравнение для воспроизведения избыточной переменной z :

$$\dot{z} = -g, \quad z(0) = v_0(\cos \alpha + \sin \alpha).$$

3. Масштабирование зависимых переменных. На структурной схеме представлены в явном виде переменные $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $y(t)$, $\dot{y}(t)$. Этим переменным должны соответствовать в АВМ электрические напряжения $u_x = m_{x0}x$, $u_{\dot{x}} = m_{x1}\dot{x}$, $u_y = m_{y0}y$, $u_{\dot{y}} = m_{y1}\dot{y}$. Для расчета масштабов m_{x0} , m_{x1} , m_{y0} , m_{y1} необходимо располагать максимальными значениями переменных x_{\max} , \dot{x}_{\max} , y_{\max} , \dot{y}_{\max} .

Проведем оценку максимальных значений переменных по методу масштабных задач. Для этого перейдем от исходной задачи к масштабной задаче. Масштабная задача при сходном физическом содержании должна иметь простое аналитическое решение, позволяющее определить границы изменения переменных в исходной задаче. В качестве масштабной задачи рассмотрим движение точки, брошенной под углом к горизонту в пустоте. Сравнивая исходную и масштабную задачи, можно утверждать, что точка в пустоте будет лететь дальше, выше и с большей скоростью, чем в сопротивляющейся среде. Движению точки в пустоте соответствует значение $k=0$, и потому система дифференциальных уравнений (11.2) превращается в такую:

$$\ddot{x}=0, \quad \ddot{y}=-g; \\ x(0) = y(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha. \quad (11.3)$$

Уравнения (11.3) имеют аналитические решения:

$$x(t) = (v_0 \cos \alpha) t; \quad y(t) = (v_0 \sin \alpha) t - \frac{gt^2}{2},$$

отсюда следует:

1) при любом угле бросания α материальной точки величины проекций скорости точки на оси координат не могут быть больше v_0 , т. е. $\dot{x} \leq v_0$ и $\dot{y} \leq v_0$;

2) максимальная дальность полета точки соответствует углу бросания $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и равна $x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$;

3) максимальная высота полета точки соответствует углу бросания $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и равна $y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$.

Расчет масштабов выполнен в таблице 1.

Таблица 1

Переменная	Максимальное значение переменной	Величина масштаба	Обозначение масштаба
x	v_0^2/g	$100g/v_0^2$	m_{x0}
\dot{x}	v_0	$100/v_0$	m_{x1}
y	$v_0^2/(2g)$	$200g/v_0^2$	m_{y0}
\dot{y}	v_0	$100/v_0$	m_{y1}

4. Коммутационная схема. Коммутационная схема представлена на рис. 11.3, она ориентирована на АВМ МН-7. В отличие от структурной схемы в коммутационной схеме еще предусмотрена возможность организации программного останова по условию

$\dot{y} = 0$, что соответствует прерыванию процесса интегрирования системы уравнений (11.2) в момент времени, когда материальная

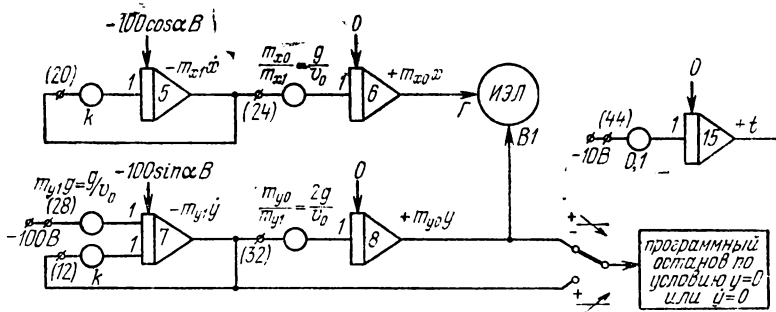


Рис. 11.3.

точка достигла наибольшей высоты. Кроме того, добавлен интегратор 15, который позволяет измерять время полета точки до максимальной высоты или до падения.

5. Задача. 1) Для $v_0 = 2g$ рассчитать масштабную таблицу и коэффициенты передачи интеграторов.

2) Установить угол бросания $\alpha = \pi/4$ и зарисовать картину движения материальной точки в плоскости xy , наблюдая процесс движения с помощью ИЭЛ. Эксперимент провести для значений k , равных 0; 0,05; 0,1; 0,20.

3) Для $k = 0,1$, изменяя угол бросания от $\alpha = 0$ до $\pi/2$ через $\pi/24$, измерить значения x_{\max} , y_{\max} и значения скоростей \dot{x} , \dot{y} в момент падения, определить t^* — время полета точки. По результатам построить графики

$$y_{\max} = \Phi_1(\alpha), \quad x_{\max} = \Phi_2(\alpha), \quad t^* = \Phi_3(\alpha).$$

§ 2. Встреча снаряда с подвижной целью

Пусть имеется некоторая подвижная цель, движение которой в плоскости xoy задано функциями $y_c(t)$, $x_c(t)$. Необходимо поразить эту цель снарядом из орудия, расположенного в точке с координатами $x=0$; $y=0$. Скорость снаряда при выходе из ствола орудия v_0 . При полете снаряд испытывает силу сопротивления воздуха, пропорциональную скорости его движения (рис. 11.4).

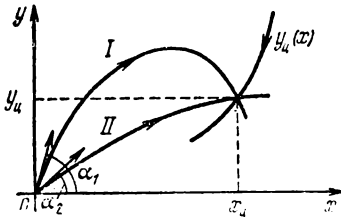


Рис. 11.4.

Рассматриваемая задача описывается той же системой (11.2) дифференциальных уравнений, как и задача § 1 гл. 11, с той

лишь разницей, что вместо начальных условий заданы краевые:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -k\dot{x}(t), & \ddot{y}(t) &= -k\dot{y}(t) - g, & (11.4) \\ x(0) &= y(0) = 0, & x(t^*) &= x_c(t^*), & y(t^*) &= y_c(t^*). \end{aligned}$$

Здесь t^* — некоторый неизвестный момент времени, в который происходит поражение цели снарядом; $x(t)$ и $y(t)$ — неизвестная пока траектория движения снаряда; $x_n(t)$ и $y_n(t)$ — заданная траектория движения цели.

Это необычная краевая задача. Ее математическая особенность в том, что заранее неизвестно значение независимого переменного t^* , при котором должны иметь место равенства $x(t^*) = x_n(t^*)$, $y(t^*) = y_n(t^*)$. Этим задача (11.4) отличается от других типов краевых задач.

Решить задачу встречи снаряда с подвижной целью — это значит указать такой угол наклона канала ствола орудия α^* (угол бросания), чтобы в некоторый момент времени t^* после выстрела были справедливы равенства $x(t^*) = x_n(t^*)$, $y(t^*) = y_n(t^*)$. Математически это эквивалентно редукции краевой задачи (11.4) к задаче Коши. В результате редукции, используя равенства $x(t^*) = x_n(t^*)$, $y(t^*) = y_n(t^*)$, должны быть найдены начальные условия $\dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha^*$ и $\dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha^*$, где α^* — искомый угол бросания. Оказывается, что в большинстве случаев существует не один, а два угла бросания, при которых происходит поражение цели. Двум углам соответствуют два типа траекторий снаряда.

На рис. 11.4 траектория первого типа отмечена цифрой I. Это так называемая навесная траектория. Цифрой II отмечена траектория второго типа, называемая настильной.

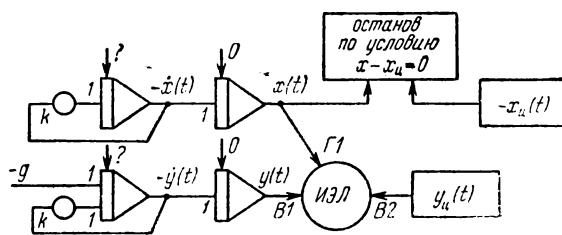


Рис. 11.5.

Структурная схема АВМ показана на рис. 11.5. Схема в основном повторяет структурную схему рис. 11.2. Отличие состоит в способе организации программного останова и в наличии дополнительных блоков, показанных прямоугольником, воспроизводящих траекторию подвижной цели $x_n(t)$ и $y_n(t)$. Кроме того, неизвестны начальные условия интеграторов, вырабатывающих переменные $-\dot{x}(t)$, $-\dot{y}(t)$.

На АВМ редукцию краевой задачи к задаче Коши удобно провести на основе метода проб. Изложим этот метод применительно к рассматриваемой задаче. Зададимся произвольным углом бросания α_1 и воспроизведем решение системы (11.4) на

АВМ. Углу α_1 на рис. 11.6, а) соответствует траектория снаряда $y_1(x)$. Кроме того, на рисунке показана траектория цели $y_n(x)$. Программный останов организован таким образом, что в момент t_1 , когда $x_1(t_1) = x_n(t_1)$, происходит прерывание процесса решения. Машина останавливается, значения $y_1(t_1)$ и $y_n(t_1)$ фиксируются. Вычисляется ошибка $\Delta y_1 = y_1(t_1) - y_n(t_1)$. Затем в качестве пробы выбирается другой угол бросания α_2 , отличный от α_1 . Этому углу на рис. 11.6, а) соответствует траектория снаряда, обозначенная $y_2(x)$. Как и ранее в момент времени t_2 , когда

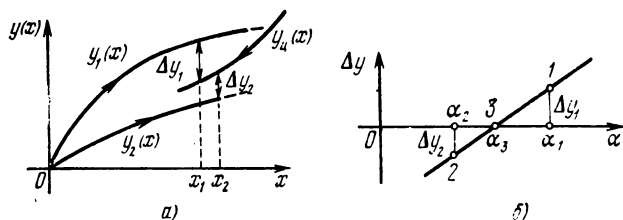


Рис. 11.6.

$x_2(t_2) = x_n(t_2)$, произойдет останов машины и можно будет определить ошибку $\Delta y_2 = y_2(t_2) - y_n(t_2)$, соответствующую углу бросания α_2 . Имея два значения α_1 и α_2 и соответствующие им ошибки Δy_1 и Δy_2 , можно графически уточнить значение α на основе построения, показанного на рис. 11.6, б). В координатах α и Δy наносятся точки 1 ($\alpha_1; \Delta y_1$) и 2 ($\alpha_2; \Delta y_2$), которые затем соединяются прямой. Пересечение этой прямой с осью α дает значение α_3 , которое, вообще говоря, ближе к искомому α^* , чем α_1 и α_2 . Для значения α_3 воспроизводится траектория $y_3(x)$. Находится ошибка Δy_3 . По точкам 2 ($\alpha_2; \Delta y_2$) и 3 ($\alpha_3; \Delta y_3$) находится новое значение угла α_4 . Эта процедура определения α повторяется до тех пор, пока ошибка $\Delta \alpha$ не окажется достаточно малой. При этом, конечно, совершенно не обязательно, чтобы $t_1 = t_2 = t_3$ и т. д., а также $x_1(t_1) = x_2(t_2) = x_3(t_3)$ и т. д.

Задачи. Воспроизвести на АВМ МН-7 встречу снаряда с подвижной целью по заданным ниже траекториям цели. Рассмотреть случаи поражения цели навесной и настильной стрельбой. Определить полетное время снаряда до встречи. Стрельба производится с начальной скоростью $v_0 = 2g$ в среде $k = 0,1$.

Траектории цели заданы уравнениями:

$$1) \quad y_n(t) = \frac{v_0^2}{5g} = \text{const}, \quad x_n(t) = \frac{v_0}{10} t;$$

$$2) \quad y_n(t) = \frac{v_0^2}{2g} \left(1 + 0,1 \sin \frac{v_0}{10} t \right), \quad x_n(t) = \frac{v_0^2}{2g} \left(+ 0,1 \sin \frac{v_0}{10} t \right);$$

$$3) \quad y_n(t) = \frac{v_0^2}{2g} \exp \left(- \frac{v_0}{10} t \right), \quad x_n(t) = \frac{v_0}{10} t.$$

З а м е ч а н и я. Для облегчения сравнения данных масштабы представления переменных $x_n(t)$, $y_n(t)$, $x(t)$, $y(t)$ следует взять одинаковыми. Аналогично выбираются масштабы для переменных $\dot{x}_n(t)$, $\dot{y}_n(t)$, $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$.

Если количества операционных блоков одной АВМ не хватает для воспроизведения задачи, то необходимо рассчитывать на совместную работу двух машин.

§ 3. Круговой математический маятник

Математическим маятником называют материальную точку, которая под действием силы тяжести движется по некоторой кривой. Кривую располагают в плоскости симметрично относительно некоторой вертикальной прямой. В том случае, когда кривой является окружность, принято называть математический маятник круговым.

Практически круговой маятник можно представить себе в виде трубочки, согнутой в кольцо, в которой движется без трения тяжелый шарик, или в виде материальной точки массой m , которая связана с неподвижной точкой O невесомым твердым стержнем длины l (называемой длиной маятника). Если не принимать во внимание трение в точке подвеса и сопротивление воздуха, то единственной действующей силой будет сила тяжести со слагающей $-mg \sin \theta$ в направлении возрастания угла θ (рис. 11.7), где N — реакция стержня.

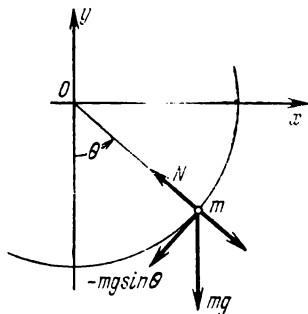


Рис. 11.7.

1. Приведение дифференциального уравнения движения к виду, удобному для реализации на АВМ. В соответствии с законом Ньютона имеем уравнение

$$m\dot{v} = -mg \sin \theta,$$

где v — скорость материальной точки, которая для кругового движения равна $v = l\dot{\theta}$. С учетом этого и после сокращения на m получаем искомое дифференциальное уравнение

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega^2 \sin \theta(t), \quad (11.5)$$

где $\omega^2 = \frac{g}{l}$.

Аналитическое решение нелинейного уравнения (11.5) удается найти только в квадратурах, получивших особое название «эллиптические интегралы первого рода». Ради простоты при аналитическом исследовании часто ограничиваются рассмотрени-

ем лишь малых колебаний маятника, точнее, бесконечно малых колебаний, когда справедливо равенство $\sin \theta \approx \theta$ и уравнение (11.5) превращается в линейное

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega^2 \theta(t), \quad (11.6)$$

которое имеет аналитическое решение.

На АВМ можно с одинаковым успехом моделировать колебательные процессы, описываемые как уравнением (11.5), так и уравнением (11.6). Для удобства визуального наблюдения картины протекания колебательного процесса на плоскости xoy выразим координаты материальной точки через угол отклонения стержня. Из рис. 11.7 видно, что

$$x = l \sin \theta(t), \quad y = -l \cos \theta(t). \quad (11.7)$$

Продифференцировав каждое из выражений (11.7), имеем

$$\dot{x}(t) = -y(t)\dot{\theta}(t), \quad \dot{y}(t) = x(t)\dot{\theta}(t).$$

Легко заметить, что правая часть дифференциального уравнения (11.5) пропорциональна $x(t)$. Учитывая это, получаем систему нелинейных дифференциальных уравнений, для реализации которых на АВМ достаточно иметь два блока перемножения и не требуется функциональный преобразователь $\sin \theta$:

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{\omega^2}{l}x, \quad \dot{x}(t) = -y(t)\dot{\theta}(t), \quad \dot{y}(t) = x(t)\dot{\theta}(t). \quad (11.8)$$

В качестве начальных условий примем

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0, \quad x(0) = l \sin \theta_0, \quad y(0) = -l \cos \theta_0.$$

Это значит, что маятник, предварительно отклоненный на угол θ_0 , в момент времени $t=0$ начал свободно двигаться без начальной скорости под действием силы тяжести.

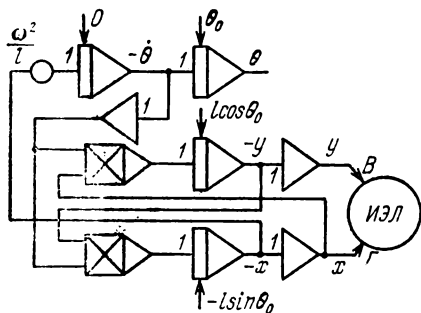


Рис. 11.8.

2. Структурная схема АВМ. Структурная схема представлена на рис. 11.8. Схема составлена по уравнениям (11.8) и содержит четыре интегратора, два блока перемножения и три инвертора. Переменные $y(t)$ и $x(t)$ выведены на вертикальные и горизонтальные пластины ИЭЛ. Поэтому на экране ИЭЛ воспроизводится

кривая $y = \varphi(x)$ — траектория движения материальной точки. Конечно, эта кривая — дуга окружности радиуса l .

3. Расчет масштабов. Масштабированию должны подвергаться переменные $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $x(t)$, $y(t)$, для чего необходимо

располагать максимальными значениями этих переменных. Из геометрических соображений ясно, что $x_{\max} = y_{\max} = l$, а $\theta_{\max} = \theta_0$. Для определения максимального значения $\theta(t)$ обратимся к методу масштабных задач. В нашем случае масштабной задачей

Т а б л и ц а 1

Переменная	Максимальное значение переменной	Величина масштаба	Обозначение масштаба
θ	θ_0	$100/\theta_0$	$m_{\theta 0}$
$\dot{\theta}$	$\theta_0 \omega$	$100/\theta_0 \omega$	$m_{\theta 1}$
x	l	$100/l$	m_x
y	l	$100/l$	m_y

может служить колебательный процесс, описываемый уравнением (11.6). Из аналитического решения этой задачи $\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t$ находим максимальное значение $\dot{\theta}_{\max}$, равное $\theta_0 \omega$. Весь расчет масштабов выполнен в масштабной таблице 1.

4. Коммутационная схема. Коммутационная схема, ориентированная на АВМ МН-7, представлена на рис. 11.9. Она по своей

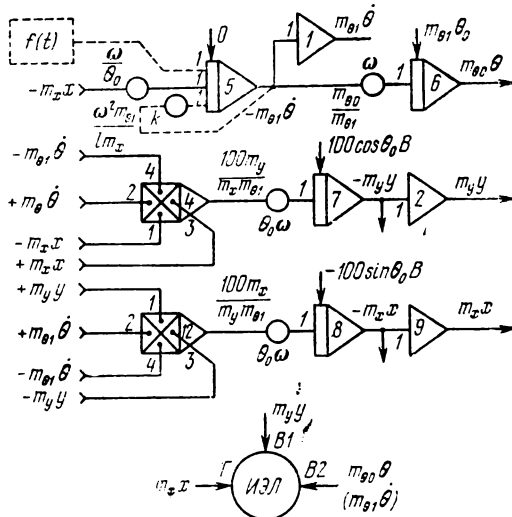


Рис. 11.9.

топологии отличается от структурной схемы. Эти отличия вызваны, во-первых, особенностями включения блоков перемножения машины МН-7 на входы которых необходимо подавать не только сами перемножаемые переменные, но и их инверсии; во-вторых,

в коммутационной схеме введены дополнительный блок, воспроизводящий функцию $f(t)$, и обратная связь с выхода интегратора B на его вход через потенциометр с коэффициентом передачи k . Это сделано для того, чтобы иметь возможность исследовать на АВМ более общий процесс колебаний математического маятника, который описывается дифференциальным уравнением Дуффинга

$$\ddot{\theta}(t) = -k\dot{\theta}(t) - \omega^2 \sin \theta(t) + f(t). \quad (11.9)$$

Это уравнение описывает движение математического маятника под действием некоторой вынуждающей силы $P = ml\ddot{f}(t)$ в сопротивляющейся среде, которая препятствует движению с силой, прямо пропорциональной скорости движения. Величине k соответствует коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и скоростью движения. Коммутационная схема предусматривает воспроизведение на экране ИЭЛ, кроме траектории материальной точки, одной из функций $\dot{\theta} = \varphi_1(x)$ или $\theta = \varphi_2(x)$.

5. Задачи. 1) Для $\omega = 1$ и $k = 0$ определить с помощью АВМ МН-7 период колебаний маятника как функцию от θ_0 , т. е. $T = \psi(\theta_0)$. Пояснить физическую сущность полученных результатов. (Здесь рекомендуется организовать автоматическое прерывание решения по условию $x(t) = 0$ или $\theta(t) = 0$ и с помощью отдельного интегратора построить измеритель времени.)

2) Для $\theta_0 = \pi/2$, $\omega = 1$ и при различных $k = 0; 0,1; 1; 2$ воспроизвести движение материальной точки на экране ИЭЛ, определить время движения материальной точки от $\theta_0 = \pi/2$ до $\theta = 0$. Пояснить физический смысл полученных результатов для различных k .

3) Для $\theta_0 = 0$, $\omega = 1$ для значений $k = 0; 1$ воспроизвести движение материальной точки при различных вынуждающих функциях $f(t) = 20 \sin 10t; 5 \sin t; 10 \exp(-0,5t) \sin t; 50 \exp(-0,5t)$; 50. (Функция $f(t)$ задана в машинных переменных.) Пояснить физическую сущность полученных результатов для различных $f(t)$ и k .

4) Воспроизвести и исследовать на АВМ МН-7 явление параметрического резонанса в нелинейной колебательной системе, описываемой дифференциальным уравнением *)

$$\ddot{\theta}(t) = -k\dot{\theta}(t) - \omega^2 (1 + \varepsilon \cos t) \sin \theta(t), \quad \dot{\theta}(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \varepsilon < 1.$$

К такой колебательной системе можно отнести математический маятник (рис. 11.7), который имеет переменную длину, а движение его происходит в сопротивляющейся среде. Примером маятника переменной длины могут служить качели: человек, раскачиваясь на качелях, периодически меняет положение своего центра тяжести.

При выполнении исследования рекомендуется за основу взять коммутационную схему рис. 11.9 и дополнить ее в той части, которая необходима для воспроизведения функции $1 + \varepsilon \cos t$. Далее, положив $k = 0$, $\varepsilon = 0,05$ и плавно изменяя ω в интервале $0 < \omega < 2$, зафиксировать те значения $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и т. д., при которых имеет место параметрический резонанс. В окрестности ω_1 для $k = 0; 0,2; 0,4$ в координатах ω и ε построить область $G(\omega, \varepsilon)$ существования параметрического резонанса для $0 \leq \varepsilon \leq 0,5$.

Пояснить смысл полученных результатов.

*) Уравнение представляет собой обобщение известного уравнения Матье,

§ 4. Движение материальной точки по кеплерову эллипсу

По кеплерову эллипсу движутся планеты вокруг Солнца, которое находится в одном из фокусов эллипса. Аналогичную траекторию имеют заряженные частицы в электрическом кулоновском поле точечного заряда противоположного знака. В дальнейшем будем называть объект, движущийся по эллипсу, материальной точкой, а материальным телом — объект, ее притягивающий.

Геометрическая интерпретация движения представлена на рис. 11.10. Траектория материальной точки E — эллипс с полуосями a и b , $a > b$. В фокусе F_1 расположено массивное материальное тело M , притягивающее материальную точку с силой, пропорциональной $1/r^2$, где r — радиус-вектор, соединяющий F_1 с E . Две крайние точки эллипса A и P в астрономии называют соответственно афелий и перигелий.

Положение точки E на траектории можно выразить в разных системах координат — в полярных с координатами $r(t)$, $\varphi(t)$ или в прямоугольных с координатами $x(t)$, $y(t)$. При воспроизведении движения на АВМ прямоугольные координаты предпочтительней из-за удобства наблюдения траектории $y=f(x)$ на электронном индикаторе.

В соответствии с законами Кеплера движение материальной точки по траектории описывается системой конечных уравнений

$$\frac{\pi}{T}t = u(t) - e \sin u(t), \quad x(t) = a \cos u(t), \quad y(t) = b \sin u(t), \quad (11.10)$$

где T — период обращения E относительно M , t — время, $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ — эксцентриситет эллипса. Первое уравнение системы (11.10) представляет собой знаменитое уравнение Кеплера. Два последних уравнения задают в параметрической форме эллипс. Роль параметра $u(t)$ играет угол между направлениями на афелий и на точку K . Точка K лежит на окружности, построенной на большой оси эллипса как на диаметре. Для любого момента времени t между точкой K и точкой E существует однозначное соответствие, которое выражается в том, что абсциссы точек K и E одинаковы (OL). Угол $u(t)$ в астрономии называют эксцентрической аномалией, в отличие от угла $\varphi(t)$, который называют истинной аномалией.

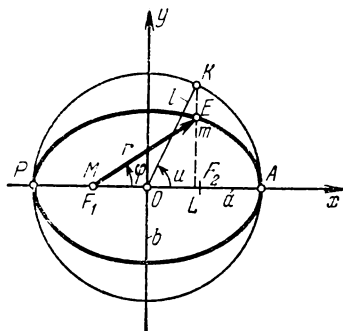


Рис. 11.10.

1. **Приведение уравнений (11.10) в форму, удобную для реализации на АВМ.** Перейдем от конечных уравнений (11.10) к дифференциальным, для чего продифференцируем каждое уравнение из (11.10) один раз по аргументу t :

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{T} &= \dot{u}(t) - \varepsilon \cos u(t) \dot{u}(t), \\ \dot{x}(t) &= -a \sin u(t) \dot{u}(t), \\ \dot{y}(t) &= b \cos u(t) \dot{u}(t).\end{aligned}\quad (11.11)$$

Сравнивая уравнения (11.11) между собой и с исходной системой (11.10), получаем систему определяющих дифференциальных уравнений для функций $u(t)$, $x(t)$, $y(t)$:

$$\dot{u}(t) = \frac{\varepsilon}{b} \dot{y}(t) + \frac{\pi}{T}, \quad \dot{x}(t) = -\frac{a}{b} y(t) \dot{u}(t), \quad \dot{y}(t) = \frac{b}{a} x(t) \dot{u}(t). \quad (11.12)$$

Система (11.12) допускает упрощение за счет исключения переменной $\dot{u}(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\frac{a\varepsilon}{b^2} y(t) \dot{y}(t) - \frac{\pi a}{Tb} y(t), \\ \dot{y}(t) &= \frac{\varepsilon}{a} x(t) \dot{y}(t) + \frac{\pi b}{Ta} x(t).\end{aligned}\quad (11.13)$$

Будем считать, что в начальный момент времени $t=0$ местоположение точки E совпадает с афелием. Это соответствует начальным условиям системы (11.13): $x(0) = a$, $y(0) = 0$.

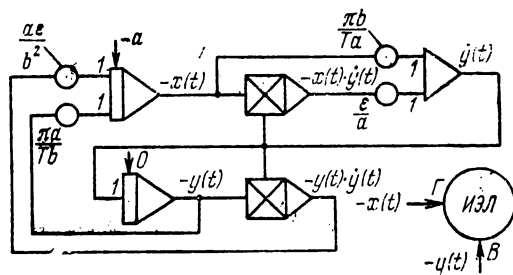


Рис. 11.11.

2. **Структурная схема.** Структурная схема АВМ, соответствующая уравнениям (11.13), представлена на рис. 11.11. Схема достаточно проста и не требует большого числа операционных блоков. На экране ИЭЛ воспроизводится траектория движения точки.

3. Расчет масштабов. Масштабировать необходимо переменные $x(t)$, $y(t)$, $\dot{y}(t)$, так как эти переменные явно представлены на структурной схеме рис. 11.11.

Для удобства сравнения данных масштабы переменных $x(t)$ и $y(t)$ следует взять одинаковыми, исходя из максимального значения $x(t)$, равного a . Максимальное значение $\dot{y}(t)$ достигается в момент времени, когда материальная точка E проходит через перигелий. Из системы (11.13) получаем, что максимальное значение $\dot{y}(t)$ не больше $\frac{\pi b}{T(1-\epsilon)}$. Расчет масштабов выполнен в таблице:

Т а б л и ц а

Переменная	Максимальное значение переменной	Масштаб	Обозначение масштаба
x, y	a	$\frac{100}{a}$	m_0
\dot{y}	$\frac{\pi b}{T(1-\epsilon)}$	$\frac{100T(1-\epsilon)}{\pi b}$	m_1

4. Коммутационная схема. Коммутационная схема, ориентированная на АВМ МН-7, показана на рис. 11.12. Топология схемы несколько отличается от структурной схемы рис. 11.11, что

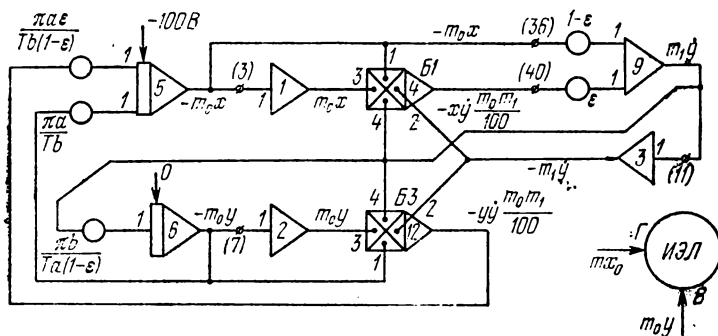


Рис. 11.12.

вызвано особенностями включения блоков перемножения машины МН-7. Коэффициенты передачи всех операционных блоков выражаются через параметры траектории: a , b , T .

5. Задача. Воспроизвести на АВМ МН-7 движение материальной точки по кеплерову эллипсу с параметрами $a=1$; $b=0,5$; $T=4л$, заданными в некоторой согласованной системе единиц измерения. Отснять значения переменных $x(t)$ и $y(t)$. Построить графики $x(t)$, $y(t)$ и $y=f(x)$. По полученным численным результатам показать справедливость теоремы площадей.

ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ

§ 1. Дифференциальные уравнения движения

Из механики известно дифференциальное уравнение движения материальной точки.

Движение описывается обыкновенным дифференциальным уравнением Лагранжа вида

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (12.1)$$

Здесь L — функция Лагранжа; q — обобщенная координата; \dot{q} — обобщенная скорость точки; t — время.

Функция Лагранжа выражается через кинетическую T и потенциальную энергию U материальной точки $L = T - U$. Пусть положение точки определяется декартовой координатой x . Тогда функцию Лагранжа можно записать в виде $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$.

Если провести необходимые преобразования над функцией L , то в соответствии с (12.1) получим

$$m\ddot{x} = - \frac{\partial U(x)}{\partial x}. \quad (12.2)$$

При аналитическом исследовании обычно не пользуются уравнением (12.2), а рассматривают уравнение более низкого порядка, получаемое на основе закона сохранения энергии $\frac{m(\dot{x})^2}{2} + U(x) = E$, где E — полная энергия.

Это дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}. \quad (12.3)$$

Решение его выражается квадратурой

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + C,$$

где C — некоторая постоянная.

Поскольку кинетическая энергия — величина положительная, движение возможно лишь в тех областях x , где $E > U(x)$.

При исследовании обычно представляет интерес выявить характер движения материальной точки в зависимости от вида функции $U(x)$ и величины энергии E .

На рис. 12.1 показана функция $U(x)$ и горизонтальная прямая, соответствующая энергии E . Движение возможно лишь в областях $x_1 < x < x_2$ и $x > x_3$. В точках x_1, x_2, x_3 скорость движения частицы равна нулю. Эти точки называют точками остановки. Движение на интервале $x_1 < x < x_2$ ограничено. Такое движение называют *финитным*. Если область движения не ограничена или ограничена с одной стороны, движение называют *инфинитным*. Одномерное финитное движение — колебательное движение, период которого T есть функция энергии

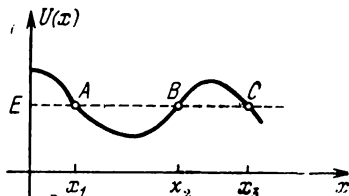


Рис. 12.1.

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \quad (12.4)$$

Дифференциальное уравнение (12.1) предполагает, что движение происходит в пустоте или что эффектом действия среды можно пренебречь. Задача о движении в некоторой среде гораздо сложнее.

Во многих важных практических случаях эффект действия сопротивляющейся среды можно учитывать в виде некоторой силы трения, зависящей для данной среды от скорости движения. При этом дифференциальное уравнение (12.1) представляется в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = - \frac{\partial F(\dot{q})}{\partial \dot{q}}$$

или

$$m\ddot{x} = - \frac{\partial U(x)}{\partial x} - \frac{\partial F(\dot{x})}{\partial \dot{x}}, \quad (12.5)$$

где $F(\dot{q})$, $F(\dot{x})$ — диссипативные функции, $\frac{\partial F(\dot{q})}{\partial \dot{q}}$ или $\frac{\partial F(\dot{x})}{\partial \dot{x}}$ — сила трения.

Диссипативная функция имеет важный физический смысл — ее определяет интенсивность рассеивания энергии в системе.

§ 2. Структурные схемы АВМ, воспроизводящие одномерное движение

Для исследования одномерного движения в различных потенциальных полях $U(x)$ на АВМ можно воспользоваться дифференциальным уравнением движения как в виде (12.2), так и в виде (12.3).

Уравнение (12.3) имеет неявную форму задания относительно производной $\dot{x}(t)$, и потому его использовать для программирования АВМ нежелательно, тем более, что при рассеивании энергии вообще нельзя пользоваться уравнением (12.3), и движение материальной точки следует воспроизводить по уравнению (12.5).

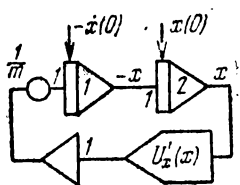


Рис. 12.2

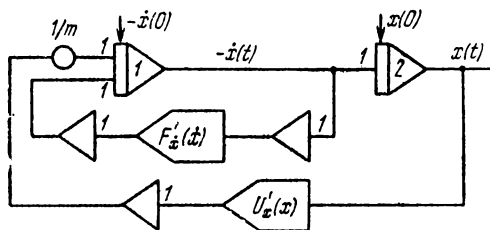


Рис. 12.3

Структурная схема, соответствующая уравнению (12.2), представлена на рис. 12.2. Она включает цепочку из двух интеграторов, охваченных обратной связью в виде функционального преобразователя, воспроизводящего $U'_x(x)$ (обобщенную силу), и инвертора. Начальные условия интегратора 1 зависят от полной энергии E и начальной потенциальной энергии

$$\dot{x}(0) = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x(0))]}.$$

Структурная схема, соответствующая уравнению (12.5), представлена на рис. 12.3. Эту схему отличает от схемы рис. 12.2 лишь отрицательная обратная связь с выхода первого интегратора на его вход через функциональный преобразователь $F'_x(\dot{x})$.

Очень часто оказывается, что можно избежать использования нелинейных функциональных преобразователей путем сведения дифференциального уравнения (12.2) или (12.5) к некоторой математически эквивалентной системе дифференциальных уравнений большего порядка, чем исходное уравнение, но с нелинейностями типа произведения.

При моделировании движения частиц на АВМ само движение можно наблюдать на экране электронного индикатора в виде

траектории частицы $x(t)$ и в виде фазовой траектории $\dot{x}=f(x)$. Меняя величину энергии E , можно определить глубину потенциальных ям и зависимость периода колебаний частицы от величины энергии. Кроме того, можно исследовать изменения в движении частицы под влиянием некоторой добавки $\delta U(x)$ к полю $U(x)$.

§ 3. Пример программирования АВМ для исследования движения частицы

Составим структурную схему АВМ для исследования движения частицы в поле $U(x) = m\omega^2 x^2/2$ при наличии добавки к полю $\pm\beta x^4/4$ и при диссипации энергии $F(\dot{x}) = \alpha m\dot{x}^2/2$. В соответствии с (12.5) дифференциальное уравнение движения частицы будет

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \mp \beta x^3 - \alpha \dot{x}, \tag{12.6}$$

где знак «—» перед β соответствует положительной добавке к полю, а знак «+» отрицательной.

Структурная схема АВМ, воспроизводящая решение дифференциального уравнения (12.6), представлена на рис. 12.4.

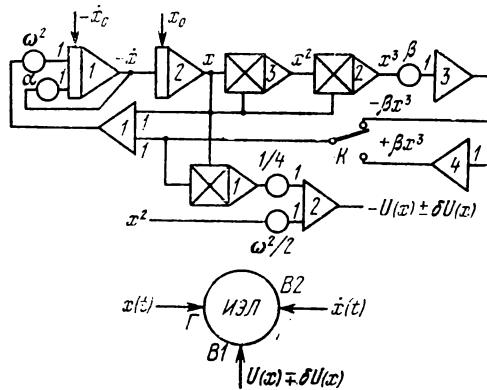


Рис. 12.4.

Схема содержит два интегратора 1, 2 и цепочку из двух последовательно включенных блоков перемножения 2, 3 с инверторами 3, 4. Эта цепочка служит для воспроизведения слагаемого $\mp\beta$. Выбор знака осуществляется с помощью ключа K . Для наблюдения движения частицы на ИЭЛ выведена переменная $x(t)$ на горизонтальные пластины, а на вертикальные — переменная $\dot{x}(t)$ и переменная $+u(x) \pm \delta U(x)$. Для воспроизведения потенциала $U(x)$ использован блок перемножения 1 и сумматор 2. На экране ИЭЛ одновременно с потенциалом можно наблюдать фазовую траекторию частицы $\dot{x}=f(x)$.

При выполнении исследования движения материальной точки рекомендуется:

1. Построить коммутационную схему для случая $\omega=1$, $m=1$;
2. Установить $\alpha=0$ и при некотором фиксированном значении $\dot{x}(0)$ (т. е. при фиксированной энергии частицы) определить зависимость амплитуды и периода колебаний от величины коэффициента β ; построить графики $T(\beta)$ и $A(\beta)$;
3. Для $\alpha=0$ и отрицательных значений β определить в координатах $\dot{x}(0)$ и β области финитного и инфинитного движения; пояснить результаты эксперимента и вид потенциальной функции;
4. Для некоторой точки $(\dot{x}(0), \beta)$ финитного движения определить T — период колебаний частицы при $\alpha=0$; положив $\alpha=0,1; 0,2; 0,3$, отснять значения $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ через $0,1 T$, построить графики и пояснить их вид;
5. Для некоторой точки $(\dot{x}(0), \beta)$ инфинитного движения, положив $\alpha=0,1; 0,2; 0,3$, отснять $x(t)$ и $\dot{x}(t)$, построить графики и пояснить их вид;
6. Для отрицательных значений β и некотором фиксированном $x(0)$, обеспечивающем инфинитное движение при $\alpha=0$, построить область финитного движения в координатах α, β .

§ 4. Задачи

Исследовать движение частицы единичной массы ($m=1$) в полях, когда диссипативная функция равна: $F(\dot{x})=0$, $F(\dot{x})=\alpha\dot{x}^2/2$, $F(\dot{x})=\alpha\dot{x}^3/3$.

1. $U(x) = -\sin^2 x$ с добавкой $\pm\beta \cos x$.
2. $U(x) = -\exp(-x^2)$.
3. $U(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.
4. $U(x) = [\exp(-2\alpha x) - 2\exp(-\alpha x)]$ с добавкой $\pm\beta \exp \alpha x$.
5. $U(x) = (1 - \cos x)$.
6. $U(x) = \frac{x^2\omega^2}{2}$ с добавкой $\pm \frac{\beta x^3}{3}$.

КИНЕТИКА ГОМОГЕННЫХ ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ

§ 1. Реакции первого порядка

Химическая кинетика изучает явления, связанные с изменением во времени концентрации химических веществ в процессе реакции. *Скорость протекания химической реакции* определяется как изменение концентрации реагирующих веществ в единицу времени.

Математическое описание кинетики реакций основано на законе действия масс, согласно которому скорость химической реакции пропорциональна произведению концентраций реагирующих (исходных!) веществ.

В реакцию вступили два вещества A и B . Скорость реакции исчисляется в соответствии с законом действия масс как $v = kC_A(t)C_B(t)$, где v — скорость реакции, $C_A(t)$ и $C_B(t)$ — текущие концентрации веществ A и B . k — коэффициент пропорциональности, не зависящий от концентрации реагирующих веществ, k называют *константой скорости реакции*. Константа скорости реакции возрастает с ростом температуры. Кроме того, на скорость реакции влияет молярность реакции, зависящая от числа молекул, участвующих в каждом акте реакции.

Рассмотрим ряд реакций первого порядка, для которых характерно существование лишь одного исходного продукта. Кинетика реакций первого порядка описывается линейными дифференциальными уравнениями.

1. Необратимая реакция первого порядка. Вещество A превращается в вещество B согласно схеме $A \xrightarrow{k} B$, где k — константа скорости реакции, A — исходный продукт, B — целевой продукт реакции. Здесь один исходный продукт, поэтому скорость реакции зависит только от концентрации $c_A(t)$.

Дифференциальные уравнения кинетики в соответствии с законом действия масс будут

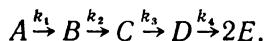
$$C'_A(t) = -kC_A(t); \quad C'_B(t) = kC_A(t) \quad (13.1)$$

с начальными условиями $C_A(0) = C_{A0}$, $C_B(0) = C_{B0}$. Знак «—» в первом уравнении отражает тот факт, что концентрация вещества A в процессе реакции убывает. Аналогично «+» во вто-

ром уравнении соответствует возрастанию концентрации вещества B .

Структурная схема АВМ, представленная на рис. 13.1, воспроизводит решение системы линейных уравнений (13.1).

2. **Необратимая последовательная реакция** протекает согласно схеме



Здесь A — исходный продукт, B , C , D — промежуточные продукты, E — целевой продукт, k_1 , k_2 , k_3 , k_4 — константы скоростей отдельных ступеней реакции. В процессе реакции концентрация A падает, концентрация целевого продукта E нарастает. Концентрация промежуточных продуктов сначала нарастает, а затем падает. Коэффициент 2 на последней стадии — стехиометрический коэффициент, учитывает мольность ступени.

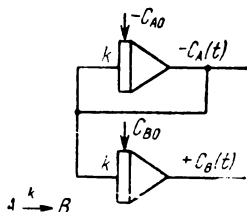


Рис. 13.1.

В соответствии с законом действия масс, примененным к каждой ступени реакции, получается *система дифференциальных уравнений кинетики*:

$$\begin{aligned} \dot{C}_A(t) &= -k_1 C_A(t), & C_A(0) &= C_{A0}; \\ \dot{C}_B(t) &= k_1 C_A(t) - k_2 C_B(t), & C_B(0) &= 0; \\ \dot{C}_C(t) &= k_2 C_B(t) - k_3 C_C(t), & C_C(0) &= 0; \\ \dot{C}_D(t) &= k_3 C_C(t) - k_4 C_D(t), & C_D(0) &= 0; \\ \dot{C}_E(t) &= 2k_4 C_D(t), & C_E(0) &= 0. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Структурная схема АВМ, соответствующая этой системе уравнений, представлена на рис. 13.2. Схема содержит пять интеграторов по числу компонент реакции. С помощью интегратора b и схемы программного управления построен измеритель времени, обеспечивающий программное прерывание процесса решения в заданные моменты времени t_3 (ключи K_1 и K_2 в нижнем положении).

Задание t_3 осуществляется делителем D . Кроме того, схема программного управления может быть использована для прерывания процесса решения в момент времени, когда какой-либо промежуточный продукт (на рисунке — продукт B) достигает максимальной концентрации. Для такого прерывания с помощью сумматора I вырабатывается в соответствии со вторым уравнением системы (13.2) переменная $\dot{C}_B(t)$, которая подается на вход схемы программного управления (ключи K_1 и K_2

в верхнем положении). Схема программного управления прервет воспроизведение решения в тот момент, когда переменная $C_B(t)$ проходит через нуль, после чего на выходе интегратора 2 можно зафиксировать значения максимума $C_B(t)$, а на выходе интегратора 6 — момент времени, соответствующий максимуму. Аналогично можно определить экстремумы концентраций других промежуточных продуктов.

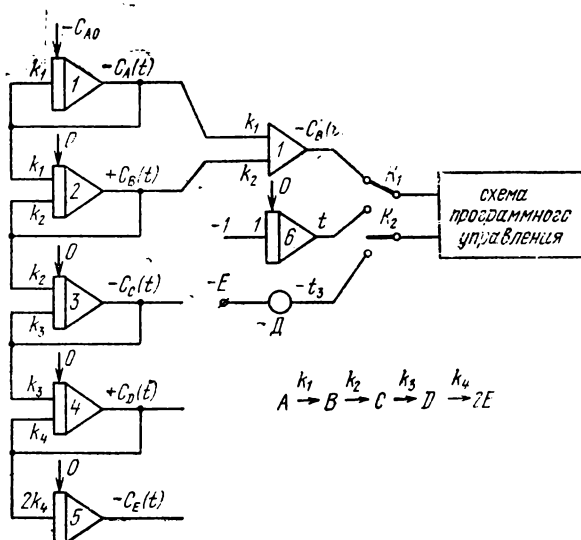
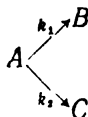


Рис. 13.2.

3. Необратимая параллельная реакция первого порядка протекает согласно схеме



Исходный продукт в результате реакции превращается в целевой и побочный продукт C . Кинетика реакции описывается *уравнениями*

$$\begin{aligned}
 \dot{C}_A(t) &= -(k_1 + k_2) C_A(t), & C_A(0) &= C_{A0}, \\
 \dot{C}_B(t) &= k_1 C_A(t), & C_B(0) &= 0, \\
 \dot{C}_C(t) &= k_2 C_A(t), & C_C(0) &= 0.
 \end{aligned}$$

Структурная схема АВМ, воспроизводящая решение этой системы уравнений, показана на рис. 13.3, а).

4. Обратимая реакция первого порядка протекает в соответствии со схемой $A \xrightleftharpoons[k_2]{k_1} B$, которой соответствует система дифференциальных уравнений кинетики

$$\dot{C}_A(t) = -k_1 C_A(t) + k_2 C_B(t),$$

$$C_A(0) = C_{A0},$$

$$\dot{C}_B(t) = k_1 C_A(t) - k_2 C_B(t),$$

$$C_B(0) = 0.$$

Структурная схема АВМ, воспроизводящая решение этой системы, показана на рис. 13.3, б).

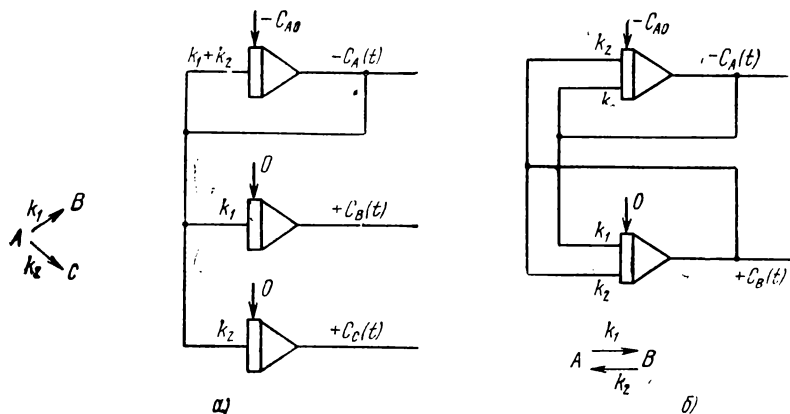


Рис. 13.3.

Для других более разветвленных схем химических реакций первого порядка дифференциальные уравнения кинетики составляются в соответствии с законом действия масс так же, как это было изложено здесь.

§ 2. Сложные реакции

Перейдем теперь к рассмотрению сложных реакций, для которых характерно участие двух исходных продуктов в реакции. В математическом же отношении этим сложным реакциям соответствуют нелинейные дифференциальные уравнения кинетики, которые, как правило, не имеют аналитического решения.

5. Реакция протекает по схеме $A + B \xrightarrow{k} C$. В соответствии с законом действия масс дифференциальные уравнения кинетики будут

$$\begin{aligned} \dot{C}_A(t) &= -kC_A(t)C_B(t), & C_A(0) &= C_{A0}; \\ \dot{C}_B(t) &= -kC_A(t)C_B(t), & C_B(0) &= C_{B0}; \\ \dot{C}_C(t) &= kC_A(t)C_B(t), & C_C(0) &= 0. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Это — система нелинейных дифференциальных уравнений с начальными условиями. Структурная схема АВМ, реализующая решение системы, представлена на рис. 13.4, а). В схеме имеется

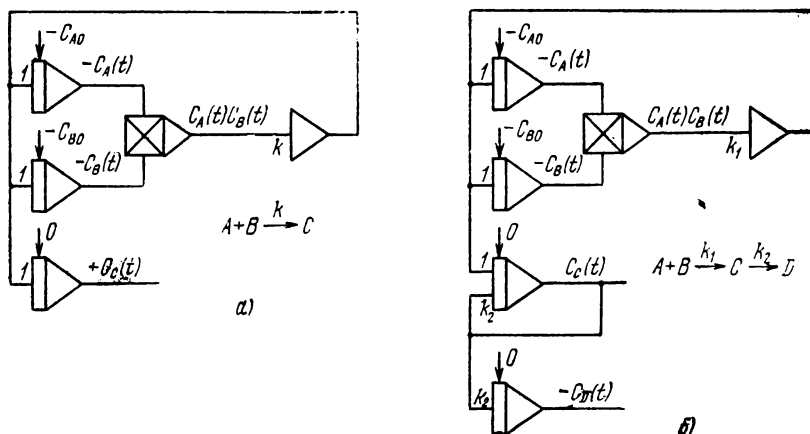


Рис. 13.4.

блок перемножения для образования правых частей системы (13.3).

6. Реакция протекает по схеме $A + B \xrightarrow{k_1} C \xrightarrow{k_2} D$. Эта реакция отличается наличием промежуточного продукта C . Дифференциальные уравнения кинетики будут:

$$\begin{aligned} \dot{C}_A(t) &= -k_1C_A(t)C_B(t), & C_A(0) &= C_{A0}, \\ \dot{C}_B(t) &= -k_1C_A(t)C_B(t), & C_B(0) &= C_{B0}, \\ \dot{C}_C(t) &= k_1C_A(t)C_B(t) - k_2C_C(t), & C_C(0) &= 0, \\ \dot{C}_D(t) &= k_2C_C(t), & C_D(0) &= 0. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Структурная схема АВМ, соответствующая этой системе, показана на рис. 13.4, б).

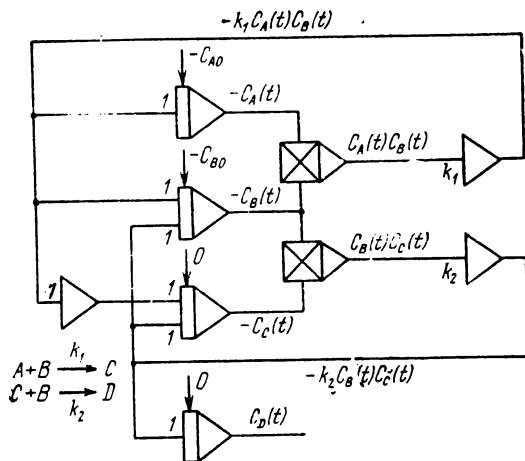


Рис. 13.5.

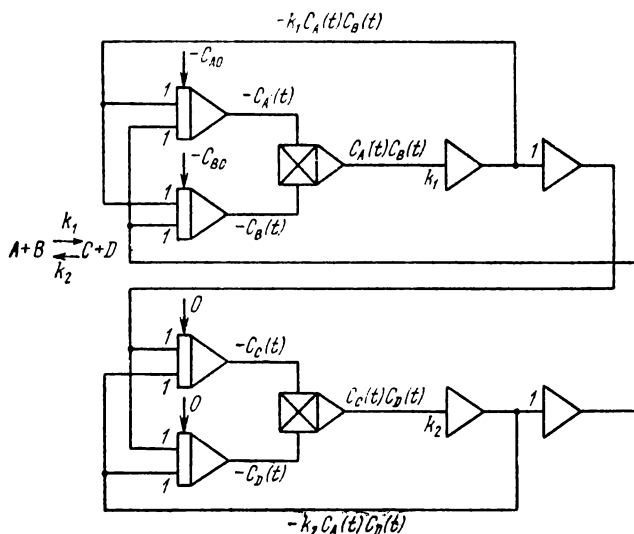
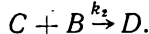


Рис. 13.6.

7. Реакция протекает по схеме $A + B \xrightarrow{k_1} C$ Здесь A и B —



исходные продукты, C — промежуточный продукт, а D — целевой продукт реакции. Система дифференциальных уравнений кинетики будет:

$$C'_A(t) = -k_1 C_A(t) C_B(t), \quad C_A(0) = C_{A0};$$

$$C'_B(t) = -k_1 C_A(t) C_B(t) - k_2 C_B(t) C_C(t), \quad C_B(0) = C_{B0};$$

$$C'_C(t) = k_1 C_A(t) C_B(t) - k_2 C_B(t) C_C(t), \quad C_C(0) = 0;$$

$$C'_D(t) = k_2 C_B(t) C_C(t), \quad C_D(0) = 0.$$

Структурная схема представлена на рис. 13.5.

8. Обратимая реакция протекает по схеме $A + B \xrightleftharpoons[k_2]{k_1} C + D$,

которой соответствует система дифференциальных уравнений кинетики

$$C'_A(t) = -k_1 C_A(t) C_B(t) + k_2 C_C(t) C_D(t); \quad C_A(0) = C_{A0};$$

$$C'_B(t) = -k_1 C_A(t) C_B(t) + k_2 C_C(t) C_D(t); \quad C_B(0) = C_{B0};$$

$$C'_C(t) = k_1 C_A(t) C_B(t) - k_2 C_C(t) C_D(t); \quad C_C(0) = 0;$$

$$C'_D(t) = k_1 C_A(t) C_B(t) - k_2 C_C(t) C_D(t); \quad C_D(0) = 0.$$

Структурная схема АВМ показана на рис. 13.6.

§ 3. Контроль функционирования АВМ. Масштабирование

При исследовании на АВМ кинетики химических реакций контроль правильности функционирования АВМ удобно проводить по методу избыточной переменной (§ 4 гл. 4). Покажем на примере реакции 6 методику организации такого контроля. В качестве контрольного соотношения возьмем следующую сумму:

$$y(t) + \frac{1}{2} C_A(t) + \frac{1}{2} C_B(t) + C_C(t) + C_D(t) = 0,$$

где $y(t)$ — избыточная переменная, для воспроизведения которой (§ 4 гл. 4) необходимо найти определяющее дифференциальное уравнение. Для этого продифференцируем контрольное соотношение по аргументу t :

$$y'(t) + \frac{1}{2} C'_A(t) + \frac{1}{2} C'_B(t) + C'_C(t) + C'_D(t) = 0$$

и подставим в полученное выражение производные $C'_A(t)$, $C'_B(t)$, $C'_C(t)$, $C'_D(t)$ в соответствии с дифференциальными уравнениями

кинетики (13.4). После подстановки получаем определяющее дифференциальное уравнение для переменной $y(t)$:

$$y'(t) = 0, \quad y(0) = -\frac{1}{2} C_{A0} - \frac{1}{2} C_{B0}.$$

Такое, несколько неожиданное, дифференциальное уравнение имеет простой химический смысл, связанный с законом сохранения вещества. Сама же избыточная переменная оказывается константой, равной $y(t) = -\frac{1}{2}(C_{A0} + C_{B0}) = \text{const}$.

Таким образом, контроль функционирования АВМ при воспроизведении системы дифференциальных уравнений (13.4) можно проводить с помощью простого контрольного соотношения

$$\frac{1}{2} [C_A(t) - C_{A0}] + \frac{1}{2} [C_B(t) - C_{B0}] + C_C(t) + C_D(t) = 0,$$

которое реализуется на АВМ одновременно с системой (13.4).

В АВМ математические переменные с помощью масштабов изображаются в виде электрических напряжений — машинных переменных. Расчет масштабов может быть выполнен, когда известны максимальные значения математических переменных. В задачах химической кинетики роль зависимых математических переменных играют меняющиеся во времени концентрации веществ. При этом по самому смыслу исследуемой химической реакции часто легко оцениваются максимальные границы изменения концентраций веществ.

В качестве примера проведем масштабирование концентраций для реакции 6, считая, что все значения заданы в согласованных единицах изменения $C_A(0) = C_{A0}$, $C_B(0) = C_{B0}$, k_1 , k_2 , при этом пусть $C_{A0} > C_{B0}$. Масштабированию должны быть подвергнуты переменные $C_A(t)$, $C_B(t)$, $C_C(t)$ и $C_D(t)$. Для этого необходимо определить максимальные значения концентраций всех продуктов. Исходя из схемы реакции, в которой все стехиометрические коэффициенты равны единице, можно утверждать, что максимальная концентрация $C_C(t)$ промежуточного продукта C и концентрация $C_D(t)$ конечного продукта D не могут быть больше C_{B0} и тем более не могут быть больше C_{A0} . Для удобства сравнения данных масштаб m представления концентраций удобно взять одинаковым для всех веществ $m = \frac{100}{C_{A0}}$.

Коммутационная схема АВМ МН-7, соответствующая кинетике реакции 6, представлена на рис. 13.7. Схема по топологии отличается от структурной схемы рис. 13.4, б), что объясняется особенностями включения блока перемножения машины МН-7. Кроме того, в коммутационной схеме введен сумматор 9, вырабатывающий электрическое напряжение, соответствующее

переменной $C_C(t)$. В момент перехода этой переменной через нуль схема программного управления (ключ K в нижнем положении) остановит АВМ и можно будет зафиксировать максимальное значение концентрации промежуточного продукта Q . При этом интегратор 16, который используется как измеритель времени ($t_3=0$), зафиксирует время t^* , соответствующее максимуму концентрации промежуточного продукта C . При верхнем положении ключа K интегратор 16 и схема программного управления дадут возможность прерывать процесс решения в любой заранее заданный момент времени t_3 . Величина t_3 задается в виде начального условия интегратора 16.

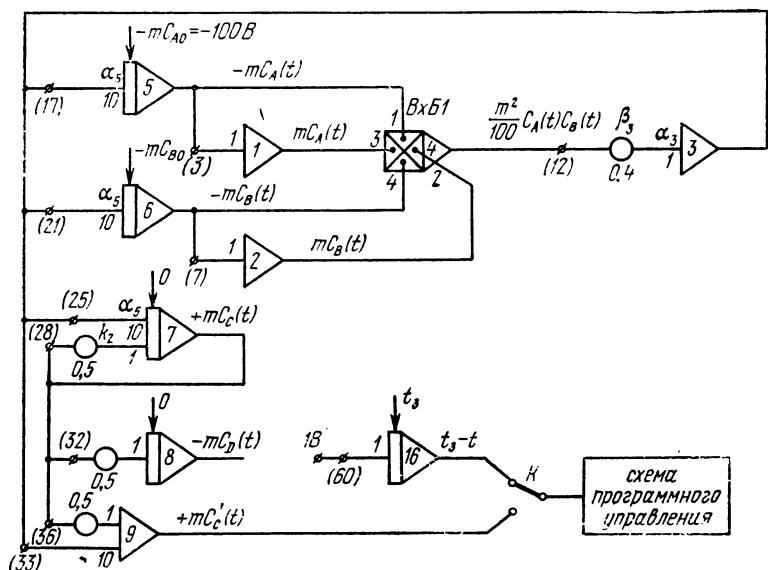


Рис. 13.7.

Согласование масштабов вызвано использованием блока перемножения, который из-за существования схемного масштаба 0,01 требует согласованного подбора коэффициентов передачи β_3 , α_3 , α_5 . Найдем необходимое математическое соотношение, связывающее эти неизвестные пока коэффициенты. Желая получить на выходе интегратора 5 переменную $-mC_A(t)$, необходимо на вход интегратора подать производную от нее, т. е. $mC_A'(t)$ или, что то же самое (см. уравнения (13.4)), переменную $-mk_1C_A(t)C_B(t)$.

С другой стороны, эту же самую переменную, поступающую на вход интегратора 5, можно записать через выходную переменную блока перемножения и неизвестные коэффициенты

передачи β_3 , α_3 , α_5 в виде равенства

$$-\frac{m^2}{100} C_A(t) C_B(t) \beta_3 \alpha_3 \alpha_5 = m k_1 C_A(t) C_B(t),$$

которое после преобразования дает

$$\beta_3 \alpha_3 \alpha_5 = \frac{100 \cdot k_1}{m} = k_1 C_{A0}.$$

Таким образом, коэффициенты передачи выразились через исходные параметры решаемой задачи. Для определенности возьмем $k_1=1$; $k_2=0,5$; $C_{A0}=4$; $C_{B0}=3$. Тогда $\alpha_3 \alpha_5 \beta_3=4$. Коэффициенты целесообразно выбрать такими: $\beta_3=0,4$; $\alpha_3=1$; $\alpha_5=10$.

§ 4. Задачи

По заданной схеме реакции составить ее дифференциальные уравнения кинетики, построить структурные и коммутационные схемы АВМ, разработать схему контроля АВМ.

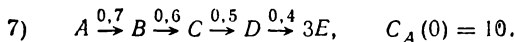
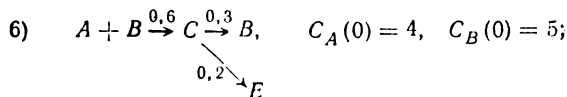
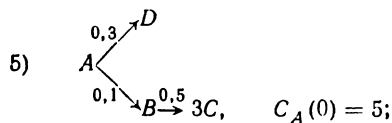
Воспроизвести решения уравнений кинетики на АВМ. Изменить масштаб времени воспроизведения таким образом, чтобы в АВМ процессы устанавливались за 15—20 секунд. Отснять значения концентрации всех продуктов с шагом в одну секунду машинного времени (т.е. 15—20 точек).

Разрывая связи на коммутационной панели АВМ, убедиться в эффективности контроля.

Для промежуточных продуктов реакции с помощью схемы программного управления определить момент времени и величину максимальной концентрации.

С экрана ИЭЛ зарисовать кривые типа $C = \varphi(C_k)$, где C_k — концентрация конечного продукта, C — концентрация исходного или промежуточного продуктов:

- 1) $A \xrightarrow{0,4} B \xrightarrow{0,6} 2C, \quad C_A(0) = 4;$
- 2) $A + B \xrightarrow{0,5} C \xrightarrow{0,3} D, \quad C_A(0) = 4, \quad C_B(0) = 3;$
- 3) $A \xrightarrow{1,0} B \xrightarrow{0,3} 3C, \quad C_A(0) = 5;$
- 4) $A + B \xrightarrow{0,1} C \xrightarrow{0,4} 2D, \quad C_A(0) = 2, \quad C_B(0) = 5;$



Числовые значения констант скоростей реакций и начальные концентрации исходных продуктов даны в согласованной системе единиц измерения.

ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕМАТИКИ КРИВОШИПНО-ШАТУННОГО МЕХАНИЗМА

§ 1. Основные понятия кинематики механизмов

В теории механизмов и машин под механизмом понимают искусственное сочетание материальных тел, обладающее определенностью движения. Основные назначения механизма — воспроизведение заданного движения, передача движения или его преобразование. Под определенным движением вообще понимают движение по заданной траектории в определенном направлении с известными в каждый момент времени скоростями и ускорениями.

Механизм состоит из отдельных взаимосвязанных частей, называемых звеньями. Звенья различают трех типов: 1) неподвижное звено — станина; 2) подвижное звено — ведущее; 3) подвижное звено — ведомое.

Если движение звеньев механизма происходит в одной плоскости, то механизм называют плоским. Число ведущих звеньев механизма называют числом степеней свободы механизма относительно станины.

Провести кинематический анализ механизма — это значит по заданной кинематической схеме механизма найти и исследовать функции, описывающие перемещения, скорости и ускорения отдельных точек механизма при известном законе движения ведущих звеньев. Аналитическое исследование кинематики часто наталкивается на математические трудности. Так, аналитический вид траекторий некоторых точек простейших механизмов с одной степенью свободы представляется алгебраическими уравнениями не ниже 4-й степени. Поэтому в теории механизмов и машин получили широкое распространение различного рода графические методы анализа кинематики. Эти методы трудоемки.

Ниже мы рассмотрим некоторые вопросы исследования кинематики механизмов с использованием аналоговых вычислительных машин, на примере анализа кривошипно-шатунного механизма с ползуном. Основная идея использования здесь АВМ состоит в том, что отыскиваются определяющие дифференциальные уравнения, решениями которых являются функции, подлежащие анализу.

Кинематическая схема механизма представлена на рис. 14.1, а). Звено OA называют кривошипом — это ведущее звено; ведомое звено AB — шатун; ведомое звено B — ползун (или цапфа). Станина — неподвижное звено — в этом механизме образована направляющей, по которой скользит ползун. Кроме того, к станине относится шарнирная точка O — точка крепления кривошипа.

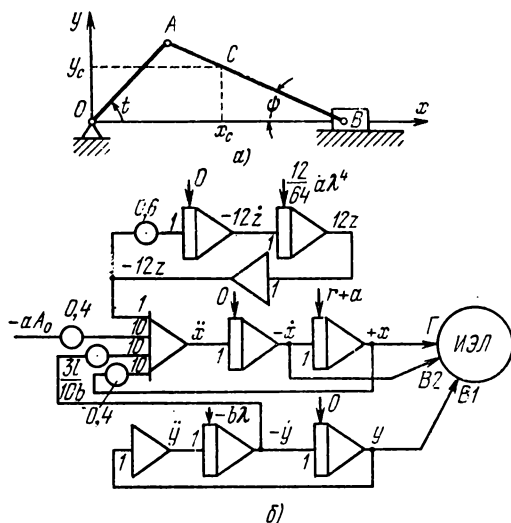


Рис. 14.1.

Отнесем механизм к прямоугольной системе координат, в которой ось x совпадает с линией движения шарнирной точки B ползуна, а ось y проходит через неподвижную шарнирную точку O кривошипа. Мгновенное положение кривошипа условимся определять углом t , который кривошип составляет с положительным направлением оси x . Пусть длина кривошипа r , а длина шатуна l . Выберем на линии AB шатуна произвольную точку C на расстоянии a от шарнира A и на расстоянии $b=l-a$ от B . Наша задача исследовать зависимости $x_c(t)$, $y_c(t)$, $\dot{x}_c(t)$, $\dot{y}_c(t)$, $\ddot{x}_c(t)$, $\ddot{y}_c(t)$ с помощью АВМ.

§ 2. Составление программы для АВМ

Найдем необходимые дифференциальные уравнения, для чего рассмотрим рис. 14.1, а), из которого имеем:

$$x_c(t) = r \cos t + a \cos \psi; \quad y_c(t) = b \sin \psi. \quad (14.1)$$

Далее из рисунка следует $r \sin t = l \sin \psi$, отсюда $\sin \psi = \lambda \sin t$,

где $\lambda = r/l$. И следовательно, $\cos \psi = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 t}$. Величина $\cos \psi$ приближенно может быть представлена рядом

$$\cos \psi = A_0 + A_2 \cos 2t - A_4 \cos 4t + A_6 \cos 6t - \dots, \quad (14.2)$$

где

$$A_0 = 1 - \frac{1}{4} \lambda^2 - \frac{3}{64} \lambda^4 - \frac{5}{256} \lambda^6 - \dots$$

$$A_2 = \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{4}{64} \lambda^4 + \frac{15}{512} \lambda^6 + \dots,$$

$$A_4 = \frac{1}{64} \lambda^4 + \frac{3}{256} \lambda^6 + \dots,$$

$$A_6 = \frac{1}{512} \lambda^6 + \dots$$

Из последних выражений видно, что для $\lambda < 1$ ряд (14.2) сходится. В дальнейшем ограничимся усеченным рядом с точностью до члена четвертого порядка. Подставляя найденные значения $\sin \psi$ и $\cos \psi$ в (14.1), получим для координат точки C

$$\begin{aligned} x_c &= r \cos t + a[A_0 + A_2 \cos 2t - A_4 \cos 4t], \\ y_c &= b\lambda \sin t. \end{aligned}$$

Обозначив через $z(t) = aA_4 \cos 4t$, последовательным дифференцированием $x_c(t)$, $y_c(t)$ и $z(t)$ получаем систему дифференциальных уравнений с начальными условиями, описывающих кинематику механизма

$$\begin{aligned} \ddot{x}_c(t) &= -4x_c(t) + 3\frac{l}{b}\dot{y}_c(t) + 4aA_0 + 12z(t), \\ x(0) &= r + a, \quad \dot{x}(0) = 0; \\ \ddot{y}_c(t) &= -y_c(t), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = b\lambda; \\ \ddot{z}(t) &= -16z(t), \quad z(0) = aA_4 = \frac{a}{64}\lambda^4, \quad \dot{z}(0) = 0. \end{aligned} \quad (14.3)$$

Реализация этой системы линейных дифференциальных уравнений на АВМ требует шести интеграторов.

Структурная схема АВМ приведена на рис. 14.1, б). На схеме ИЭЛ подключен таким образом, что по входу $B1$ воспроизводит траекторию движения точки $y_c = f_1(x_c)$, а по входу $B2$ — фазовую траекторию точки $\dot{x}_c = f_2(x_c)$. Для малых λ схема может быть существенно упрощена за счет ликвидации той части схемы, которая воспроизводит функцию $12z$, так как значение этой функции составляет малую величину.

Расчет масштабов представления исходных переменных $x, \dot{x}, \ddot{x}, y, \dot{y}, \ddot{y}, z, \dot{z}$ приведен в табл. 1. При этом для удобства

Таблица 1

Переменная	Максимальное значение переменной	Величина масштаба	Обозначение масштаба
x, y	$r + a$	$\frac{100}{r + a}$	m_0
\dot{x}, \dot{y}	$r + a \left[\frac{\lambda^2}{2} + \frac{3}{16} \lambda^4 \right]$	$\frac{100}{r + a \left[\frac{\lambda^2}{2} + \frac{3}{16} \lambda^4 \right]}$	m_1
\ddot{x}, \ddot{y}	$r + a \left[\lambda^2 + \frac{\lambda^4}{2} \right]$	$\frac{100}{r + a \left[\lambda^2 + \frac{\lambda^4}{2} \right]}$	m_2
$12z$	$\frac{3}{16} a \lambda^4$	$\frac{16 \cdot 100}{3 \cdot a \lambda^4}$	m_{z0}
$12\dot{z}$	$\frac{3}{4} a \lambda^4$	$\frac{4 \cdot 100}{3 \cdot a \lambda^4}$	m_{z1}

сравнения данных, получаемых с АВМ, масштабы переменных $x_0, y_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0; \ddot{x}_0, \ddot{y}_0$ взяты попарно одинаковыми,

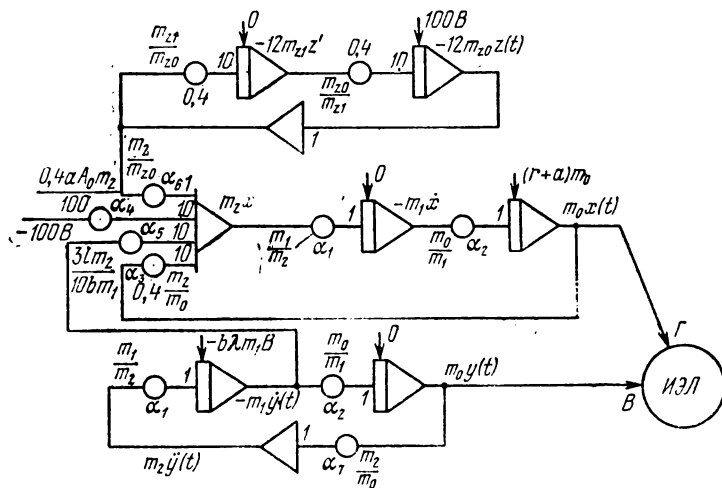


Рис. 14.2.

Коммутационная схема в общем виде представлена на рис. 14.2. Коэффициенты передачи потенциометров $\alpha_1 - \alpha_7$ выбраны из условий согласования масштабов переменных.

Для частного случая $\lambda=2/3$; $r=1$; $l=1,5$; $a=0,5$; $b=1,0$; расчет масштабов выполнен в табл. 2.

Т а б л и ц а 2.

Переменная	Максимальное значение переменной		Величина масштаба	Обозначение
	точное	округленное		
x, \dot{y}	1,500	2	$100/2=50$	m_0
x, y	1,125	2	$100/2=50$	m_1
\ddot{x}, \ddot{y}	1,250	2	$100/2=50$	m_2

Максимальное значение переменной $12z = \frac{3 \cdot 0,5 \cdot 16}{81 \cdot 16} \approx 0,03$ мало, и эту переменную не будем воспроизводить.

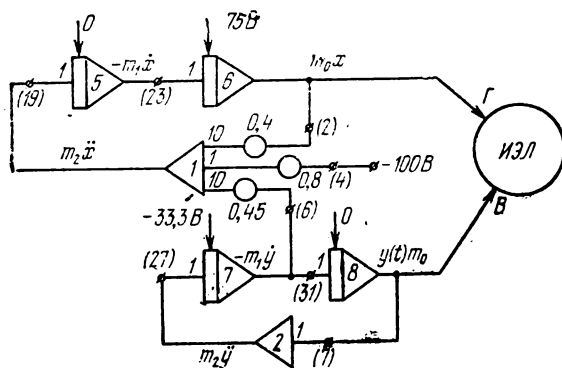


Рис. 14.3.

Коммутационная схема для рассматриваемого частного случая представлена на рис. 14.3.

§ 3. Задачи

Для заданных значений (r, λ, a) рассчитать коэффициенты передачи операционных блоков коммутационной схемы рис. 14.2 и исследовать с помощью АВМ функции: $x(t), \dot{x}(t), y(t), \dot{y}(t), \ddot{x}(t), \ddot{y}(t), y = \varphi_1(x), \dot{x} = \varphi_2(x), \ddot{x} = \varphi_3(x), \dot{y} = \varphi_4(y), \ddot{y} = \varphi_5(y), \dot{y} = \varphi_6(\dot{x}), \ddot{y} = \varphi_1(\dot{x})$.

- 1) $r=1$; $\lambda=0,75$; $a=0,25$; 4) $r=1$; $\lambda=0,2$; $a=5,0$;
- 2) $r=2$; $\lambda=0,8$; $a=0,5$; 5) $r=2$; $\lambda=0,75$; $a=2,0$.
- 3) $r=3$; $\lambda=0,5$; $a=4,0$;

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

§ 1. Основные законы теории электрических цепей

Электрическая цепь представляет собой совокупность простейших элементов: резисторов, конденсаторов, индуктивностей. Конденсаторы и индуктивности называют реактивными элементами. Эти элементы обладают способностью накапливать энергию. Первые — в виде энергии электрического поля, вторые — в виде энергии магнитного поля. Поэтому конденсаторы и индуктивности называют еще энергоемкими элементами. Электрические цепи, содержащие только резисторы, называют безынерционными цепями. Электрические процессы в таких цепях описываются алгебраическими уравнениями. Электрические цепи, содержащие, кроме резисторов, и реактивные элементы, называют инерционными цепями. Электрические процессы в этих цепях описываются дифференциальными уравнениями. При этом порядок дифференциального уравнения не выше числа реактивных элементов в цепи.

Электрические цепи принято делить на линейные, нелинейные и параметрические в зависимости от свойств простейших элементов. Если все параметры элементов некоторой цепи R , C , L — постоянные величины, то цепь называется линейной. Процессы в ней описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Если какие-либо параметры R , C , L элементов цепи меняются во времени, то электрическую цепь называют параметрической. Она описывается линейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами. Когда же параметры элементов цепи R , C , L таковы, что их значение зависит от токов или напряжений, то такие цепи называют нелинейными.

Процессы в них описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Методика воспроизведения решения дифференциальных уравнений на АВМ практически не зависит от типа реализуемого дифференциального уравнения. Поэтому применение АВМ для исследования электрических цепей имеет большое практическое значение.

Исследованию электрической цепи на АВМ предшествует этап математического описания электрических процессов, протекающих в ней путем составления соответствующих дифференциальных уравнений. При этом полезны следующие соотношения между токами и напряжениями различных элементов, образующих электрическую цепь.

1. Линейные элементы:

а) резистор $u_R = Ri_R$;

б) конденсатор $i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{du_C C}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$; (15.1)

в) индуктивность $u_L = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} (Li) = L \frac{di_L}{dt}$.

Здесь u_R , u_C , u_L — соответственно падение напряжения на резисторе R , конденсаторе C и индуктивности L ; i_R , i_C , i_L — токи, протекающие через эти элементы; q — электрический заряд; Φ — магнитный поток; R — величина сопротивления резистора; C — величина емкости конденсатора; L — величина индуктивности.

2. Параметрические элементы:

а) резистор $u_R = R(t) i_R$;

б) конденсатор $i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} [C(t) u_C] = C(t) \frac{du_C}{dt} + u_C \frac{dC(t)}{dt}$; (15.2)

в) индуктивность $u_L = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} [L(t) i_L] = L(t) \frac{di_L}{dt} + i_L \frac{dL(t)}{dt}$.

Здесь $R(t)$, $C(t)$, $L(t)$ — заданные функции времени.

3. Нелинейные элементы

а) резистор $u_R = f(i_R)$;

б) конденсатор $i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} [u_C \cdot C(u_C)] =$
 $= C \frac{du_C}{dt} + u_C \frac{dC}{du_C} \frac{du_C}{dt}$. (15.3)

в) индуктивность $u_L = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} [L(i_L) i_L] =$
 $= L \frac{di_L}{dt} + i_L \frac{dL}{di_L} \frac{di_L}{dt}$.

Здесь $f(i_R)$, $C(u_C)$, $L(i_L)$ — заданные функции своих аргументов.

Вывод дифференциальных уравнений для всей цепи производится на основе законов Кирхгофа.

Первый закон: Для любого узла любой электрической цепи алгебраическая сумма токов равна нулю.

Второй закон: В любом замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма э. д. с. равна алгебраической сумме падений напряжений на отдельных элементах цепи.

На рис. 15.1 показана в виде прямоугольника некоторая электрическая цепь. Такие цепи называют четырехполюсниками, подчеркивая тем самым в названии наличие у электрической цепи двух входных и двух выходных клемм.

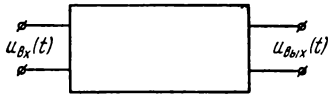


Рис. 15.1.

Задача исследования цепи состоит в определении выходного напряжения $u_{\text{вых}}(t)$ в зависимости от входного $u_{\text{вх}}(t)$.

Выходное напряжение зависит от способа соединения элементов, образующих электрическую схему, и числовых значений параметров. Поэтому каждый четырехполюсник можно рассматривать как некоторый преобразователь, преобразующий заданную входную функциональную зависимость $u_{\text{вх}}(t)$ в выходную $u_{\text{вых}}(t)$.

§ 2. Линейные цепи

Для электрических схем, представленных на рис. 15.2, составить дифференциальные уравнения, описывающие изменение во времени выходного напряжения $u_{\text{вых}}(t)$, разработать структурные и коммутационные схемы АВМ (МН-7) с целью воспроизведения $u_{\text{вых}}(t)$. На входах электрических схем действуют напряжения, показанные на рис. 15.3. Во всех схемах численные значения R , C , L считать равными 1 в согласованной системе единиц.

Пример 1. Рассмотрим RC -цепочку, представленную на рис. 15.4, а). Такая цепочка нашла широкое применение в различных электрических устройствах и получила специальное название: *интегрирующая RC -цепь*.

1) Найдем *дифференциальное уравнение*, описывающее изменение $u_{\text{вых}}(t)$ во времени при заданном входном напряжении $u_{\text{вх}}(t)$. По второму закону Кирхгофа имеем следующее равенство:

$$u_{\text{вх}}(t) = u_R(t) + u_{\text{вых}}(t), \quad (15.4)$$

отсюда величина падения напряжения на резисторе R равна

$$u_R(t) = u_{\text{вх}}(t) - u_{\text{вых}}(t).$$

Из схемы видно, что через резистор и конденсатор протекает один и тот же ток, т. е. $i_R = i_C$. Выражая токи через напряжения и параметры элементов в соответствии с (15.1) и (15.4), получаем:

$$\frac{u_{\text{вх}} - u_{\text{вых}}}{R} = C \frac{du_{\text{вых}}}{dt}.$$

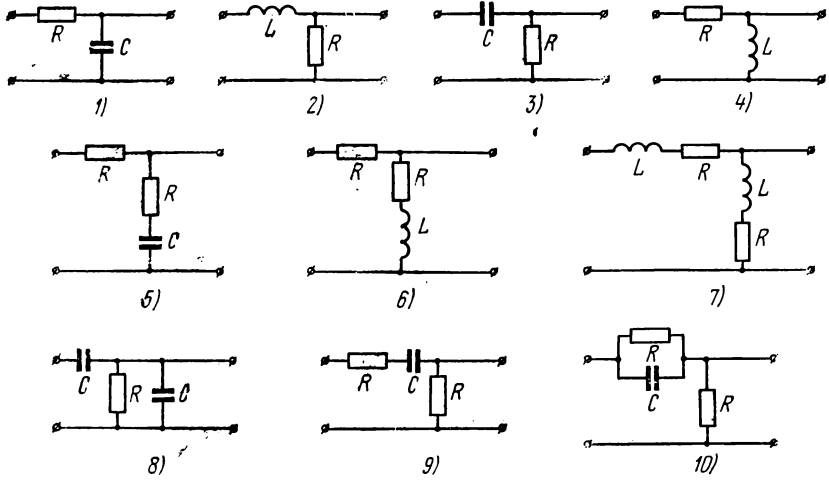


Рис. 15.2.

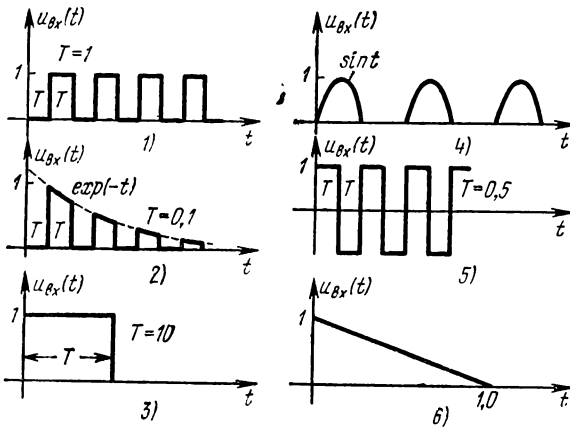


Рис. 15.3.

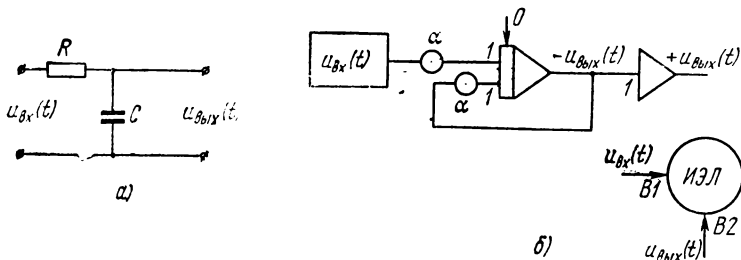


Рис. 15.4.

Окончательно для $u_{\text{вых}}(t)$ имеем линейное неоднородное уравнение первого порядка:

$$\frac{du_{\text{вых}}}{dt} = \frac{1}{RC} (u_{\text{вх}} - u_{\text{вых}}), \quad u_{\text{вых}}(0) = 0. \quad (15.5)$$

Здесь смысл начального условия $u_{\text{вых}}(0) = 0$ в том, что в начальный момент времени заряд конденсатора отсутствует.

2) Структурная схема АВМ, соответствующая уравнению (15.5), представлена на рис. 15.4, б). Прямоугольник с надписью $u_{\text{вх}}(t)$ изображает некоторую совокупность блоков АВМ, воспроизводящих заданную функцию времени $u_{\text{вх}}(t)$.

3) При расчете масштабов следует иметь в виду, что максимальное значение $u_{\text{вых}}(t)$ не может превзойти максимального значения входного напряжения $u_{\text{вх}}(t)$. Дальнейшее программирование АВМ, связанное с разработкой коммутационной схемы, выполняется, как обычно.

Пример 2. Рассмотрим RL -цепочку, представленную на рис. 15.5, а). Эта схема получила название *дифференцирующая RL -цепь*.

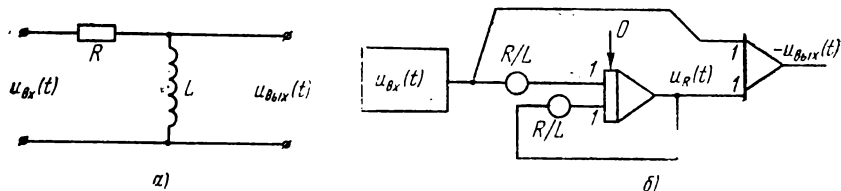


Рис. 15.5.

1) Найдем *дифференциальное уравнение*, описывающее изменение $u_{\text{вых}}(t)$ во времени при произвольном заданном входном напряжении $u_{\text{вх}}(t)$.

По второму закону Кирхгофа имеем:

$$u_{\text{вх}}(t) = u_R(t) + u_{\text{вых}}(t). \quad (15.6)$$

Ток через резистор и индуктивность протекает один и тот же, т. е. $i_R = i_L$. Выражая токи через напряжения и параметры элементов в соответствии с (15.1) и (15.6), получаем:

$$\frac{1}{R} u_R(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_{\text{вых}}(t) dt. \quad (15.7)$$

Мы получили уравнение для $u_{\text{вых}}(t)$ в интегральной форме, и чтобы перейти к дифференциальному уравнению, достаточно равенство (15.7) один раз продифференцировать по аргументу t . Если учесть, что из уравнения (15.6) $u_{\text{вых}}(t) = u_{\text{вх}}(t) - u_R(t)$,

то окончательно получаем систему уравнений

$$\frac{du_R(t)}{dt} = \frac{R}{L} (u_{\text{вх}} - u_R), \quad u_R(0) = 0, \quad (15.8)$$

$$u_{\text{вых}}(t) = u_{\text{вх}}(t) - u_R(t).$$

Начальное условие отражает тот факт, что в начальный момент времени через резистор R не протекает ток.

2) Структурная схема АВМ, соответствующая системе уравнений (15.8), представлена на рис. 15.5, б). Прямоугольник с надписью $u_{\text{вх}}(t)$ изображает некоторую совокупность блоков АВМ, воспроизводящих заданную функцию времени $u_{\text{вх}}(t)$.

3) Надобность в расчете *масштабов* для переменных $u_R(t)$, $u_{\text{вых}}(t)$ по существу отпадает так же, как в примере 1,

§ 3. Параметрические цепи

Для схем рис. 15.2 составить дифференциальные уравнения, описывающие изменение во времени выходного напряжения; разработать структурные и коммутационные схемы АВМ (МН-7) для воспроизведения $u_{\text{вых}}(t)$. На входах электрических схем действуют напряжения, показанные на рис. 15.2. Параметры электрических цепей являются заданными функциями времени $R(t) = R \cdot \varphi_R(t)$, $C(t) = C \cdot \varphi_C(t)$, $L(t) = L \cdot \varphi_L(t)$, где $\varphi_R(t) = 1 + 0,5 \sin t$, $\varphi_C(t) = 1 + |\sin 2t|$, $\varphi_L(t) = 1 + \exp(-t)$ — безразмерные функции. Во всех схемах численные значения постоянных R , C , L считать равными 1 в некоторой согласованной системе единиц.

Пример 3. Рассмотрим параметрическую интегрирующую RC -цепь, представленную на рис. 15.6, а).

1) Найдём *дифференциальное уравнение*, которым описывается выходное напряжение этой RC -цепи. По второму закону Кирхгофа мгновенное падение напряжения на переменном резисторе будет равно

$$u_R(t) = u_{\text{вх}}(t) - u_{\text{вых}}(t). \quad (15.9)$$

Для токов, протекающих через резистор и конденсатор, справедливо равенство $i_R = i_C$. Подставляя вместо токов их выражения через напряжение с учетом (15.2) и (15.9), получаем:

$$\frac{u_{\text{вх}} - u_{\text{вых}}}{R(t)} = \frac{d[u_{\text{вых}} C(t)]}{dt}.$$

Обозначив через $q(t) = u_{\text{вых}} C(t)$ мгновенное значение количества электричества в конденсаторе, получаем систему уравнений, описывающих изменение $u_{\text{вых}}(t)$ во времени:

$$u_{\text{вх}}(t) - u_{\text{вых}}(t) - R(t) \frac{dq}{dt} = 0, \quad q(0) = 0;$$

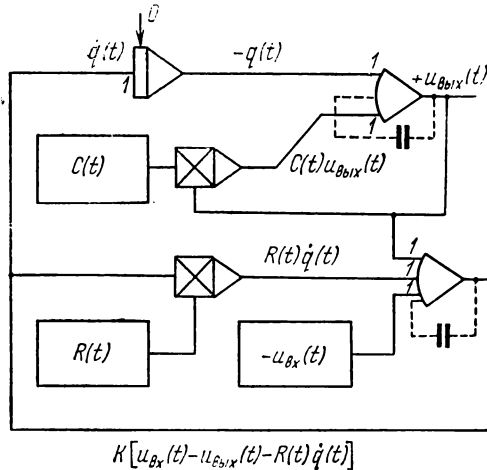
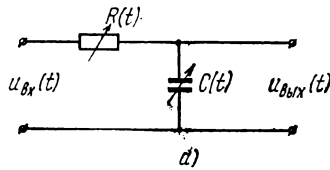
$$q(t) - u_{\text{вых}}(t) C(t) = 0. \quad (15.10)$$

Оба уравнения представлены в неявной форме: первое — дифференциальное относительно производной dq/dt , второе — алгебраическое относительно переменной $u_{\text{вых}}(t)$. Воспользовавшись (см. § 4 гл. 5) методом неявных функций, переходим от уравнений (15.10) к уравнениям, легко реализуемым на АВМ:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = K \left[u_{\text{вх}} - u_{\text{вых}} - R(t) \frac{dq}{dt} \right], \quad q'(0) = 0, \quad q(0) = 0; \quad (15.11)$$

$$\frac{du_{\text{вых}}}{dt} = K [q(t) - u_{\text{вых}} C(t)], \quad u_{\text{вых}}(0) = 0,$$

где K — коэффициент усиления ОУ.



б)

Рис. 15.6.

2) Структурная схема АВМ, воспроизводящая решение системы (15.11), представлена на рис. 15.6, б. На схеме прямоугольниками с надписями $R(t)$, $C(t)$, $-u_{\text{вх}}(t)$ показаны блок-схемы АВМ, воспроизводящие эти заданные функции времени.

§ 4. Нелинейные цепи

Для электрических схем, представленных на рис. 15.2, составить дифференциальные уравнения, описывающие изменение во времени выходного напряжения; разработать структурные и коммутационные схемы АВМ (МН-7) для воспроизведения $u_{\text{вых}}(t)$. Один из параметров цепи R или C — нелинейный и задается в виде функции $i_R = \alpha \varphi_1(u_R)$: $\varphi_1(u_R) = u_R - 0,5u_R^3$; $\text{th } u_R$; $\text{sh } u_R$ или $C(u) = C\varphi_2(u_C)$: $\varphi_2(u_C) = 1 + 0,1u_C$; $1 + 0,2u_C^2$, где $\varphi_1(u_R)$ и $\varphi_2(u_C)$ — безразмерные функции. Предполагается, что численные значения постоянных C , α , L равны 1 в некоторой согласованной системе единиц. В качестве входных напряжений $u_{\text{вх}}(t)$ использовать $\sin 3t$; $t \exp(-t)$; $\exp(-t) \sin 5t$.

Заметим, что исследование нелинейных электрических цепей на АВМ, вообще говоря, требует применения нелинейных функциональных преобразователей, однако в ряде случаев можно (§ 2 гл. 8) обойтись лишь блоками перемножения.

Пример 4. Пусть в RC -цепи рис. 15.4, а) емкость C конденсатора постоянна, а ток, протекающий через резистор, является функцией от приложенного напряжения $i = \alpha \text{sh } u$. Найдём дифференциальное уравнение, описывающее изменение во времени $u_{\text{вых}}(t)$. Ток, протекающий через резистор, равен $i_R = \alpha \text{sh}(u_{\text{вх}} - u_{\text{вых}})$. Ток, протекающий через конденсатор, $i_C = C \frac{du_{\text{вых}}}{dt}$. Так как $i_R = i_C$, имеем следующее нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{du_{\text{вых}}}{dt} = \frac{\alpha}{C} \text{sh}[u_{\text{вх}} - u_{\text{вых}}].$$

Последнее уравнение с помощью введения вспомогательных функций $z_1(t) = \text{ch}[u_{\text{вх}} - u_{\text{вых}}]$, $z_2(t) = \text{sh}[u_{\text{вх}} - u_{\text{вых}}]$ приводится к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t) [u'_{\text{вх}} - u'_{\text{вых}}], \\ \dot{z}_2(t) &= z_1(t) [u'_{\text{вх}} - u'_{\text{вых}}], \\ \dot{u}'_{\text{вых}}(t) &= \frac{\alpha}{C} z_2(t). \end{aligned}$$

Реализовать решение этой системы на АВМ не представляет труда. Остальные задачи рис. 15.2 решаются аналогично рассмотренному примеру.

РЕШЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ИГР ПОРЯДКА $2 \times m$

§ 1. Основные понятия теории игр

При решении ряда практических задач, связанных с экономикой, организацией и управлением производства, а также с военным делом, приходится исследовать так называемые конфликтные ситуации. В конфликтных ситуациях сталкиваются интересы двух и более враждующих сторон. Математическая теория анализа конфликтных ситуаций возникла сравнительно недавно. Она получила название теории игр. Цель теории — определение законов оптимального поведения противников в конфликтных ситуациях. В теории игр исследуется простейшая конфликтная ситуация, называемая игрой. Отличие этой конфликтной ситуации от других — в том, что игра ведется по строго определенным правилам.

Два игрока A и B играют в игру. За игрой наблюдает арбитр. У первого игрока имеется M ходов, а у второго N . Такую игру называют прямоугольной игрой порядка $M \times N$. Если A делает некоторый i -й ход из возможных M , а B делает j -й ход из возможных N , то A получает в качестве выигрыша $+a_{ij}$, а B получает $-a_{ij}$. Для всех возможных i и j выигрыш игрока A можно свести в некоторую таблицу, которую называют платежной матрицей:

$$A = [a_{ij}]; \quad i = 1, 2, \dots, M; \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Элементы этой матрицы называют *платежами*. Они определяют выигрыш игрока A и могут быть как положительными, так и отрицательными числами. Если для некоторых ij величина $a_{ij} > 0$, то игрок A действительно выиграл. Если же $a_{ij} < 0$, то игрок A проиграл эту сумму игроку B .

В теории игр принято называть каждый из возможных ходов каждого игрока *стратегией* или *чистой стратегией*. Игроки делают свои ходы одновременно и потому не знают о выбранном ходе противника. Арбитр в соответствии с платежной матрицей определяет после каждого хода сумму, подлежащую выплате. Игроки, играя, делают ход за ходом. Каждый игрок старается так построить свою последовательность ходов, чтобы противник в сред-

нем за всю игру не сумел извлечь выгоду из его стратегий. В общем случае для этого каждому необходимо чередовать свои стратегии с помощью некоторого случайного процесса. Такие чередуемые с некоторой частотой чистые стратегии называют *смешанными*.

Пусть x_i — вероятность того, что A сделает i -й ход, а y_j — вероятность того, что B сделает j -й ход. Тогда средний выигрыш, получаемый за игру игроком A , равен

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M a_{ij} x_i y_j. \quad (16.1)$$

При этом, конечно, $\sum_{i=1}^M x_i = 1$, $\sum_{j=1}^N y_j = 1$. Некоторые стратегии оказывается нецелесообразно использовать, и вероятность их применения будет равна нулю. Те стратегии, использовать которые целесообразно, называют *активными* стратегиями.

Игрок A , желая максимально выиграть в среднем за всю игру, может рассуждать так: «Предположим, B знает мой выбор, тогда он должен выбрать y_j так, чтобы минимизировать мой выигрыш, т. е. $f(x, y)$. В таком случае я выберу x_i так, чтобы максимизировать выигрыш». Средний выигрыш игрока A будет:

$$v_A = \max_x \min_y f(x, y). \quad (16.2)$$

Рассуждая аналогично, игрок B проиграет не больше, чем

$$v_B = \min_y \max_x f(x, y). \quad (16.3)$$

В теории игр доказывается так называемая теорема о минимаксе, согласно которой $v_A = v_B$. Если x и y выбраны в соответствии с (16.2) и (16.3), то говорят, что игроки используют оптимально смешанные стратегии. Величина v_A называется *ценой игры*.

Платежная матрица может оказаться такой, что один из элементов матрицы, будучи наибольшим из минимумов строк, оказывается наименьшими из максимумов столбцов. Игры подобного типа называют играми с седловой точкой. В этом случае игроки должны придерживаться чистых стратегий, которые пересекаются в седловой точке. Существование седловой точки в игре — случай исключительный, однако его возможность надо иметь в виду.

Если $v_A = 0$, игру называют справедливой. Играя оптимально в справедливую игру достаточно долго, игроки за всю игру в целом не проигрывают и не выигрывают. Если $v_A \neq 0$, то игру называют несправедливой.

Если при игре игрок A не будет придерживаться оптимальных смешанных стратегий, а игрок B будет играть оптимально,

то выигрыш игрока A в среднем будет меньше, чем дает выражение (16.2).

Оптимальные смешанные стратегии определяются элементами платежной матрицы $[a_{ij}]$. При изменении платежей a_{ij} , вообще говоря, изменятся и оптимальные смешанные стратегии. Однако на способ ведения игры не оказывает влияния изменение всех платежей на некоторую постоянную величину или умножение всех платежей на некоторое положительное число. Такие изменения затрагивают лишь цену игры, а не способ ведения игры. Рассмотрим это свойство игры подробнее.

Пусть игра характеризовалась платежной матрицей

$$[a_{ij}]; \quad i=1, 2, \dots, M; \quad j=1, 2, \dots, N.$$

Цена игры, равная среднему выигрышу игрока A , будет

$$v_A = \max_x \min_y \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M a_{ij} x_i y_j.$$

Изменим теперь величины всех платежей на некоторую величину b , т. е. для новой игры $a'_{ij} = a_{ij} + b$. Тогда цена новой игры

$$\begin{aligned} v'_A &= \max_x \min_y \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M (a_{ij} + b) x_i y_j = \\ &= \max_x \min_y \left[b \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M x_i y_j + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M a_{ij} x_i y_j \right] = \\ &= b + \max_x \min_y \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M a_{ij} x_i y_j = b + v_A. \end{aligned}$$

Аналогично, если теперь платежи новой игры будут $a'_{ij} = \lambda a_{ij}$, где $\lambda > 0$, то цена игры

$$v'_A = \max_x \min_y \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \lambda a_{ij} x_i y_j = \lambda \max_x \min_y \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M a_{ij} x_i y_j = \lambda v_A.$$

Под решением игры порядка $M \times N$ понимают определение оптимальных смешанных стратегий и цены игры. Если игра не имеет седловой точки, обычно пытаются понизить порядок игры или отыскать такую квадратную игру $M \times M$ ($M < N$), в которой все стратегии активные.

Практическое использование теории игр часто наталкивается на трудности при определении достаточно точных и надежных числовых параметров задачи — платежей a_{ij} . Очень важно поэтому исследовать поведение решения игровой задачи при изменении величин некоторых платежей a_{ij} . В общем виде эта проблема не изучена, однако априори можно утверждать, что такое изменение повлияет как на цену игры, так и на способ ее веде-

ния. Особенно важно бывает проанализировать «чувствительность» активных стратегий к вариации их платежей и определить те максимальные критические значения платежей активных стратегий, при которых происходит смена активных стратегий.

§ 2. Игры порядка $2 \times m$ и их решение на АВМ

Игра 2×2 — самая простая игра. В результате решения оказывается, что оптимальные стратегии в такой игре либо чистые (в этом случае игра имеет седловую точку), либо смешанные. Решение игры $2 \times m$ может быть сведено к решению $C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}$ игр типа 2×2 . Анализ этих игр даже для небольшого m ($m \leq 10$) бывает весьма утомительным. Использование же АВМ позволяет достаточно просто и быстро решать такие игры.

Рассмотрим суть метода на простом числовом примере, изложив сначала его геометрическую интерпретацию.

Игра задана платежной матрицей

$$\begin{array}{c|ccc} & \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ \hline \text{1} & 2 & 3 & 12 \\ \hline \text{2} & 8 & 5 & 1 \end{array}.$$

Арабскими цифрами 1, 2 помечены чистые стратегии игрока А. Римскими цифрами I, II, III отмечены чистые стратегии его противника В. Пусть игрок А применяет смешанные стратегии x и $1-x$. Иначе говоря, x — это вероятность использования стратегии 1 игроком А, а $1-x$ — соответствующая вероятность для стратегии 2.

Если игрок В применяет чистую стратегию I, то ожидаемый средний платеж будет $z_I = 2x + (1-x)8$. Аналогично, если В пользуется чистой стратегией II, средний платеж будет $z_{II} = 3x + (1-x)5$. И далее, для чистой стратегии III средний платеж $z_{III} = 12x + (1-x)$. Уравнения для z_I , z_{II} , z_{III} — уравнения прямых линий. Построим эти прямые на интервале изменения x [0, 1]. На рис. 16.1 функция $z_{\min}(x) = \min\{z_I(x), z_{II}(x), z_{III}(x)\}$ образована тремя звеньями выпуклой ломаной линии, выделенной на рисунке более жирно, чем остальные части $z_I(x)$, $z_{II}(x)$, $z_{III}(x)$. Оптимальное использование смешанных стратегий игрока А определяется вероятностью

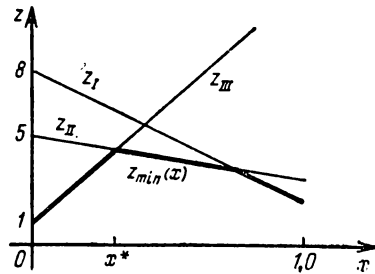


Рис. 16.1.

x^* , для которой имеет место максимум выпуклой ломаной линии минимумов. Из рисунка видно, что цена игры определяется ординатой точки пересечения прямых z_{II} , z_{III} , а оптимальная стратегия — абсциссой точки пересечения. В рассматриваемом примере цена игры $v_A = \frac{57}{13}$, а $x^* = \frac{4}{13}$.

Решение этой игры на АВМ сводится к следующему. АВМ воспроизводит функции $z_I(x)$, $z_{II}(x)$, $z_{III}(x)$ и выделяет для каждого значения x значения минимальной из них. Поскольку ломаная линия минимумов $z_{\min}(x)$ — выпуклая, то только в момент времени, когда $x = x^*$, производная $z'_{\min}(x)$ изменит знак с положительного значения на отрицательное. Факт изменения знака производной используется для автоматического программного останова машины. Машина остановится и тем самым зафиксируются значения $x = x^*$ и $z = \max z_{\min}(x)$.

Структурная схема АВМ показана на рис. 16.2. Схема содержит три интегратора, которые вырабатывают функции среднего

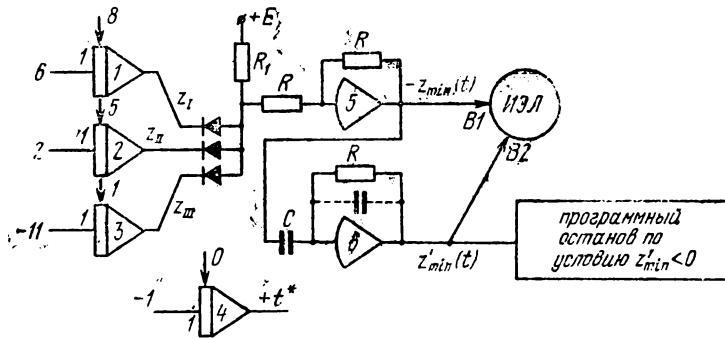


Рис. 16.2.

платежа $z_I(t)$, $z_{II}(t)$, $z_{III}(t)$ при чистых стратегиях игрока B . Эти функции воспроизводятся с помощью определяющих дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} z'_I(t) &= -6, & z_I(0) &= 8; & z'_{II}(t) &= -2, & z_{II}(0) &= 5; \\ z'_{III}(t) &= 11, & z_{III}(0) &= 1. \end{aligned}$$

В схеме роль независимого переменного x выполняет машинная переменная t — время. Если бы число чистых стратегий игрока было бы не три, а m , то изменения структурной схемы коснулись бы лишь числа интеграторов. Выходы интеграторов поступают на входы схемы выделения минимальных значений переменных. Схема состоит из трех диодов, инвертора 5 и резисторов, сопротивления которых $R_1 \ll R$. На вход схемы через резистор R_1 поступает величина $E > z_j$ для $j = I, II, III$. На выходе схемы

вырабатывается функция

$$\begin{aligned} -z_{\min}(t) &= -\min \{z_I(t), z_{II}(t), z_{III}(t), E\} = \\ &= -\min \{z_I(t), z_{II}(t), z_{III}(t)\}. \end{aligned}$$

Эта функция дифференцируется по аргументу t с помощью блока дифференцирования 6, выход которого действует на вход схемы программного останова. В момент времени, соответствующий смене знака производной $z'_{\min}(t)$, схема программного останова прерывает процесс воспроизведения функций. На выходе инвертора 5 зафиксировается значение переменной, равное цене игры $-v_A = -\max z_{\min}(t^*)$, а на выходе интегратора 4, который выполняет роль измерителя времени, зафиксировается значение t^* , соответствующее оптимальной частоте повторения чистой стратегии I.

При практическом программировании АВМ для решения игр порядка $2 \times m$ нет надобности в нахождении функций среднего платежа $z(t)$ и их определяющих дифференциальных уравнений. Все программирование, включая масштабирование, проводится путем преобразования платежной матрицы. Рассмотрим эту методику на примере игры 2×5 . Пусть дана платежная матрица

$$\begin{bmatrix} -6 & -1 & 4 & 7 \\ 7 & -2 & 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

На первом этапе программирования производят масштабирование исходных данных. Для этого отыскивается в платежной матрице наибольший по абсолютной величине элемент. Число 7 округляется в большую сторону до удобного для расчетов числа 10. Величина масштаба определяется по обычному выражению

$$m_z = \frac{100}{10} = 10.$$

На втором этапе платежная матрица умножается на величину масштаба, в результате чего она преобразуется в матрицу

$$\begin{bmatrix} -60 & -10 & 40 & 70 \\ 70 & -20 & 60 & 30 & -20 \end{bmatrix}.$$

Напомним, что при игре с такой платежной матрицей не меняются оптимальные стратегии исходной игры. Меняется лишь цена игры, которая умножается на масштаб m_z . Поэтому операция умножения матрицы на масштаб допустима, так как не меняет оптимальных стратегий.

На третьем этапе определяются начальные условия и коэффициенты передачи интеграторов, воспроизводящих средние плате-

жи при различных чистых стратегиях игрока, который имеет пять чистых стратегий. Для этого выписывается вторая строка платежной матрицы, которая получена на втором этапе, а под этой строкой записываются разности между элементами нижней и верхней строк. Разности делятся на 100 — это и будут коэффициенты передачи интеграторов:

$$\begin{array}{rcccccc} m_z z(0) & 70 & -20 & 60 & 30 & -20 & \text{(I)} \\ m_z z' & 130 & -10 & +50 & -10 & -90 & \text{(II)} \\ \alpha & 1,3 & 0,1 & 0,5 & 0,1 & 0,9 & \text{(III)} \end{array}$$

Легко заметить, что строка (I) представляет собой начальные условия всех интеграторов в масштабе m_z . Далее, строка (II) есть значения производных от функции $z(t)$, представленных в масштабе m_z .

Коммутационная схема АВМ, ориентированная на машину МН-7, показана на рис. 16.3. Интеграторы 5, 6, 7, 8, 15 используются для воспроизведения функций $z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$, $z_4(t)$,

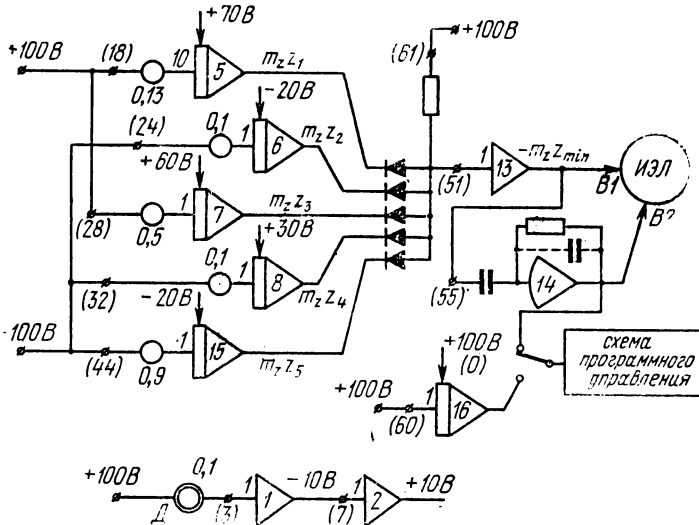


Рис. 16.3.

$z_5(t)$. Схема может работать в двух режимах в зависимости от того, с помощью 16-го или 14-го усилителя организован программный останов.

В первом режиме, когда останов организован по условию перехода $u_{16}(t)$ через нуль, обеспечивается в течение одной секунды воспроизведение на экране ИЭЛ функции $m_z z_{min}(t)$ и про-

изводной от нее во всем допустимом диапазоне изменения частоты повторения первой стратегии $[0, 1]$.

Во втором режиме программный останов организован от усилителя 14 по условию изменения знака функции $z'_{\min}(t)$. Время воспроизведения, вообще говоря, будет меньше одной секунды. Момент останова t^* определяется положением максимума функции $z_{\min}(t)$, который лежит где-то в интервале $0 < t^* < 1$. Значение t^* соответствует оптимальной частоте повторения первой стратегии. Значение t^* получается на выходе интегратора 16, при этом величина начального напряжения (начальное условие) этого интегратора должна равняться нулю.

Следует напомнить, что схема программного управления прерывает процесс интегрирования не в момент выполнения условия, а лишь спустя некоторое время, необходимое для срабатывания релейных цепей отключения машины. Чтобы уменьшить влияние запаздывания на результат t^* и $\max z_{\min}(t)$, на входы всех интеграторов следует подавать напряжения не 100 вольт, а 10 вольт с помощью схемы, состоящей из делителя D и двух инверторов 1 и 2. Тогда время воспроизведения $z_{\min}(t)$ на АВМ будет не одна секунда, а десять. При работе на АВМ целесообразно сначала понаблюдать изменение функции $z_{\min}(t)$, организовав первый режим работы схемы. Затем, уже убедившись, что максимум один и находится в интервале $0 < t < 1$, организовать второй режим для непосредственного решения игры. Причина такой последовательности вызвана существованием двух случаев, когда схема программного управления может не сработать.

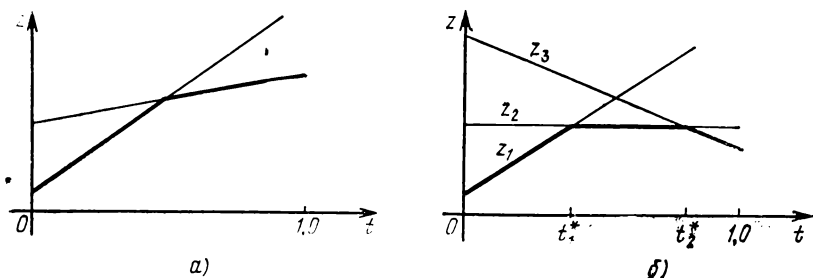


Рис. 16.4.

Первый случай соответствует игре с седловой точкой. Так, игра с платежной матрицей $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ имеет седловую точку, соответствующую платежу 5. Изменение $z_{\min}(t)$, соответствующее этой игре, показано на рис. 16.4, а), из которого видно, что $\max z_{\min}(t)$ достигается при $t^* = 1$, при этом знак производной

при $t=1$ не меняется, следовательно, остановка АВМ не произойдет по условию изменения знака $z'_{\min}(t)$.

Второй случай возникает, когда $z'_{\min}(t)$ имеет вид, показанный на рис. 16.4, б), где имеется горизонтальный участок, соответствующий $\max z_{\min}(t)$. Ясно, что любое t^* из $t_1^* \leq t^* \leq t_2^*$ обеспечивает оптимальную стратегию. Машина остановится лишь в одной крайней точке этого диапазона в t_1^* или t_2^* . Этот случай, вообще говоря, следует считать критическим. Малейшее изменение величины платежей чистой стратегии, соответствующей среднему платежу $z_2(t)$, устраняет возникшую неопределенность.

§ 3. Задачи

Ниже приведены платежные матрицы игр порядка $2 \times m$. Необходимо:

1. Разработать коммутационную схему АВМ, воспроизводящую решение игры;
2. Решить игру и сделать ее справедливой;
3. Определить для активных стратегий критическую область $\sigma(a_{1k}, a_{2k})$ изменения значений ее платежей a_{1k}, a_{2k} , при которых стратегия остается активной, построить эти области сохранения активности стратегии в координатах a_{1k}, a_{2k} .

$$1) \begin{bmatrix} -41 & -22 & 34 & 47 & 55 \\ 61 & 52 & 0 & 16 & 35 \end{bmatrix},$$

$$6) \begin{bmatrix} 23 & 21 & 20 & 24 \\ 20 & 18 & 27 & 30 \end{bmatrix},$$

$$2) \begin{bmatrix} 71 & 0 & 34 \\ 21 & -12 & 65 \end{bmatrix},$$

$$7) \begin{bmatrix} 24 & 27 & 34 & 41 \\ 46 & 31 & 22 & 25 \end{bmatrix},$$

$$3) \begin{bmatrix} -21 & -65 & -56 & -15 \\ -32 & -74 & -61 & -24 \end{bmatrix},$$

$$8) \begin{bmatrix} 100 & 72 & 94 & 0 \\ -80 & 223 & -81 & 10 \end{bmatrix},$$

$$4) \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix},$$

$$9) \begin{bmatrix} 53 & -26 & 32 & 76 & 0 \\ 0 & 57 & 21 & 22 & 64 \end{bmatrix},$$

$$5) \begin{bmatrix} 11 & 18 & 24 & 30 & 24 \\ 24 & 30 & 24 & 23 & 31 \end{bmatrix},$$

$$10) \begin{bmatrix} 13 & -31 & 54 & -71 & 91 \\ -24 & 42 & -63 & 79 & -99 \end{bmatrix}.$$

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКОГО ИЗГИБА БАЛОК

§ 1. Дифференциальные уравнения плоского изгиба

Балка находится в состоянии плоского изгиба, если действующие внешние силы расположены в одной из главных плоскостей инерции балки. Изгиб балки под действием сосредоточенной нагрузки P схематично показан на рис. 17.1, а) и б). Точка O — центр тяжести сечения балки с абсциссой x — в результате изгиба

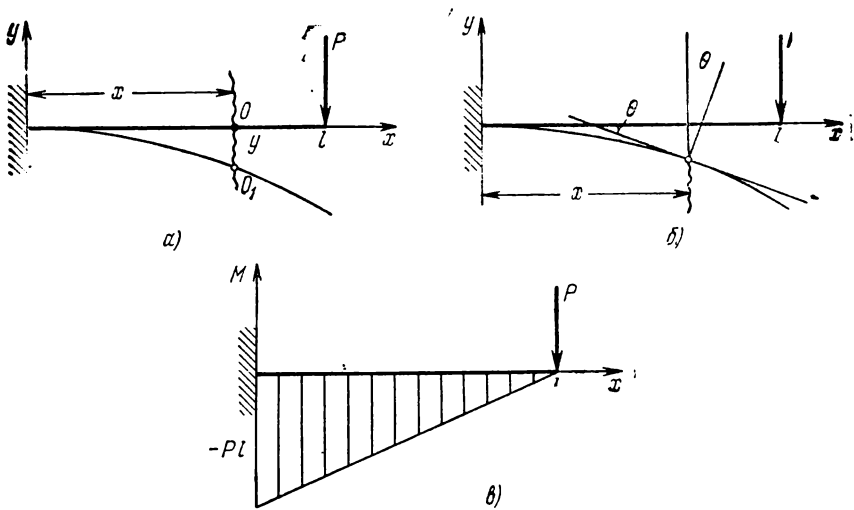


Рис. 17.1.

балки переместилась в точку O_1 . Величина отрезка OO_1 называется прогибом балки в сечении x . Прогиб будем обозначать буквой y .

При деформации сечение балки, оставаясь плоским, поворачивается по отношению к своему первоначальному положению на некоторый угол θ , называемый углом поворота балки в сечении x .

Задача изучения деформаций балки сводится к получению и исследованию уравнений $y=f(x)$ и $\theta=\varphi(x)$. Первое из них описывает изменение прогиба вдоль оси балки под действием нагрузки. Второе описывает изменение углов поворота сечений балки по длине балки. Уравнение $y=f(x)$ называют уравнением упругой линии балки. Причиной изгиба является изгибающий момент $M(x)$, значение которого для каждого сечения x определяется типом нагрузки и местом ее приложения на балке. На рис. 17.1, в) для примера показана эпюра изгибающего момента от действия сосредоточенной силы P .

Кроме геометрических факторов плоского изгиба (прогибов и углов поворотов сечений), важны силовые факторы (изгибающие моменты и поперечные силы). При изгибе балок под действием различного рода нагрузок в отдельных сечениях балки возникают наибольшие изгибающие моменты и поперечные силы. Такие сечения опасны. С них чаще всего начинается разрушение конструкций. Расчет балок на прочность ведется исходя из этих опасных сечений. Выявление сечений с максимальными изгибающими моментами и поперечными силами и выявление картины распределения прогибов и углов поворотов сечений балок основано на решении дифференциальных уравнений, описывающих плоский изгиб.

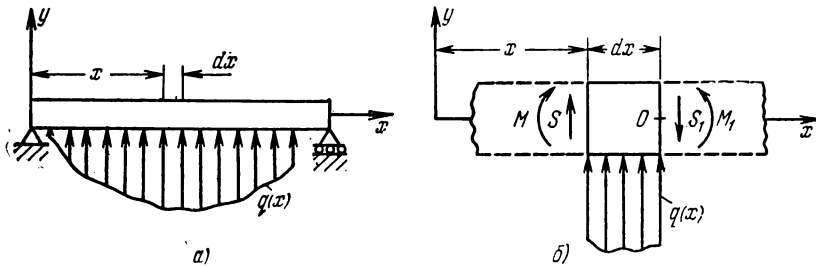


Рис. 17.2.

1. Дифференциальные уравнения изгибающего момента и поперечной силы. Дифференциальные уравнения поперечной силы и изгибающего момента выводятся путем рассмотрения состояния равновесия некоторого бесконечно малого по длине балки элемента dx , нагруженного лишь распределенной нагрузкой плотностью $q(x)$, т. е. в пределах элемента dx не действует сосредоточенная сила или пара сил (рис. 17.2, а)).

В сечении x действует поперечная сила S (рис. 17.2, б)). В сечении $x+dx$ поперечная сила $S_1=S+dS$. Если спроектировать все силы, действующие на элемент dx , на ось y , то получим $S+q(x)dx-(S+dS)=0$, откуда

$$S'(x) = q(x). \quad (17.1)$$

Это значит, что производная от поперечной силы по абсциссе сечения равна плотности сплошной нагрузки в том же сечении.

В сечении x действует изгибающий момент M . В сечении $x+dx$ действует изгибающий момент $M_1=M+dM$. Если теперь взять сумму моментов относительно точки O , то получим $M+Sdx+q(x)dx\frac{dx}{2}-(M+dM)=0$, отсюда, пренебрегая бесконечно малыми второго порядка, имеем

$$M'(x)=S(x) \quad \text{или} \quad M''(x)=q(x). \quad (17.2)$$

Это значит, что вторая производная от изгибающего момента по абсциссе сечения равна плотности сплошной нагрузки.

Уравнения $S(x)=q(x)$, $M''(x)=q(x)$ являются дифференциальными уравнениями и поперечной силы, и изгибающего момента. При интегрировании этих уравнений возникает необходимость в определении постоянных интегрирования, которые выявляются из рассмотрения условий заделки концов балки. Здесь основные случаи таковы:

1) Конец балки свободен. Нулю равны изгибающий момент M и поперечная сила S , т. е. на свободном конце балки $M=S=0$.

2) Конец балки шарнирно опирается. Нулю равен изгибающий момент $M=0$.

В тех случаях, когда балка, помимо сплошной нагрузки $q(x)$, содержит сосредоточенные силы или пары сил, то функции $M(x)$ и $S(x)$ имеют разрывы первого рода в виде скачков в точках приложения сосредоточенных нагрузок, что, к сожалению, не дает возможности воспользоваться в чистом виде дифференциальными уравнениями (17.1) и (17.2) для воспроизведения на АВМ $M(x)$ и $S(x)$.

2. Дифференциальное уравнение упругой линии балки. Чем больше изгибающий момент, тем сильнее искривляется балка, так что кривизна балки в некотором сечении x пропорциональна изгибающему моменту. Эта пропорциональность выражается математически в виде уравнения

$$E\mathcal{I}(x)/\rho(x)=M(x). \quad (17.3)$$

Здесь $\rho(x)$ — радиус кривизны упругой линии балки; $\mathcal{I}(x)$ — момент инерции сечения балки. $\mathcal{I}(x)$ зависит от геометрических размеров и формы сечения. Величина момента инерции характеризует способность балки сопротивляться изгибу в зависимости от геометрии ее сечения. Коэффициент E — модуль упругости. Физически модуль упругости характеризует сопротивляемость материала упругой деформации, из которого сделана балка. Произведение $E\mathcal{I}(x)$ часто называют жесткостью балки.

Дифференциальное уравнение упругой линии балки получает после замены в (17.3) радиуса кривизны его выражением

через координаты x, y :

$$\frac{1}{\rho(x)} = y''(x) [1 + (y'(x))^2]^{-3/2}.$$

Тогда уравнение (17.3) примет вид

$$E\mathcal{J}(x) \cdot y''(x) [1 + (y'(x))^2]^{-3/2} = M(x). \quad (17.4)$$

Угол поворота сечения связан с уравнением упругой линии формулой

$$\text{tg} \theta = \frac{dy}{dx}, \quad (17.5)$$

которая сразу следует из рис. 17.1, б).

Дифференциально уравнение (17.4) иногда можно записать в другой эквивалентной форме, если учесть (17.2):

$$[E\mathcal{J}(x) y''(x) [1 + (y'(x))^2]^{-3/2}]'_x = q(x), \quad (17.6)$$

где $q(x)$ — распределенная нагрузка по длине балки. Возможна еще одна форма записи дифференциального уравнения:

$$[E\mathcal{J}(x) y''(x) [1 + (y'(x))^2]^{-3/2}]'_x = S(x), \quad (17.7)$$

где $S(x)$ — поперечная сила. Понятно, что переход от уравнения (17.4) к уравнениям (17.6) и (17.7) возможен лишь при дифференцируемости функции $M(x)$ соответственно два и один раз.

Уравнения (17.4), (17.5), (17.6), (17.8) можно существенно упростить, когда величина прогиба мала по сравнению с длиной пролета балки. Балки многих конструкций по характеру их работы имеют малые прогибы, которые составляют 1/1000—1/250 доли пролета. У таких балок угол поворота сечения не превосходит одного градуса.

В случае малых прогибов и углов поворота в уравнениях (17.4), (17.6), (17.7) можно пренебречь величиной $(y'(x))^2$ по сравнению с единицей. Тогда уравнение (17.5) преобразуется в уравнение

$$\theta(x) = y'(x), \quad (17.8)$$

а уравнения (17.8), (17.7), (17.6) превращаются в уравнения

$$E\mathcal{J}(x) y''(x) = M(x); \quad (17.9)$$

$$[E\mathcal{J}(x) y''(x)]'_x = S(x); \quad (17.10)$$

$$[E\mathcal{J}(x) y''(x)]'_x = q(x). \quad (17.11)$$

Уравнения (17.8)—(17.11) приближенно описывают деформацию балки в условиях справедливости гипотезы о малых прогибах. Если характер работы балки таков, что гипотеза неверна, необходимо интегрировать точные уравнения (17.4), (17.6),

(17.7) Условия для определения постоянных интегрирования рассматриваемых дифференциальных уравнений зависят от способа заделки концов балки. Приведем основные случаи.

1) Конец балки свободен. Нулю равны изгибающий момент и поперечная сила $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$.

2) Конец балки опирается шарнирно. Нулю равны прогиб и изгибающий момент $y(0) = 0$, $y''(0) = 0$.

3) Конец балки жестко заделан. Нулю равны прогиб и угол поворота сечения $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Отметим, что в зависимости от способа закрепления концов балки придется интегрировать дифференциальные уравнения с начальными или с граничными условиями.

§ 2. Структурные схемы АВМ, воспроизводящие плоский изгиб

Для удобства разработки структурных схем будем предполагать, что в дифференциальных уравнениях (17.2) и (17.4), (17.5), (17.6), (17.7) произведена замена независимой переменной x на $t = x/l$, где l — длина балки. Таким образом, все рассматриваемые в дальнейшем балки будут иметь единичную длину.

В самом общем виде дифференциальное уравнение упругой линии (17.4) для балки единичной длины будет:

$$E\mathcal{J}(t)y''(t)[1+(y'(t))^2]^{-3/2} = M(t). \quad (17.12)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменным коэффициентом и правой частью. Особенность уравнения в том, что оно не разрешено относительно старшей производной $y''(t)$. Воспользуемся методом неявных функций (см. § 4 гл. 5), для чего (17.12) представим в следующей форме:

$$F(y'') = E\mathcal{J}(t)y''(t)[1+(y'(t))^2]^{-3/2} - M(t) = 0.$$

Так как $\frac{\partial F}{\partial y''} = E\mathcal{J}(t)[1+(y'(t))^2]^{-3/2} > 0$, то на АВМ должно быть реализовано дифференциальное уравнение

$$y'''(t) = -K[E\mathcal{J}(t)y''(t)[1+(y'(t))^2]^{-3/2} - M(t)]. \quad (17.13)$$

Структурная схема АВМ, соответствующая этому уравнению, представлена на рис. 17.3. Схема состоит из трех частей. Первая, обведенная пунктиром, разрешает уравнение (17.12) относительно $y''(t)$. Вторая часть по функции $y''(t)$ с помощью двух последовательно включенных интеграторов воспроизводит функции $y'(t)$ и $y(t)$ — прогиб. Часть схемы, обведенная пунктиром, содержит операционные блоки воспроизводящие изгибающий момент $M(t)$ и переменную жесткость балки $E\mathcal{J}(t)$. Внутреннее строение этих блоков не раскрыто, так как оно зависит от

конкретного вида функций $M(t)$ и $E\mathcal{Z}(t)$. Кроме того, в правой части схемы имеется блок нелинейной функции, воспроизводящий функциональную зависимость $[1+(y'(t))^2]^{-3/2}$. Третья часть схемы структурно обособлена. Она состоит из интегратора и схемы программного управления, которая прерывает процесс воспроизведения решения в момент времени, соответствующий

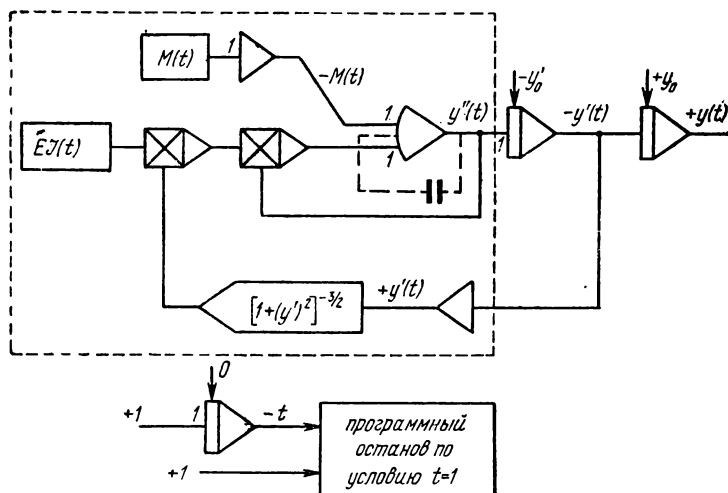


Рис. 17.3.

достижению правого конца балки. Предполагается, что все необходимые действия, связанные с редукцией краевой задачи к задаче Коши, уже выполнены, а потому известны начальные условия $y_0' = y'(0)$, $y_0 = y(0)$.

Когда справедлива гипотеза о малых прогибах, соответствующие дифференциальные уравнения (17.9), (17.10), (17.11) упругой линии с учетом подстановки $t = x/l$ будут:

$$E\mathcal{Z}(t)y''(t) - M(t) = 0; \quad (17.14)$$

$$[E\mathcal{Z}(t)y''(t)]' - S(t) = 0; \quad (17.15)$$

$$[E\mathcal{Z}(t)y''(t)]'' - q(t) = 0. \quad (17.16)$$

Структурная схема АВМ, воспроизводящая решения этих уравнений, представлена на рис. 17.4, а) — в). Каждая из схем функционирует совместно со схемой автоматического прерывания процесса воспроизведения решения, которая показана на рис. 17.4, г). Возможную организацию контроля работы АВМ при моделировании плоского изгиба покажем применительно к уравнению

(17.16). В качестве контрольного соотношения возьмем

$$y(t) + y'(t) + M(t) + S(t) - x(t) = 0,$$

где $x(t)$ — вспомогательная избыточная переменная. Дифферен-

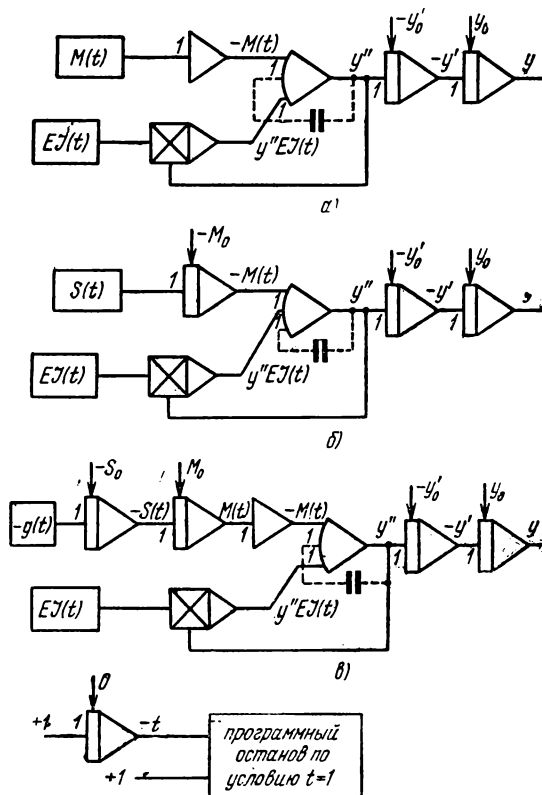


Рис. 17.4.

цируя контрольное соотношение по переменной t , получаем

$$x'(t) = y'(t) + y''(t) + M'(t) + S'(t).$$

Отсюда с учетом (17.16) получаем искомое определяющее уравнение для избыточной переменной $x(t)$:

$$EJ(t) [x'(t) - x(t) + y(t) + M(t) - q(t)] = M(t),$$

$$x(0) = y_0 + y'_0 + M_0 + S_0.$$

В дальнейшем будем заниматься исключительно исследованием изгиба балок, для которых справедлива гипотеза о малых прогибах.

§ 3. Масштабирование переменных

Цель масштабирования — установить соответствие между математическими переменными решаемой задачи и машинными переменными — электрическими напряжениями, с помощью которых математические переменные представляются в АВМ.

Основная трудность масштабирования зависимых математических переменных связана с необходимостью количественной оценки максимальных значений математической переменной, в условиях, когда неизвестно точное аналитическое решение исходной математической задачи. Максимальное значение математической переменной (пусть это — переменная y) необходимо для вычисления масштаба по формуле $m_y = \frac{100}{|y_{\max}|}$. Если значение

y_{\max} взято ошибочным (пусть меньше истинного значения), то при воспроизведении решения на АВМ машинная переменная $u_v = m_y y(t)$ обязательно выйдет из допустимого диапазона линейности ± 100 вольт, что приведет к потере точности результата или вообще к полной потере результата. Обычно при расчете масштабов зависимых математических переменных прибегают к методу масштабных задач (см. § 5 гл. 4).

При расчете масштабов для воспроизведения решений дифференциальных уравнений (17.14), (17.15), (17.16) целесообразно воспользоваться масштабными задачами:

$$E \mathcal{I}_{\min} y''(t) - M_{\max} = 0, \quad (17.17)$$

$$E \mathcal{I}_{\min} y'''(t) - S_{\max} = 0, \quad (17.18)$$

$$E \mathcal{I}_{\min} y^{IV}(t) - q_{\max} = 0. \quad (17.19)$$

В этих уравнениях \mathcal{I}_{\min} есть минимальное значение функции $\mathcal{I}(t)$ на интервале $t[0, 1]$. Соответственно M_{\max} , S_{\max} , q_{\max} есть максимальные значения изгибающего момента $M(t)$, поперечной силы $S(t)$ и плотности сплошной нагрузки $q(t)$. Каждое из уравнений (17.17), (17.18), (17.19) просто решается аналитически. Исходному уравнению (17.14) соответствует уравнение масштабной задачи (17.17). Сравнивая физическое содержание задач, описываемых уравнениями (17.14) и (17.17), априори можно утверждать, что значения всех переменных масштабной задачи будут заведомо больше соответствующих переменных исходной задачи. Действительно, ведь изгибу подвергается балка меньшей жесткости, нагруженная большим изгибающим моментом. Метод масштабных задач особенно привлекателен тем, что дает возможность рассчитать масштабы и построить коммутационные схемы в «общем виде» так, что коэффициенты передачи операционных боков представляются аналитическими выражениями, зависящими от параметров исходной задачи.

Масштабирование независимой математической переменной связано со временем воспроизведения решения задачи на АВМ. Если не принимать никаких мер по изменению масштаба независимой переменной, то время воспроизведения решения будет равно одной секунде (балки имеют единичную длину). Такое время иногда оказывается неудобным для наблюдения и измерения машинных переменных. Более подходящее время 10 или 20 секунд. Как известно (см. § 6 гл. 4), для установления такого времени воспроизведения решения на АВМ необходимо уменьшить в десять и соответственно в двадцать раз коэффициенты передачи всех интеграторов и только интеграторов, используемых в схеме.

§ 4. Редукция краевых задач плоского изгиба к задачам Коши

Редукция краевых задач плоского изгиба к задачам Коши в общем случае может быть осуществлена методами, уже изложенными в §§ 2 и 3 гл. 6. Однако применительно к краевым задачам изгиба статически определимых балок метод комбинацией (§ 3 гл. 6) может использоваться в более простой модификации. Покажем это на двух примерах.

Пример 1. Для балки, изображенной на рис. 17.5, изгибающий момент $M(t)$ и поперечная сила $S(t)$ удовлетворяет краевой задаче

$$\begin{aligned} S'(t) &= -q(t), & S(t^*) &= 0, \\ M'(t) &= S(t), & M(t^*) &= 0, \end{aligned}$$

где $t^* = 1$ — длина балки. Требуется свести эту краевую задачу к эквивалентной задаче Коши

$$\begin{aligned} S'(t) &= -q(t), & S(0) &= S_0, \\ M'(t) &= S(t), & M(0) &= M_0. \end{aligned}$$

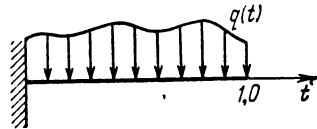


Рис. 17.5.

где S_0, M_0 — недостающие начальные условия, подлежащие определению.

Заметим, что неизвестные силовые факторы — поперечная сила S_0 и изгибающий момент M_0 — представляют собой реакцию стенки, которая защемляет левый конец балки. Это дает основание утверждать, что методы редукции краевых задач плоского изгиба можно рассматривать как способы определения реакций опор балок с помощью АВМ.

Для определения недостающих S_0, M_0 потребуется на АВМ последовательно решить две вспомогательные задачи Коши.

Первую вспомогательную задачу возьмем в виде $S_1'(t) = -q(t), S_1(0) = 0$. Решение ее воспроизводится на АВМ, и определяется значение $S_1(t^*)$. Оказывается, что искомое $S_0 = -S_1(t^*)$. Докажем это.

Общее решение первого уравнения эквивалентной системы: $S(t) = S_0 - \int_0^t q(t) dt$ или $S(t) = S_0 + S_1(t)$, где $S_1(t)$ — решение первой вспомогательной задачи. Для момента $t = t^*$ это равенство дает $S(t^*) = S_0 + S_1(t^*) = 0$.

Вторую вспомогательную задачу Коши возьмем в виде $S'(t) = -q(t)$, $S(0) = S_0$; $M'_1 = S(t)$, $M_1(0) = 0$. Решение ее воспроизводства на АВМ, и определяется значение $M_1(t)$. Оказывается, что искомое $M_0 = -M_1(t^*)$. Докажем это.

Общее решение второго уравнения эквивалентной системы есть $M(t) \Rightarrow M_0 + \int_0^t S(t) dt$ или $M(t) = M_0 + M_1(t)$, где $M_1(t)$ — решение второй вспомогательной задачи. Для момента $t = t^*$

$$M(t^*) = M_0 + M_1(t^*) = 0.$$

Пример 2. Изгиб балки, показанной на рис. 17.6, описывается краевой задачей

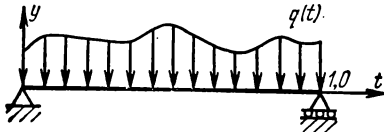


Рис. 17.6.

$$\begin{aligned} M''(t) &= -q(t), & M(0) &= M(t^*) = 0, \\ E\mathcal{Y}(t)y''(t) &= M(t), & y(0) &= y(t^*) = 0, \end{aligned}$$

где $t^* = l$ — длина балки. Требуется найти эквивалентную задачу Коши

$$\begin{aligned} M''(t) &= -q(t), & M(0) &= 0, & M'(0) &= M'_0, \\ E\mathcal{Y}(t)y''(t) &= M(t), & y(0) &= 0, & y'(0) &= y'_0, \end{aligned}$$

где M'_0 , y'_0 — недостающие начальные условия, подлежащие определению.

Для отыскания M'_0 , y'_0 воспроизведем на АВМ решение двух вспомогательных задач Коши.

Первая вспомогательная задача имеет вид $M'_1(t) = -q(t)$, $M_1(0) = M'_1(0) = 0$. Ее решение воспроизводится до $t = t^*$, и определяется значение $M_1(t^*)$. Искомое значение M'_0 оказывается равным $M'_0 = -M_1(t^*)/t$. Докажем это. Общее решение первого уравнения эквивалентной системы есть

$$Mt = M'_0(t) - \int_0^t dt \int_0^t q(t) dt + M(0),$$

или

$$M(t) = M'_0 t + M_1(t) + M(0),$$

где $M_1(t)$ — решение первой вспомогательной задачи. Для момента времени $t = t^*$ имеем $M(t^*) = M'_0 t^* + M_1(t^*) + 0 = 0$.

Вторая вспомогательная задача имеет вид

$$\begin{aligned} M''(t) &= -q(t), & M(0) &= 0, & M'(0) &= M'_1; \\ E\mathcal{Y}(t)y''_1(t) &= M(t), & y_1(0) &= 0, & y'_1(0) &= 0. \end{aligned}$$

Решение этой вспомогательной задачи воспроизводят до $t = t^*$ и определяют значение $y_1(t^*)$. Искомое значение y_0 оказывается равным $y_0 = -y_1(t^*)/t^*$. Докажем это. Общее решение второго уравнения эквивалентной системы Коши есть

$$y(t) = y'_0 t + \int_0^t dt \int_0^t \frac{M(t)}{E\mathcal{Y}(t)} dt + y(0),$$

или $y(t) = y'_0 t + y_1(t) + y(0)$, отсюда для момента $t = t^*$ имеем $y(t^*) = y'_0 t^* + y_1(t^*) + 0$.

§ 5. Эпюры силы и моментов — гладкие функции

Воспроизведение на АВМ решений задач плоского изгиба зависит от существования разрывов у функций $S(t)$ и $M(t)$. Разрывы соответствуют нагрузкам в виде сосредоточенной силы или пары сил (момента), в точках приложения которых возникают разрывы непрерывности первого рода в виде конечных скачков.

В настоящем параграфе мы проиллюстрируем на конкретном примере методику воспроизведения решений задач изгиба для случаев, когда функции $S(t)$ и $M(t)$ — гладкие.

1. Постановка задачи. На рис. 17.6 показана балка единичной длины переменной жесткости $E\mathcal{J}(t)$, которая изгибается под действием сплошной нагрузки переменной плотности $q(t)$. Балка опирается по концам на опоры. Требуется воспроизвести на АВМ картину распределения по длине балки прогибов, углов поворотов сечений, изгибающего момента и поперечной силы.

2. Анализ задачи. Дифференциальное уравнение упругой линии балки описывается краевой задачей

$$\begin{aligned} [E\mathcal{J}(t)y''(t)]'' + q(t) &= 0, \\ y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) &= 0. \end{aligned} \quad (17.20)$$

Смысл краевых условий в том, что прогибы и изгибающие моменты на свободных концах балки равны нулю. В уравнении (17.20) переменной $y(t)$ соответствует прогиб балки в сечении t , $y'(t)$ соответствует углу поворота сечения t , $E\mathcal{J}(t)y''(t)$ соответствует изгибающему моменту $M(t)$, $E\mathcal{J}(t)y'''(t)$ — поперечной силе.

Для удобства масштабирования переменных и простоты реализации решения уравнения (17.20) на АВМ, заданные функции $\mathcal{J}(t)$ и $q(t)$ представим в виде

$$\mathcal{J}(t) = \mathcal{J}_{\min} i(t), \quad q(t) = q_{\max} Q(t), \quad (17.21)$$

где \mathcal{J}_{\min} — минимальный момент инерции поперечного сечения балки, $i(t)$ — безразмерная функция, q_{\max} — максимальное значение плотности сплошной нагрузки, $Q(t)$ — безразмерная функция. С учетом выражений (17.21) уравнение (17.20) можно записать так:

$$[i(t)y''(t)]'' + \frac{q_{\max}}{E\mathcal{J}_{\min}} Q(t) = 0. \quad (17.22)$$

Уравнение (17.22) имеет неявную форму относительно старшей производной. Чтобы облегчить разработку структурной схемы АВМ, введем вспомогательную переменную $z(t) = i(t)y''(t)$. Изгибающий момент $M(t)$ и поперечная сила $S(t)$ выражаются

через новую переменную $z(t)$ так:

$$M(t) = E\mathcal{J}_{\min} z(t), \quad S(t) = M'(t) = E\mathcal{J}_{\min} z'(t).$$

Подстановка $z(t)$ в уравнение (17.22) превращает его в систему

$$z(t) - i(t)y''(t) = 0; \quad z''(t) = -\frac{q_{\max}}{E\mathcal{J}_{\min}} Q(t). \quad (17.23)$$

Первое уравнение системы имеет неявную форму $F(y'') = 0$ относительно переменной y'' . В соответствии с методом неявных функций (§ 4 гл. 5) находим $\partial F/\partial y'' = -i(t) < 0$, откуда получаем уравнение взамен первого уравнения системы (17.23) $y'''(t) = -K[i(t)y''(t) - z(t)]$, где K — коэффициент усиления ОУ. В окончательном виде имеем систему дифференциальных уравнений в форме краевой задачи

$$y'''(t) = -K[i(t)y''(t) - z(t)], \quad y(0) = y(1) = y''(0) = 0;$$

$$z''(t) = -\frac{q_{\max}}{E\mathcal{J}_{\min}} Q(t), \quad z(0) = z(1) = 0.$$

Рассматриваемая балка — статически определимая, поэтому редукцию к задаче Коши целесообразно провести по методу комбинаций.

3. Структурная схема АВМ. Структурная схема изображена на рис. 17.7. Схема является конкретизацией более общей схемы рис. 17.4, в) в соответствии с только что полученной системой

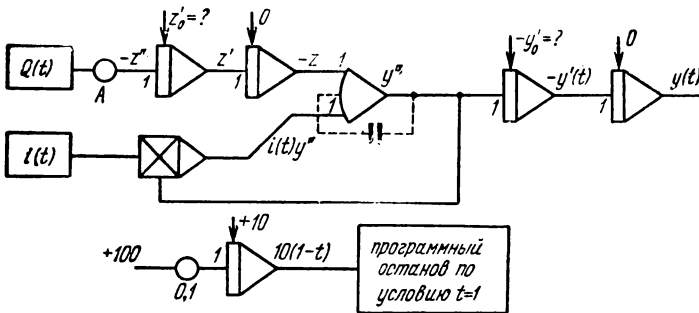


Рис. 17.7.

дифференциальных уравнений. Начальные условия $z'_0 = z'(0)$ и $y_0 = y'(0)$ пока еще не определены. На входе интегратора, вырабатывающего переменную $z'(t)$, стоит потенциометр с коэффициентом передачи $A = \frac{q_{\max}}{E\mathcal{J}_{\min}}$. В схеме предусмотрен программный останов по условию $t=1$, что соответствует прерыванию

процесса интегрирования системы (17.23) по достижению правой опоры балки.

4. Масштабирование переменных. Общий прием масштабирования зависимых переменных задач сопротивления материалов основан на поиске масштабной задачи, имеющей сходное физическое содержание и допускающей простое аналитическое решение, которое должно позволить оценить верхнюю границу изменения переменных исходной задачи. Для рассматриваемой задачи подходящей масштабной задачей будет $y^{IV}(t) = -\frac{q_{\max}}{E\mathcal{J}_{\min}}$,

$y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1)$. Физический смысл масштабной задачи — тот же, что и исходной. Балка единичной длины постоянной жесткости $E\mathcal{J}_{\min}$ опирается по концам и изгибается под действием сплошной нагрузки постоянной плотности q_{\max} . Сравнивая физическое содержание исходной и масштабной задач, можно утверждать, что значения всех переменных масштабной задачи будут заведомо больше значений соответствующих переменных исходной задачи. Масштабная задача допускает простое аналитическое решение:

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= -\frac{A}{24}(t - 2t^3 + t^4), \\ y'(t) &= -\frac{A}{24}(1 - 6t^2 + 4t^3), \\ y''(t) &= \frac{A}{2}(t - t^2), \\ y'''(t) &= \frac{A}{2}(1 - 2t). \end{aligned} \right\} \quad (17.24)$$

Из уравнений (17.24) находятся оценки для максимальных значений переменных исходной задачи:

$$\begin{aligned} |y_{\max}| &= \frac{5}{384}A; \quad |y'_{\max}| = \frac{A}{24}; \quad |y''_{\max}| = \frac{A}{8}; \quad |z_{\max}| = i_{\max} \frac{A}{8}; \\ |z'_{\max}| &= \frac{A}{8}(4i_{\max} + i'_{\max}). \end{aligned}$$

Здесь i_{\max} и i'_{\max} — соответственно максимальные абсолютные значения функций $i(t)$ и ее производной $i'(t)$. Весь расчет масштабов выполнен в табл. 1.

5. Коммутационная схема. Коммутационная схема в отличие от структурной схемы разрабатывается для машинных переменных с учетом особенностей включения блоков конкретной АВМ, на которой предполагается проводить решение задачи.

Для решаемой задачи коммутационная схема, ориентированная на машину МН-7, представлена на рис. 17.8. Схема в основном повторяет топологию структурной схемы рис. 17.7.

Отличие состоит лишь в способе включения операционного блока перемножения.

Таблица 1

Переменная	Максимальное значение переменной	Величина масштаба	Обозначение масштаба
Q	1	$100/1 = 100$	m_{Q0}
i	i_{\max}	$100/i_{\max}$	m_{i0}
y	$5A/384$	$100 \cdot 384/5A$	m_{y0}
y'	$A/24$	$100 \cdot 24/A$	m_{y1}
y''	$A/8$	$100 \cdot 8/A$	m_{y2}
z	$Ai_{\max}/8$	$100 \cdot 8/Ai_{\max}$	m_{z0}
z'	$A(4i_{\max} + i'_{\max}/8)$	$100 \cdot 8/A(4i_{\max} + i'_{\max})$	m_{z1}

Время воспроизведения решения задачи на АВМ выбрано равным десяти секундам. Поэтому коэффициенты передачи передачи всех интеграторов уменьшены в 10 раз.

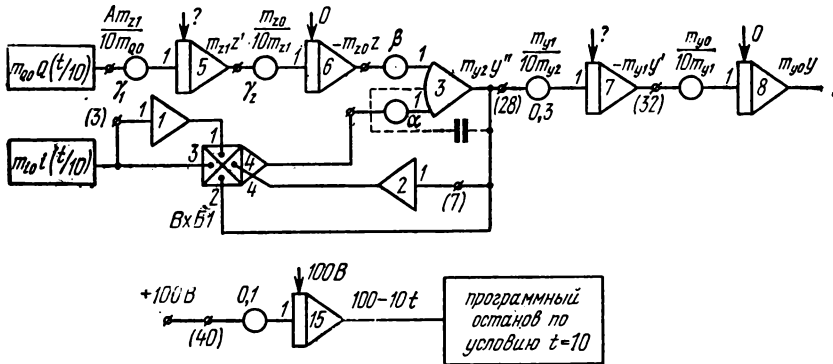


Рис. 17.8.

Для согласования масштабов переменных определим коэффициенты передачи $\gamma_1, \gamma_2, \alpha, \beta$ согласующих потенциометров (см. § 5 гл. 4). Сначала найдем γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 = \frac{A m_{z1}}{10 \cdot m_{Q0}} = \frac{0,8}{4i_{\max} + i'_{\max}}; \quad \gamma_2 = \frac{m_{z0}}{10 \cdot m_{z1}} = 0,4 + 0,1 \frac{i'_{\max}}{i_{\max}}.$$

Для определения коэффициентов α и β запишем выражение для машинных переменных, поступающих на вход ОУ:

$$-m_{z0} z(t) \beta + \alpha \frac{m_{i0} m_{y2}}{100} y''(t) i(t) = 0$$

ИЛИ

$$z(t) - l(t) y''(t) \frac{\alpha}{\beta} \frac{m_{i0} m_{y2}}{100 \cdot m_{z0}} = 0.$$

Сравнивая коэффициенты последнего выражения с коэффициентами первого уравнения системы (17.23), замечаем, что $\frac{\alpha}{\beta} \frac{m_{i0} m_{y2}}{100 \cdot m_{z0}} = 1$. Подставляя величины масштабов, имеем

$$\frac{\alpha}{100\beta} \cdot \frac{100}{i_{\max}} \cdot \frac{100 \cdot 8}{A} \frac{A \cdot i_{\max}}{100 \cdot 8} = 1,$$

отсюда $\frac{\alpha}{\beta} = 1$. Величины α и β целесообразно выбрать равными 1, т. е. $\alpha = \beta = 1$.

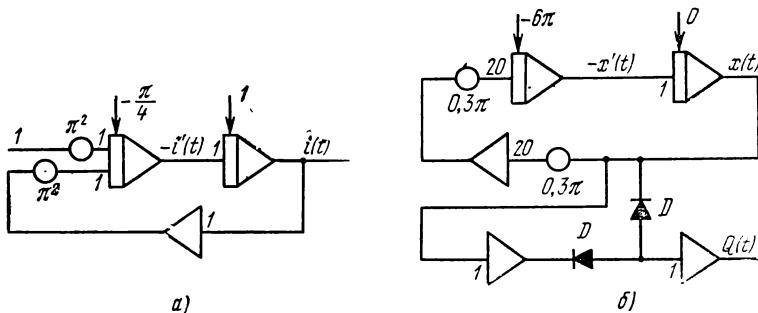


Рис. 17.9.

С целью доведения программирования АВМ для рассматриваемой задачи до конца составим полную коммутационную схему АВМ для случая, когда момент инерции сечения балки

Таблица 2

Переменная	Максимальное значение	Масштаб	Обозначение масштаба
l	1,25	$100/1,25=80$	m_{i0}
i'	$\pi/4$	$400/\pi$	m_{i1}
Q	1	$100/1=100$	m_{Q0}
x	1	$100/1=100$	m_{x0}
x'	6π	$100/(6\pi)$	m_{x1}

меняется как $\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}_{\min}(1 + 0,25 \sin \pi t)$ и балка изгибается под действием сплошной нагрузки плотности

$$q(t) = q_{\max} |\sin 6\pi t|.$$

В этом случае коммутационная схема рис. 17.8 полностью сохраняется и конкретизируется лишь в той части, которая связана с воспроизведением заданных функций $i(t) = 1 + 0,25 \sin \pi t$ и $Q(t) = |\sin 6\pi t|$.

Найдем определяющие дифференциальные уравнения для воспроизведения $i(t)$ и $x(t) = \sin 6\pi t$. Последовательное дифференцирование дает:

$$i''(t) = \pi^2 [1 - i(t)], \quad i(0) = 1, \quad i'(0) = \pi/4;$$

$$x''(t) = -36\pi^2 x(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 6\pi.$$

Структурные схемы АВМ, воспроизводящие функции $i(t)$ и $Q(t)$, показаны на рис. 17.9, а) и б). Расчет масштабов переменных $i(t)$ и $Q(t)$ представлен в табл. 2.

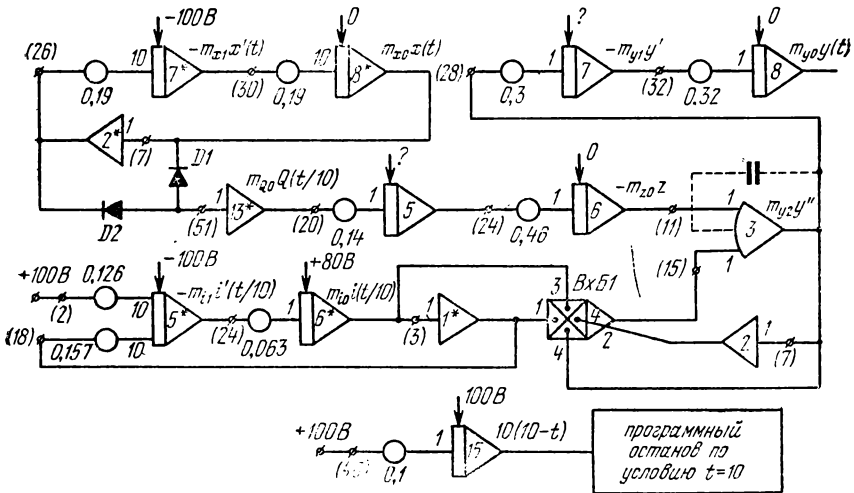


Рис. 17.10.

Полная коммутационная схема представлена на рис. 17.10. Время воспроизведения решения выбрано равным десяти секундам. Для решения задачи требуются две машины МН-7. Операционные блоки дополнительной машины отмечены звездочками.

Задачи. Разработать коммутационные схемы АВМ МН-7 для воспроизведения изгиба балок, показанных на рис. 17.11. Моменты инерции сечений балок меняются по их длине согласно выражению $\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}_{\min} i(t)$, где $i(t)$ —

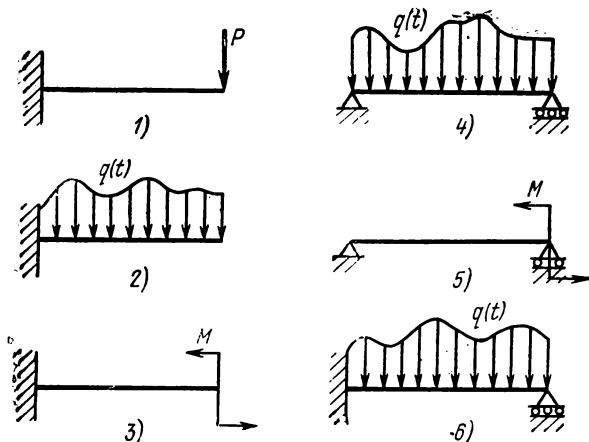


Рис. 17.11.

1. $i(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} t$.
2. $i(t) = \exp(-t)$.
3. $i(t) = 2 - t^2$.
4. $i(t) = 2(1+t)^{-1}$.
5. $i(t) = 2(1+t)^{-2}$.

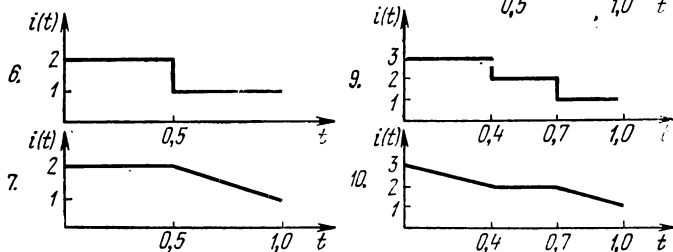
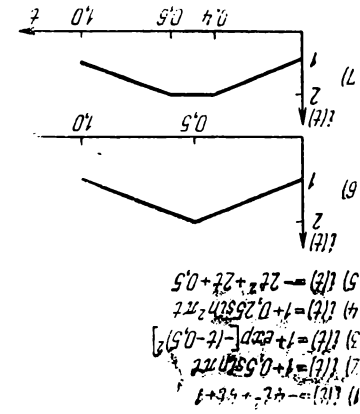


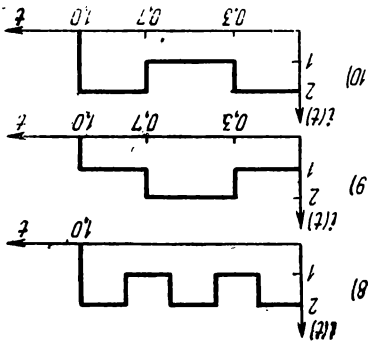
Рис. 17.12.

безразмерная функция. Для консольных балок 1) — 3) функции $i(t)$ приведены на рис. 17.12. Для балок, опирающихся на опоры 4) — 6), функции $i(t)$ показаны на рис. 17.13. Вид сплошной нагрузки $q(t) = q_{\max} Q(t)$ для балок 2), 4), 6) представлен на рис. 17.14; $Q(t)$ — безразмерная функция



1) $f(z) = -4z^2 + 5z + 1$
 2) $f(z) = 1 + 0.5877\pi z$
 3) $f(z) = 1 + \exp[-(z-0.5)^2]$
 4) $f(z) = 1 + 0.2587z^2\pi z$
 5) $f(z) = -2z^2 + 2z + 0.5$

Рис. 17.13.



1) $Q(z) = \exp(-z)$
 2) $Q(z) = \sin^2 z$
 3) $Q(z) = 1 - z$
 4) $Q(z) = 1 - \sin^2 \pi z$
 5) $Q(z) = (1+z)^2$

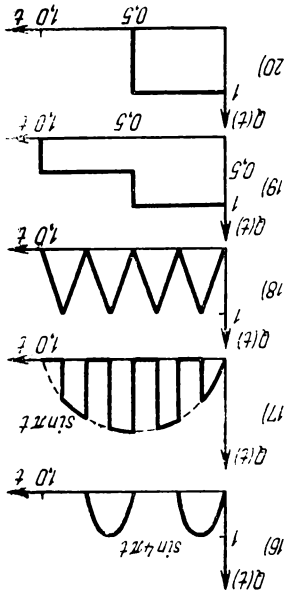
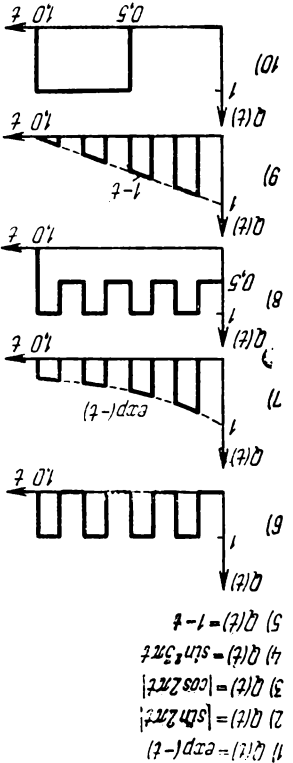


Рис. 17.14.

§ 6. Эпюры силы и моментов — разрывные функции

Во всех рассмотренных ниже примерах эпюры поперечных сил и изгибающих моментов $M(t)$ содержат разрывы непрерывности первого рода в виде конечных скачков в точках приложения сосредоточенных сил и пар сил.

Пример 1. Балка единичной длины шарнирно опирается по краям на опоры (рис. 17.15, а), γ — абсцисса приложения сосредоточенной силы P , $0 < \gamma < 1$. Составить коммутационную схему АВМ, воспроизводящую эпюры поперечной силы $S(t)$ и изгибающего момента $M(t)$.

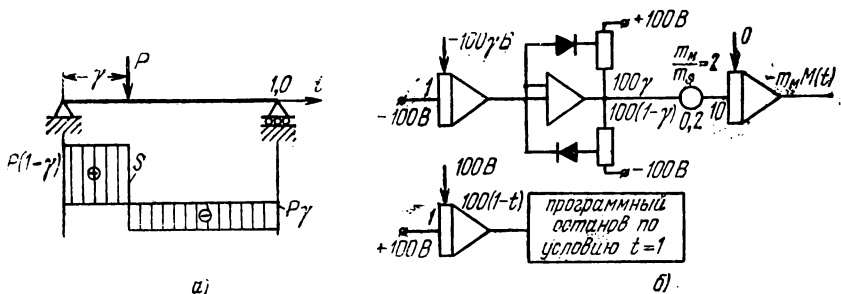


Рис. 17.15.

Коммутационная схема АВМ показана на рис. 17.15, б). Она состоит из двух частей. Первая с помощью нелинейного блока и интегратора воспроизводит эпюру $S(t)$ для любого γ из указанного диапазона. Вторая часть схемы воспроизводит изгибающий момент путем решения дифференциального уравнения

Таблица 3

Переменная	Максимальное значение переменной	Величина масштаба	Обозначение масштаба
S	P	$100/P$	ms
M	$P/2$	$200/P$	mM

$M'(t) = S(t)$, $M(0) = 0$. Дополнительный интегратор, выход которого заведен на вход схемы программного управления, обеспечивает прерывание процесса решения в момент времени, соответствующий правому концу балки. Расчет коэффициентов передачи блоков проведен на основе определения масштабов переменных $S(t)$ и $M(t)$. Весь расчет масштабов выполнен в табл. 3.

Максимальное значение поперечной силы соответствует $\gamma = 0$ или $\gamma = 1$. Максимальное значение изгибающего момента соответ-

ствует $\gamma = 1/2$. Коммутационная схема позволяет воспроизвести $S(t)$ и $M(t)$ для любого места приложения нагрузки, при этом время воспроизведения равно одной секунде.

Пример 2. Схема нагрузки балки показана на рис. 17.16, а), где приведена и эпюра поперечной силы. На этой схеме величина β соответствует длине участка балки, на которой действует сплошная нагрузка постоянной плотности q . Величина γ соответствует абсциссе середины отрезка β . Величина $\gamma_1 = \gamma(1-\beta) + \beta/2$ соответствует абсциссе, где $S(t)$ (поперечная сила) равна нулю.

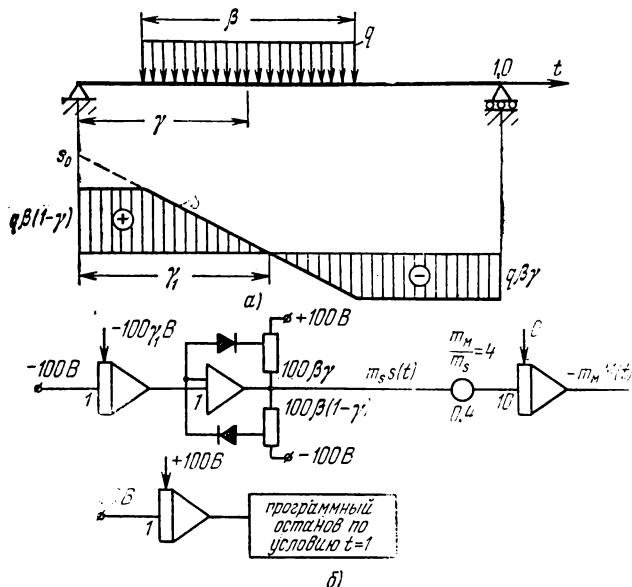


Рис. 17.16

Величина $S_0 = q\gamma_1$. Составить коммутационную схему АВМ для воспроизведения эпюр $S(t)$ и $M(t)$.

Коммутационная схема (рис. 17.16, б)) АВМ с помощью интегратора и схемы ограничения воспроизводит функцию $S(t)$ в масштабе m_s . Последующее решение дифференциального уравнения $M'(t) = S(t)$, $M(0) = 0$ с помощью одного интегратора позволяет воспроизвести функцию $M(t)$.

Коммутационная схема позволяет исследовать распределение изгибающего момента и поперечной силы в различных сечениях балки, при любой длине сплошной нагрузки (отрезка β) и в любом ее месте расположения на балке.

Определение масштабов представления переменных $S(t)$ и $M(t)$ машинными переменными выполнено в табл. 4 для зна-

чений $\beta=1, \gamma=1/2$, что соответствует максимально возможным значениям поперечных сил и изгибающих моментов.

Пример 3. Балка единичной длины, опирающаяся по концам, нагружена сосредоточенной парой сил момента \mathcal{M} (рис. 17.17, а)). Воспроизвести на АВМ эпюры поперечной силы $S(t)$ и изгибающего момента $M(t)$.

Таблица 4

Переменная	Максимальное значение переменной	Величина масштаба	Обозначение масштаба
S	$q/2$	$200/q$	m_s
M	$q/8$	$800/q$	m_m

Схема нагрузки балки и эпюра изгибающего момента представлены на рис. 17.17, а). Из эпюры видно, что она может быть представлена как сумма двух эпюр $M_1(t)$ и $M_2(t)$. Требуемая функция $M(t)$ реализуется путем сложения (рис. 17.17, б)).

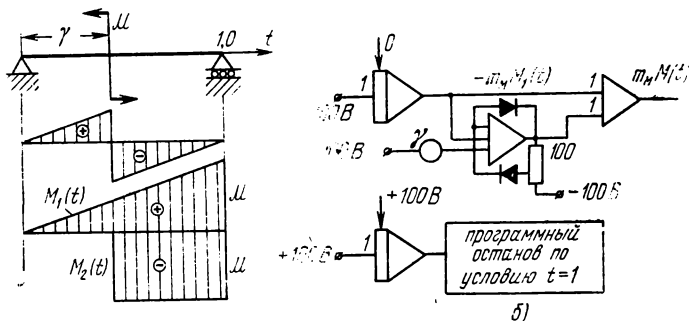


Рис. 17.17.

При расчете масштабов (табл. 5) было учтено, что величина изгибающего момента не может превосходить момента пары сил \mathcal{M} .

Таблица 5

Переменная	Максимальная величина переменной	Величина масштаба	Обозначение масштаба
M	\mathcal{M}	$100 \cdot \mathcal{M}$	m_m

Схема программного управления обеспечивает прерывание процесса воспроизведения $M(t)$ в момент времени $t=1$.

В примерах 1, 2, 3 мы рассмотрели простейшие схемы нагрузок балок и соответствующие им коммутационные схемы. Большое число более сложных задач удается свести к комбинации этих простейших. Основу такого сведения составляет принцип суперпозиции. Поясним смысл этого принципа применительно к рассматриваемым задачам.

Пусть некоторая балка нагружена сосредоточенной силой P , распределенной нагрузкой плотности q и сосредоточенной парой сил с величиной момента \mathcal{M} . Обозначим через $S(t)$ функцию, описывающую распределение поперечной силы по сечениям вдоль балки под действием этой сложной нагрузки. Аналогично через $M(t)$ обозначим функцию, описывающую величину изгибающего момента, вызванного действием сложной нагрузки. Принцип суперпозиции утверждает, что

$$M(t) = M_P(t) + M_q(t) + M_M(t), \quad S(t) = S_P(t) + S_q(t) + S_M(t),$$

где $M_P(t)$, $M_q(t)$, $M_M(t)$ — соответственно изгибающие моменты в сечениях балки, вызванные действием только сосредоточенной силы, только распределенной нагрузки и сосредоточенной пары сил. Аналогичный смысл имеют и функции $S_P(t)$, $S_q(t)$, $S_M(t)$. Другими словами, на АВМ можно воспроизвести отдельные эпюры поперечных сил и моментов от P , q , M , а потом их алгебраически сложить для получения результирующих эпюр.

Таким образом, структурные и коммутационные схемы, соответствующие комбинированным нагрузкам, могут составляться из структурных схем, соответствующих простым видам нагружения.

Пример 4. Схема нагружения балки показана на рис. 17.18, *a*). Балка имеет единичную длину и переменную жесткость $\mathcal{E}\mathcal{J}(t)$. На расстоянии $0 \leq \gamma \leq 1$ от левой опоры действует сосредоточенная сила P . Требуется запрограммировать АВМ МН-7 для воспроизведения картины прогибов и поворотов сечений балки, если жесткость меняется в соответствии с функцией $\mathcal{E}\mathcal{J}(t) = \mathcal{E}\mathcal{J}_{\min} i(t)$, где $i(t) = 1 + 0,25 \sin \pi t$ — заданная безразмерная функция.

Изгиб балки описывается следующей краевой задачей:

$$\mathcal{E}\mathcal{J}(t) y''(t) = M(t), \quad y(0) = y(1) = 0,$$

которой, в самом общем виде, соответствует структурная схема АВМ, представленная на рис. 17.4, *a*). Отметим, что $M(t)$ для такого случая нагружения балки воспроизводился нами в первом примере этого параграфа, а $i(t)$ воспроизводилась в § 5. В окончательном виде структурная схема представлена на рис. 17.18, *b*).

Схема реализует решение системы дифференциальных уравнений $y'''(t) = -K[E\mathcal{E}_{\min}i(t)y''(t) - M(t)]$, $y(0) = y(l) = y''(0) = 0$;

$$i''(t) = \pi^2[1 - i(t)], \quad i(0) = 1, \quad i'(0) = -\frac{\pi}{4}. \quad (17.25)$$

Начальное условие у интегратора, вырабатывающего переменную $-y'(t)$, не определено. Для определения недостающего начального условия $y'(0)$ необходимо провести редукцию краевой задачи к задаче Коши. Программный останов по условию $t=l$

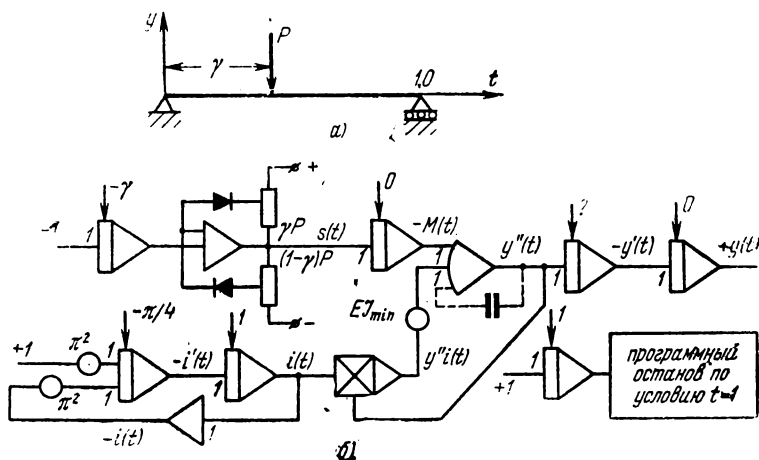


Рис. 17.18.

автоматически прерывает процесс воспроизведения решения в момент достижения правой опоры балки.

Для расчета масштабов переменных в качестве масштабной задачи возьмем ту же самую схему нагружения балки с той лишь разницей, что жесткость балки будет постоянной и равной $E\mathcal{E}_{\min}$. Решая аналитически масштабную задачу, находим, что $|y_{\max}| < \frac{P}{40E\mathcal{E}_{\min}}$, $|y'_{\max}| < \frac{P}{10 \cdot E\mathcal{E}_{\min}}$. Расчет масштабов всех переменных дан в табл. 6.

Коммутационная схема АВМ МН-7, воспроизводящая решение системы дифференциальных уравнений (17.25), представлена на рис. 17.19. Схема в основном повторяет структурную схему. Отличия схемы вызваны особенностями включения блока перемножения в машине МН-7, а также способом организации программного останова. В коммутационной схеме программный останов организован с выхода интегратора 5 по условию, когда выходное напряжение достигнет значения $+100(1-\gamma)$, что соот-

ветствует достижению правой опоры балки. Такой способ организации программного останова позволяет обойтись шестью интеграторами и, следовательно, использовать всего одну машину МН-7.

Таблица 6

Переменная	Максимальная величина переменной	Масштаб переменной	Обозначение масштаба
S	P	$00/P$	m_S
M	$P/2$	$200/P$	m_M
y''	$P/(2E\mathcal{J} \min)$	$200E\mathcal{J} \min/P$	m_{y2}
y'	$P/(10E\mathcal{J} \min)$	$000E\mathcal{J} \min/P$	m_{y1}
y	$P/(40E\mathcal{J} \min)$	$4000E\mathcal{J} \min/P$	m_{y0}
i	1,25	$00/1,25 = 80$	m_{i0}
i'	$\pi/4$	$400/\pi$	m_{i1}

Коэффициенты передачи α и β потенциометров, стоящих на входе усилителя 9, должны быть выбраны из условия согласования масштабов. Проведем это согласование. Для этого запишем аналитическое выражение для электрических напряжений на

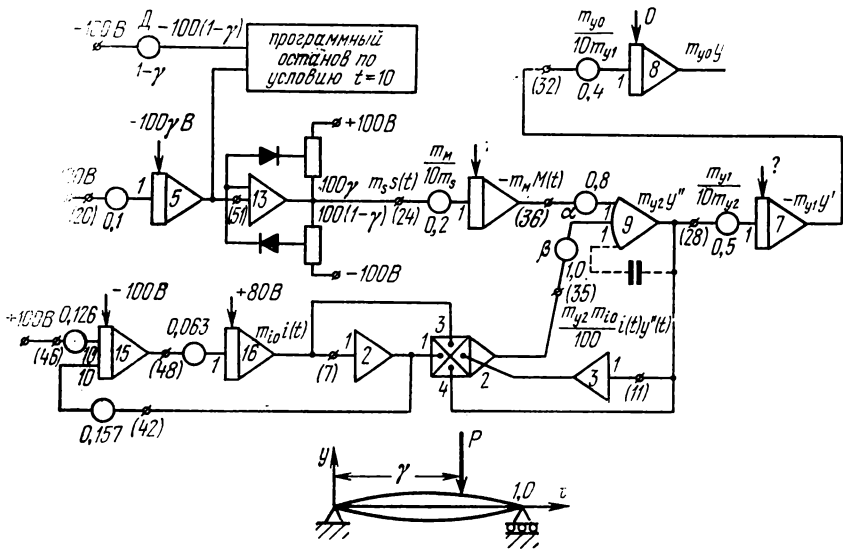


Рис. 17.19.

входе усилителя 9: $\beta m_{y2} m_{i0} i(t) y''(t) / 100 - \alpha m_M M(t) = 0$. Переносим все масштабы и коэффициенты к первому слагаемому,

получаем

$$\frac{\beta}{\alpha} \frac{m_{y2} m_{i0}}{m_M \cdot 100} i(t) y''(t) - M(t) = 0. \tag{17.26}$$

Если сравнить теперь коэффициенты при слагаемых в выражении (17.26) и в $E\mathcal{J}_{\min} i(t) y''(t) - M(t) = 0$, то получим

$$\frac{\beta m_{y2} \cdot m_{i0}}{\alpha m_M \cdot 100} = E\mathcal{J}_{\min}.$$

Отсюда $\beta = 1,25 \alpha$ и, если положить $\beta = 1$, получаем $\alpha = 0,8$. На этом заканчивается разработка коммутационной схемы.

Задачи. 1. Для балок единичной длины, показанных на рис. 17.20, 1) — 5), разработать блок-схемы АВМ, воспроизводящие эпюры поперечной силы $S(t)$ и изгибающего момента $M(t)$.

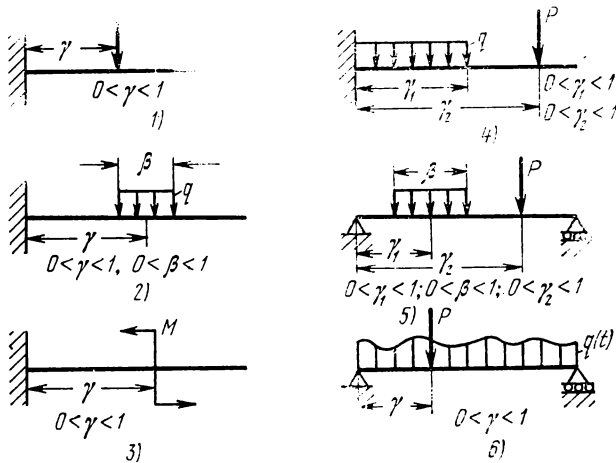


Рис. 17.20.

2. Для исследования прогибов консольных балок единичной длины (рис. 17.20, 1) — 4)) разработать коммутационные схемы, ориентируясь на машину МН-7. Моменты инерции сечений балок переменны по ее длине $\mathcal{J}(t) = \mathcal{J}_{\min} i(t)$, где $i(t)$ — безразмерная функция. Различные виды $i(t)$ даны на рис. 17.12.

3. Разработать коммутационные схемы АВМ для исследования прогиба балки единичной длины (рис. 17.20, 6)). Момент инерции сечения балки меняется по ее длине $\mathcal{J}(t) = \mathcal{J}_{\min} i(t)$. Безразмерные функции $i(t)$ даны на рис. 17.13. Сплошная нагрузка плотностью $q(t) = q_{\max} Q(t)$ действует на балку. Безразмерные функции $Q(t)$ даны на рис. 17.14, $p = q_{\max}$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 1. Постановка задач линейного программирования

Задачи математического программирования (планирования) **овязаны** с вопросами эффективного использования или распределения ограниченных ресурсов для достижения желаемых целей.

Потребность в разработке наилучшего, в некотором смысле, способа поведения (плана) возникает во всех сторонах человеческой деятельности. Поэтому в практике сфера приложения методов математического программирования огромна.

Линейное программирование — частная и наиболее простая ветвь математического программирования. Отличительная ее особенность в том, что она применима к процессам, которые описываются линейными алгебраическими выражениями. В общем виде задачу линейного программирования сформулируем применительно к планированию некоторого производства.

Пусть в данный момент времени предприятие располагает определенным количеством ресурсов разного рода. Под ресурсами понимают сырье, оборудование, людские ресурсы — контингент рабочих и служащих данного предприятия. Все эти ресурсы могут быть использованы для производства самых различных изделий. При этом известно, сколько единиц i -го ресурса требуется для производства одной единицы j -го изделия, и известен доход, который получает предприятие от реализации каждой единицы производимого изделия j -го типа. При планировании работы предприятия целесообразно выпускать такую комбинацию различных изделий, которая обеспечила бы максимальный доход.

Для вывода необходимых математических соотношений введем следующие обозначения: m — число типов ресурсов; n — число различных изделий; a_{ij} — число единиц i -го ресурса, необходимое для производства одного j -го изделия; b_i — максимальное число единиц i -го ресурса, имеющегося в распоряжении предприятия; c_j — доход от реализации одного изделия j -го типа; x_j — **запланированный** уровень производства изделий j -го типа. Набор чисел $(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ называют общим планом **производства**.

В процессе производства происходит использование ресурсов, при этом общий план производства должен быть допустимым по ресурсам, т. е. количество i -го ресурса, используемого согласно плану (x_1, x_2, \dots, x_n) , не должно превосходить наличия b_i . Иначе говоря, для i -го ресурса справедливо линейное неравенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i.$$

В этом неравенстве отрицательные значения x_j не имеют практического смысла, поэтому потребуем, чтобы все $x_j \geq 0$ для $j=1, 2, \dots, n$. Доход, получаемый от реализации x_j единиц изделий j -го типа, будет равен $c_j x_j$. Весь доход в результате реализации всех изделий будет $z(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$.

Задача линейного программирования состоит в отыскании такого допустимого плана (x_1, x_2, \dots, x_n) , который обращал бы в максимум функцию дохода $z(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Таким образом, математически оптимальное планирование производства сводится к подбору такой системы чисел x_1, x_2, \dots, x_n , удовлетворяющих неравенствам

$$x_j \geq 0; \quad j=1, 2, \dots, n; \tag{18.1}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, \quad i=1, 2, \dots, m,$$

чтобы линейная форма

$$z(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \tag{18.2}$$

достигала максимального значения.

Практическое использование линейного программирования часто наталкивается на неточность исходных числовых параметров решаемой задачи. Поэтому бывает очень важно изучить поведение решения задачи при некоторой вариации ее числовых данных. Такие исследования представляют самостоятельный и еще плохо разработанный раздел линейного программирования, называемый параметрическим линейным программированием.

При решении задач линейного программирования на АВМ всегда можно, путем надлежащего изменения коэффициентов передачи операционных блоков, исследовать чувствительность оптимального плана к вариации числовых параметров решаемой задачи.

§ 2. Градиентные методы решения

Эффективные приемы решения на АВМ задач линейного программирования основаны на использовании градиентных методов отыскания экстремумов функционалов при наличии ограничений (§ 4 гл. 10),

Для удобства последующего масштабирования математических переменных выражения (18.1) и (18.2) запишем в следующих обозначениях

$$z(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{\alpha_j}, \quad (18.3)$$

$$g_i(\mathbf{x}) = 1 - \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{\alpha_{ij}} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad x_j \geq 0, \quad (18.4)$$

где $\alpha_j = \frac{1}{c_j}$; $\alpha_{ij} = \frac{b_i}{a_{ij}}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Сначала найдем первую модификацию градиентных уравнений, для чего воспользуемся вспомогательным функционалом (10.82), т. е.

$$I(\mathbf{x}) = \gamma z(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i^2(\mathbf{x}) \operatorname{sgn} g_i(\mathbf{x}).$$

С учетом (18.3), (18.4) и (10.83) получаем искомую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\gamma}{\alpha_j} + \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\alpha_{ij}} \left(1 - \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{\alpha_{ij}} \right) \operatorname{sgn} \left(1 - \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{\alpha_{ij}} \right); \quad (18.5)$$

$$x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

В выражении (18.5) не учитывались ограничения вида $x_j \geq 0$, так как согласно § 4 гл. 10 их реализация на АВМ не представляет особого труда. Требуется лишь дополнительная обратная связь в виде диода, включенного с выхода на вход ОУ, вырабатывающего переменную x_j .

Если же воспользоваться вспомогательным функционалом (10.84), т. е.

$$I(\mathbf{x}) = \gamma z(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i |g_i(\mathbf{x})| \operatorname{sgn} g_i(\mathbf{x}),$$

то получаем вторую модификацию градиентных дифференциальных уравнений, обеспечивающих решение задачи (18.3):

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\gamma}{\alpha_j} - \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\alpha_{ij}} \operatorname{sgn} \left(1 - \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{\alpha_{ij}} \right), \quad (18.6)$$

$$x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

§ 3. Пример

Проиллюстрируем методику программирования АВМ для воспроизведения решения задач линейного программирования на примере следующей простой задачи.

Требуется построить схему АВМ для максимизации линейной формы

$$z(x_1, x_2) = \frac{x_1}{\alpha_1} + \frac{x_2}{\alpha_2}$$

при ограничениях

$$g(x_1, x_2) = 1 - \frac{x_1}{\alpha_{11}} - \frac{x_2}{\alpha_{12}} \geq 0, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Воспользуемся сначала функционалом (10.84) и найдем в соответствии с (18.6) систему дифференциальных уравнений описывающих движение изображающей точки в плоскости x_1, x_2 . Эта система будет такой:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\gamma}{\alpha_1} - \frac{\lambda}{\alpha_{11}} \operatorname{sgn}\left(1 - \frac{x_1}{\alpha_{11}} - \frac{x_2}{\alpha_{12}}\right); \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{\gamma}{\alpha_2} - \frac{\lambda}{\alpha_{12}} \operatorname{sgn}\left(1 - \frac{x_1}{\alpha_{11}} - \frac{x_2}{\alpha_{12}}\right); \end{aligned} \quad (18.7)$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_1(0) = x_2(0) = 0.$$

Структурная схема АВМ, соответствующая уравнениям (18.7), представлена на рис. 18.1.

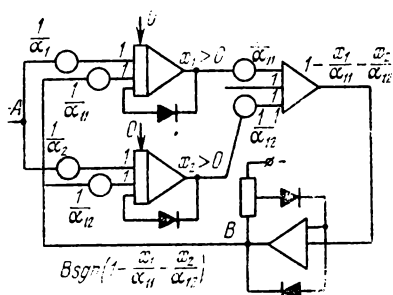


Рис. 18.1.

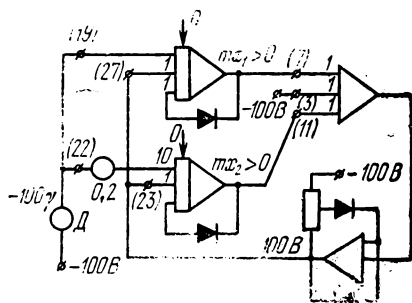


Рис. 18.2.

Схема содержит два интегратора, вырабатывающих переменные $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$. Интегрирующая емкость каждого интегратора шунтируется диодами, вследствие чего на выходе интегратора вырабатываются только положительные значения переменных x_1, x_2 . Работа остальных элементов схемы видна из рисунка.

Коммутационная схема АВМ МН-7 для частной задачи максимизации линейной формы

$$z(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \tag{18.8}$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 \leq 1; x_1 \geq 0; x_2 \geq 0, \tag{18.9}$$

показана на рис. 18.2. Топология коммутационной схемы повторяет топологию структурной схемы рис. 18.1.

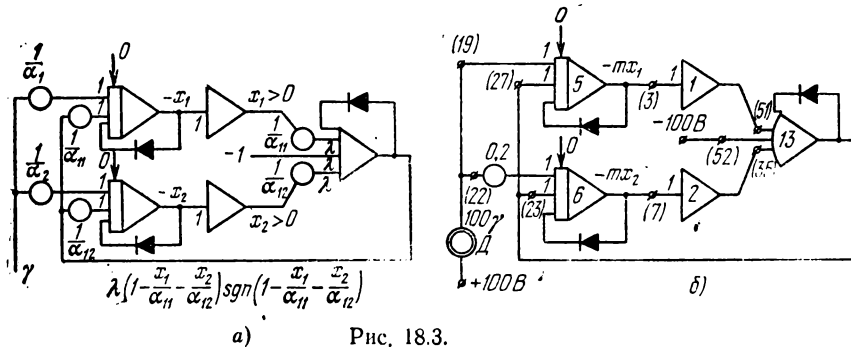
Потребности в масштабировании при решении задач линейного программирования практически не возникает. Величине γ соответствует электрическое напряжение 100γ , получаемого с выхода делителя напряжения D . Величина коэффициента передачи делителя D подбирается в процессе решения задачи на АВМ.

Можно рассматриваемую задачу решить другим методом. Для этого воспользуемся первой модификацией градиентных дифференциальных уравнений (18.5), которые примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\gamma}{\alpha_1} + \frac{\lambda}{\alpha_{11}} \left(1 - \frac{x_1}{\alpha_{11}} - \frac{x_2}{\alpha_{12}}\right) \operatorname{sgn} \left(1 - \frac{x_1}{\alpha_{11}} - \frac{x_2}{\alpha_{12}}\right); \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{\gamma}{\alpha_2} + \frac{\lambda}{\alpha_{12}} \left(1 - \frac{x_1}{\alpha_{11}} - \frac{x_2}{\alpha_{12}}\right) \operatorname{sgn} \left(1 - \frac{x_1}{\alpha_{11}} - \frac{x_2}{\alpha_{12}}\right); \end{aligned} \tag{18.10}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_1(0) = x_2(0) = 0.$$

Структурная схема АВМ, соответствующая (18.10), изображена на рис. 18.3, а). Коммутационная схема машины МН-7 для частного случая (18.8), (18.9) показана на рис. 18.3, б).



а) Рис. 18.3.

Сделаем некоторые замечания об аппаратной реализации задач линейного программирования на АВМ. Как это следует из уравнений (18.5), (18.6) и рассмотренного примера, обе модификации градиентных дифференциальных уравнений примерно равноценны по числу операционных блоков, необходимых для

воспроизведения задачи. Так, в общем случае первая модификация требует $n+2m+2p$ операционных усилителей тока. Здесь n — число переменных, m — число ограничений, p — число отрицательных величин среди чисел a_{ij} . Кроме того, необходимы диоды, число которых равно $n+2m$. Вторая модификация требует меньшего числа диодов $n+m$.

Практическая целесообразность использования АВМ для решения задач линейного программирования ограничена числом переменных n . Когда $n \leq 20$, считается, что использовать АВМ имеет смысл.

§ 4. Задачи

Ориентируясь на аналоговую машину МН-7, составить коммутационные схемы для решения следующих ниже задач линейного программирования. Воспроизводя решение на экране ИЭЛ, обратить внимание на скользящий режим. Исследовать чувствительность оптимального плана к $\pm 10\%$, $\pm 15\%$ и $\pm 20\%$ вариации числовых характеристик оптимизируемой линейной формы.

1. $z = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow (\max);$

$$3x_2 - x_1 \leq 9; \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 18;$$

$$2x_1 - x_2 \leq 10; \quad x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

2. $z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow (\max);$

$$3x_1 + 15x_2 \leq 15; \quad 5x_1 + 2x_2 \leq 10; \quad x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

3. $z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow (\max);$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 6; \quad x_1 + x_2 \geq 1; \quad x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

4. $z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow (\min);$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6; \quad x_1 + 4x_2 \geq 4; \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

5. $z = 6x_1 + 4x_2 \rightarrow (\min);$

$$2x_1 + x_2 \geq 3; \quad x_1 - 2x_2 \leq 2;$$

$$3x_1 + x_2 \geq 0; \quad -x_1 + 2x_2 \geq 1;$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ АНАЛОГОВОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЫ ТИПА МН-7

Назначение и характеристики. Аналоговая вычислительная машина типа МН-7 предназначена для исследования различных физических процессов, описываемых системами обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений не выше шестого порядка.

Общий вид машины показан на рис. П.1. В комплект МН-7 входят: основной блок МН-7; блок питания ЭСВ-6; электронно-лучевой индикатор типа И-5М; соединительные кабели, коммутационные шнуры и скобки.

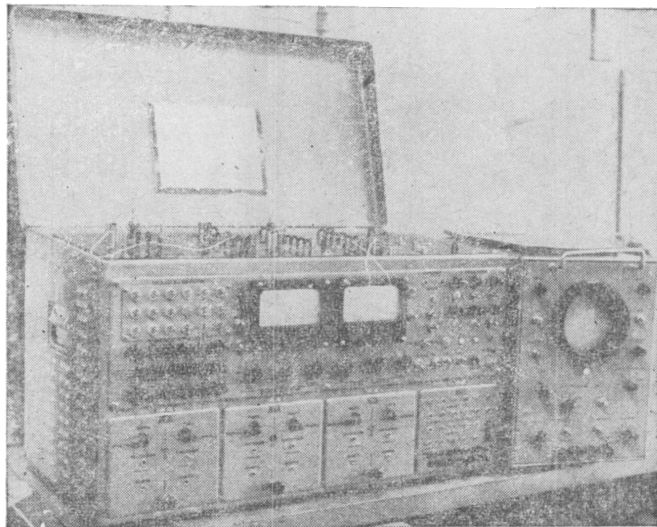


Рис. П.1.

Операционные блоки машины МН-7 построены на базе операционного усилителя постоянного тока с большим коэффициентом усиления. В основном блоке машины размещено 18 ОУ 10 конденсаторов, резисторы, диоды, сменные блоки функциональ-

ных преобразователей, блоки перемножения. Различные сочетания этих элементов и блоков с ОУ дают возможность получать разнообразные схемы соединений операционных блоков и выполнять различные математические операции, к которым относятся: суммирование, интегрирование, дифференцирование, умножение, функциональное преобразование вида $y = \varphi(x)$ и выполнение некоторых логических операций.

Соединение ОУ с элементами или блоками производится на коммутационном поле, находящемся на верхней панели машины. На коммутационное поле выведены входы и выходы операционных блоков.

Основной блок машины МН-7. В состав основного блока машины входят: операционные усилители; коммутационное поле с элементами входных цепей и цепей обратных связей; комплект сменных входных цепей для образования блоков функционального преобразования и умножения; схема управления, контроля и сигнализации.

1. Для выполнения вычислительных операций используются шестнадцать ОУ; два ОУ выполняют специальные функции в схеме управления и контроля машины. В машине МН-7 применен типовой ОУ в виде усилителя постоянного тока УПТ-4, имеющий такие характеристики:

- а) коэффициент усиления без обратной связи более 40 тысяч;
- б) дрейф выходного напряжения, приведенный ко входу усилителя, в режиме инвертирования не превышает ± 3 мВ за 10 мин; в режиме интегрирования при $RC=1$ с дрейф не превышает ± 120 мВ за 100 с;
- в) выходное напряжение может изменяться в пределах ± 100 В;
- г) минимальное сопротивление нагрузки 10 кОм (при подключении к выходному каскаду дополнительного анодного резистора).

2. Коммутационное поле машины МН-7 расположено на верхней панели основного блока. Схема коммутационного поля показана на рис. П.2.

На коммутационном поле оператором выполняются следующие действия:

- а) коммутация схем операционных блоков (для выполнения отдельных линейных и нелинейных математических операций);
- б) коммутация операционных блоков между собой при наборе задачи по коммутационной схеме АВМ;
- в) составление вспомогательных схем для выполнения операций, связанных с измерением времени и электрических напряжений.

Кроме того, на коммутационном поле производится установка значений коэффициентов передачи операционных блоков.

На коммутационном поле изображены в виде треугольников с порядковыми номерами от 1 до 16 операционные усилители.

Первый слева вертикальный ряд ОУ (1—4) с электрическими цепями входа и обратной связи предназначен для образования масштабных усилителей и сумматоров. Входная точка каждого ОУ выведена на шесть параллельно включенных клемм. Каждый из усилителей имеет четыре входа: два в виде постоянных резисторов и два в виде потенциометров. Кроме того, ОУ содержит по два резистора в цепи обратной связи, которые подключаются к сетке усилителя с помощью специальных скоб. Ко входу любого усилителя (например, ко входу первого) с помощью коммутационного шнура может быть подключен любой входной резистор из набора другого усилителя, например, 15-й входной резистор.

Второй ряд ОУ (5—8) предназначен для образования интеграторов, интегросумматоров и сумматоров. В цепях обратной связи этих усилителей с помощью тумблеров может быть включен либо конденсатор (1 мкФ), либо резистор (1 МОм).

Третий ряд усилителей (9—12) повторяет первый ряд усилителей (1—4) и выполняет те же функции.

Четвертый ряд ОУ (13—16) позволяет образовывать различные операционные блоки. Сюда относятся: блоки дифференцирования по входам 55—58; интегросумматоры на базе ОУ 15 и 16; сумматоры ОУ (13—16).

Усилитель 17 используется для образования схемы эталонного напряжения и схемы программного управления. На базе усилителя 18 построен источник для получения напряжения —100 В.

Внизу под изображением усилителей на коммутационном поле имеется гравировка в виде прямоугольника Б₁—Б₄ (для сменных входных цепей функциональных блоков и блоков перемножения). Рядом с прямоугольниками изображены входные и выходные гнезда, которые при помощи шнуровой коммутации подсоединяются к входам и выходам тех или иных ОУ для образования соответствующих функциональных блоков и блоков перемножения.

Для образования различных диодных блоков в правой части коммутационного поля помещены 8 диодов, аноды и катоды которых выведены на гнезда коммутационного поля. Рядом с диодами помещены 4 пары потенциометров, которые позволяют регулировать напряжение «+Е» и «-Е» от 0 до 100 В и подключать его в необходимые места схемы. С помощью этих потенциометров совместно с диодами, включаемыми во входную цепь или цепь обратной связи ОУ, коммутируются различные диодные схемы.

Между вертикальными группами усилителей в центральной части коммутационного поля расположены 6 гнезд дополнитель-

ных анодных нагрузок 50 кОм (3 гнезда) и 20 кОм (также 3 гнезда).

Соединение входов и выходов операционных блоков при наборе коммутационных схем производится в левой части коммутационного поля на наборном поле.

В центре наборного поля размещены 64 гнезда, которые являются входами входных цепей ОУ (1—16). Эти гнезда обведены прямоугольной рамкой с надписью ВХОДЫ. В средней рамке с гравировкой ВЫХОДЫ размещены выходные клеммы 16-ти усилителей. Для удобства коммутации выход каждого усилителя повторен четыре раза. Кроме выходов усилителей, здесь же помещены дополнительные гнезда, на которые поданы напряжения ± 100 В, и гнезда А₁—А₄ электрически соединены с одноименными гнездами, расположенными в разных местах коммутационного поля.

Во внешней рамке размещено по 4 гнезда входов сменных нелинейных блоков (ВхБ1—ВхБ4), гнезда ВХОД и ВЫХОД блока запаздывания и 18 гнезд ВНЕШНЯЯ АППАРАТУРА, которые могут быть использованы для связи с внешней аппаратурой или для параллельной работы с другой АВМ. Здесь же установлены гнезда 1РО—4РО, соединенные с переключающими контактами реле РО, которые могут быть использованы для различных программных переключений, и 2 гнезда «1 Гц» для получения импульсов частоты 1 Гц.

Слева внизу коммутационного поля расположены 24 гнезда ВХОДЫ с гравировкой 2, 4, 6, ... 48, т. е. все четные номера с 2 по 48. Это входные гнезда потенциометров, служащих для задания коэффициентов передачи операционных блоков. Сами же потенциометры расположены на коммутационном поле перед изображением усилителей и обозначены теми же номерами.

Справа от гнезд ВХОДЫ находится изображение делителя напряжения в виде кружка с гравировкой Д внутри и входным ВХ и выходным ВЫХ гнездами. Рядом с изображением делителя находятся гнезда ЦЭЛ для подключения входов электронно-лучевого индикатора.

В центральной части коммутационного поля, внизу, расположены 18 гнезд с общей гравировкой ВЫХОДЫ УСИЛИТЕЛЕЙ МН-7 для коммутации выходов усилителей с вольтметрами V1 (гнезда «+» и «—») и V2. Рядом же расположены гнезда источников напряжения ± 100 В. Справа от гнезд приборов V1 и V2 расположены два тумблера, имеющие гравировки ЭТАЛОННОЕ НАПРЯЖЕНИЕ — ПРОГРАММНЫЙ РЕЖИМ и ОСТАНОВ — ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕ, предназначенные для установки соответствующих режимов работы схемы управления. Рядом с тумблером ЭТАЛОННОЕ НАПРЯЖЕНИЕ — ПРОГРАММНЫЙ РЕЖИМ имеются гнезда ВХ для задания эталонного напряже-

ния, два гнезда входов («1» и «2») для ПРОГРАММНОГО РЕЖИМА и два гнезда ВЫХ.

Справа от тумблера ОСТАНОВ — ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕ расположены три гнезда — контакты реле РИ.

Для задания начальных условий в правой части коммутационного поля имеются гнезда У5, У6, У7, У8, У15, У16 и I, II, III, IV, V, VI с общей гравировкой НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ.

В разных частях коммутационного поля расположены несколько групп обезличенных гнезд, соединенных чертой (размножители), и земляные гнезда, предназначенные для удобства коммутации функциональных звеньев при эксплуатации МН-7.

3. Схема управления, контроля и сигнализации машины МН-7 служит для настройки, контроля и управления операционными блоками и усилителями. Она содержит блоки: управления; настройки нуля и контроля ОУ; задания начальных условий и постоянных возмущений и ряд других блоков.

Все основные элементы, служащие для управления работой и контроля установки, выведены на панель управления (1) (рис. П.3).

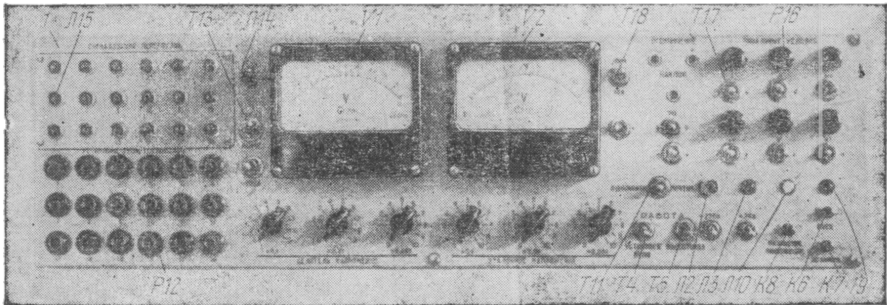


Рис. П.3.

1) Блок управления служит для включения машины и для обеспечения следующих режимов работы: УСТАНОВКА НУЛЕЙ, ПОДГОТОВКА, РАБОТА.

Все подготовительные операции, в том числе и набор коммутационной схемы задачи, выполняются на включенной машине. Подключение блоков питания ЭСВ-6 производится к сети переменного тока напряжением 220 В. При этом на панели управления следует включить тумблер «220 В» и тумблер «=26 В». Одновременно с включением загораются сигнальные лампочки (Л2 и Л3 соответственно). С включением тумблера «=26 В» от источника питания поступает постоянное напряжение 26 В, кото-

рое служит для питания электромеханических реле схемы управления.

В процессе подготовки МН-7 и решения задач машина пребывает в различных режимах работы. Выбор одного из них осуществляется с помощью тумблеров Т4, Т5, Т11.

В режиме ПОДГОТОВКА набирается коммутационная схема решаемой задачи, устанавливаются коэффициенты передачи операционных блоков, настраиваются функциональные блоки. Этому режиму соответствует положение тумблеров Т4 РАБОТА, Т5 ПОДГОТОВКА.

В режиме РАБОТА задаются начальные условия, постоянные возмущения и воспроизводится решение задачи, при этом тумблеры должны быть в положении Т4 РАБОТА, Т5 РАБОТА. Непосредственный пуск АВМ осуществляется кнопкой ПУСК К6.

Работа по воспроизведению решения задачи АВМ может протекать однократно. Это — так называемый однократный режим решения, ему соответствует положение тумблера Т11 ОДНОКРАТ. В этом режиме управление машиной осуществляет человек, работающий на АВМ. С помощью кнопки ПУСК К6 осуществляется пуск машины; кнопкой К7 ОСТАНОВ можно прервать воспроизведение решения; кнопкой К8 ИСХОДНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ машина возвращается в состояние, которое она имела до пуска.

Воспроизведение решения задачи МН-7 может автоматически проходить многократно. Этот режим автоматического повторения решения возникает, когда тумблер Т11 занимает положение ПОВТОР. Положение тумблера Т11 всегда должно быть согласовано с положением переключателя РЕЖИМ РАБОТЫ, расположенного на лицевой панели индикатора И-5М, так как в режиме автоматического повторения решения МН-7 управляет программный блок, находящийся в И-5М.

2) Блок настройки нулей и контроля усилителей постоянного тока обеспечивает настройку нулей всех 18 ОУ. Установка нулей усилителей производится изменением напряжений на сетках вторых каскадов усилителей при помощи восемнадцати ручек (Р12) потенциометров с общей гравировкой УСТАНОВКА НУЛЯ УСИЛИТЕЛЕЙ. Для контроля нулей усилителей используются стрелочный прибор на три предела измерения V1. Тумблер Т13 ИЗМЕРЕНИЕ — КОМПЕНСАЦИЯ, установленный слева от прибора, должен быть установлен в положение ИЗМЕРЕНИЯ. При этом одна из клеммы прибора («—») автоматически заземляется. Вторая клемма прибора соединена с гнездом коммутационного поля +V1.

Для настройки нулей выходы усилителей последовательно подключаются внешней шнуровой коммутацией к гнезду +V1. Установка производится сначала по шкале 2,5 В и уточняется

по шкале 0,1 В Переключение шкал осуществляется переключателем П14.

Контроль за выходом усилителей за границы допустимого диапазона ± 100 В осуществляется с помощью 18 неоновых ламп Л15, подключенных через высокоомные делители к выходам усилителей. Потенциометры настраиваются так, чтобы лампы загорались при напряжении на выходе усилителя ± 105 В.

3) Схема задания начальных условий и постоянных возмущений содержит шесть потенциометров, ручки которых (Р16) выведены на панель управления 1. На потенциометры схемой подается напряжение 100 В. Знак напряжения устанавливается при помощи тумблеров Т17. Движки потенциометров выведены на гнезда коммутационного поля. Эти гнезда внешними коммутационными шнурами соединяются со входами интегрирующих усилителей, по которым задаются начальные условия (гнезда У5, У6, У7, У5, У15 и У16).

При помощи схемы задания начальных условий можно подавать и постоянные возмущения на любой из входов операционных блоков. Контроль задания начальных условий и постоянных возмущений можно производить компенсационным методом по стрелочному прибору с нулем посередине шкалы V1, либо по стрелочному прибору с нулем слева шкалы V2, если по условиям задачи достаточно задавать их с точностью $\pm 1\%$. При этом для V2 тумблером Т18 изменяются пределы измерений (100 В и 10 В), а тумблером Т19 переключается знак (+ или —) измеряемого напряжения.

4) Схема компенсационного измерения напряжений строится по схеме рис. 2.9 из источника эталонного напряжения (усилитель У17 с трехдекадным сопротивлением в цепи обратной связи) и вольтметра V1 (тумблер Т13 ИЗМЕРЕНИЕ — КОМПЕНСАЦИЯ включается при этом в положение КОМПЕНСАЦИЯ). Если на вход усилителя У17 подано напряжение 100 В, на выходе его может быть получено любое напряжение от 0 до ± 100 В, через 0,1 В. Для измерения к гнезду прибора V1 соответствующего знака подается выходное напряжение усилителя У17, а к другому подключается измеряемое напряжение. Усилитель при работе в этом режиме переключается в состояние ЭТАЛОН.НАПР. соответствующим тумблером на коммутационном поле машины.

Рекомендуемый порядок работы на АВМ. 1. Включение машины. Для этого на панели управления включить тумблер «220 В» и тумблер «26 В». При этом загорятся сигнальные лампы Л2, Л3.

2. Коммутация схем операционных блоков производится при положении тумблеров Т4 УСТАНОВКА НУЛЯ, Т5 ПОДГОТОВКА. Коммутация операционных блоков состоит в подключении к

к усилителям постоянного тока входных цепей и цепей обратных связей, номера которых указаны в коммутационной схеме. Коммутация проводится с помощью скобок и шнуров.

3. Установка нулей усилителей осуществляется при положении тумблеров Т4 и Т5, как в п. 2. Установка нулей производится с помощью 18 ручек Р12 переменных резисторов. Для контроля используется вольтметр V1 (нуль посередине). При этом тумблер Т13 должен стоять в положении ИЗМЕРЕНИЕ. Для установки нулей выходы всех усилителей последовательно подключаются внешней шнуровой коммутацией к гнезду +V1, расположенному на коммутационном поле. Установка производится по шкале 2,5 В и уточняется по шкале 0,1 В. Переключение шкал осуществляется переключателем П14.

4. Коммутация операционных блоков АВМ между собой проводится в левой части коммутационного поля, где гравировкой выделены 64 гнезда с надписью ВХОДЫ. Здесь же группа гнезд в прямоугольной рамке с надписью ВЫХОДЫ представляет собой выходы усилителей. Положение тумблеров Т4 и Т5, как в п. 2 и 3. Коммутация производится гибкими шнурами.

5. Установка заданных коэффициентов передачи сумматоров и интеграторов производится при положении тумблеров Т4 РАБОТА, Т5 ПОДГОТОВКА.

Коэффициенты передачи сумматоров 0,1; 0,2; 0,5; 1; 2; 5; 10 и коэффициенты передачи интегратора 1; 10 устанавливаются путем надлежащей коммутации резисторов, образующих входы и обратные связи операционных усилителей. Если требуемые коэффициенты передачи иные, чем приведенные выше, то установка их производится с помощью потенциометров, входы которых имеют четные номера. Для удобства установки коэффициентов соответствующие входные гнезда вынесены в левой нижней части наборного поля. Верхний ряд гнезд с номерами 2, 6, 10, 14, 18, ... 46 обеспечивает задания коэффициентов передачи в диапазоне 0—10, нижний ряд гнезд с номерами 4, 8, 12, 16, 20, ... 48— в диапазоне 0—1.

Если, например, необходимо установить коэффициент передачи интегратора 5 из диапазона 0—10 (например, 6), то на соответствующее гнездо (18) от делителя напряжения Д подается напряжение 10 В. На выходе интегратора 5 измеряют напряжения с помощью одного из вольтметров. При этом меняют положение движка потенциометра, вращая отвертку, вставленную в шлиц.

Положение, для которого выходное напряжение интегратора равно 60 вольт, соответствует заданному коэффициенту передачи 6. Когда необходимо задать коэффициент передачи из диапазона 0—1, то поступают так же, с той лишь разницей, что на вход подают не 10 В, а 100 В.

б. Задание начальных условий интеграторов осуществляется при положении тумблеров Т4 РАБОТА, Т5 РАБОТА. Гнезда интеграторов У5, У6, У7, У8, У15, У16, расположенные в правой нижней части коммутационного поля, с помощью скобок или шнуров подключаются к выходам потенциометров I, II, III, IV, VI. Выходы интеграторов последовательно подключаются внешней шнуровой коммутацией к одному из вольтметров. Изменяя положение потенциометров Р16 НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ, добиваются на выходе потенциометра требуемого значения напряжения. Знак напряжения задается с помощью тумблеров Т17.

7. Пуск машины и воспроизведение решения осуществляется при положении тумблеров Т4 РАБОТА, Т5 РАБОТА, как и в п. 6.

1) В режиме однократного решения положение тумблера Т11 — ОДНОКРАТН. Это положение Т11 должно быть согласовано с положением переключателя режимов работ электронно-лучевого индикатора И-5М. Пуск осуществляется с помощью кнопки К6 ПУСК. При нажатии кнопки б загорается сигнальная лампа Л9.

Для прерывания процесса решения с целью фиксации значений машинных переменных используется кнопка К7 — ОСТАНОВ. При нажатии кнопки К7 процесс воспроизведения решения прерывается, сигнальная лампа Л9 гаснет. При повторном нажатии кнопки К6 — ПУСК решение воспроизводится дальше с прерванного места. При нажатии кнопки К8 — ИСХОДНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ машина возвращается в исходное положение, при этом гаснет сигнальная лампа Л9 и загорается сигнальная лампа Л10.

2) В режиме повторного решения положение Т11 — ПОВТОР. Это положение Т11 должно быть согласовано с положением переключателя режимов работ электроннолучевого индикатора И-5М. На И-5М должен быть установлен РЕЖИМ 2. С этого момента решение периодически воспроизводится машиной автоматически.

8. Наблюдение и регистрация машинных переменных осуществляется с помощью индикатора И-5М и вольтметров V1 и V2.

1) Наблюдение машинных переменных в функции времени осуществляется коммутацией соответствующих выходов операционных блоков с вертикальными входами В1 и В2 индикатора. Эти входы на коммутационном поле расположены слева внизу. Одновременно на экране можно наблюдать изменение двух машинных переменных, что достигается включением на панели индикатора тумблера КОММУТАТОР.

При наблюдении машинных переменных в функции времени важно помнить, что наблюдение можно проводить как в режиме однократного, так и повторного решения, длительность развертки индикатора должна быть отрегулирована так, чтобы была не-

сколько больше времени воспроизведения решения. (Максимальная длительность развертки 250 с, рекомендуемое максимальное время воспроизведения задачи не более 150 секунд.)

2) Наблюдение машинных переменных $u_1 = \varphi_1(u_3)$, $u_2 = \varphi_2(u_3)$ в функции другой машинной переменной u_3 осуществляется коммутацией соответствующих выходов операционных блоков с вертикальными входами 1 и 2 индикатора. На горизонтальный вход Г подается машинная переменная — аргумент u_3 . Наблюдение можно проводить только в режиме однократного решения. При этом переключатель длительности развертки должен занимать крайнее левое положение. Масштабы представления машинных переменных на экране индикатора должны быть согласованы. Обычно для этого сначала на вертикальный, а затем на горизонтальный входы подается некоторое фиксированное постоянное напряжение, например 100 В, и добавляются изменение положения ручек масштабов по x и y одинакового отклонения луча в горизонтальном и вертикальном направлениях.

3) Регистрация величины машинных переменных производится с помощью вольтметров при ручном или автоматическом прерывании процесса решения. При измерении электрических напряжений используется как прямой способ измерения вольтметром, так и по схеме компенсационного измерения. Автоматическое прерывание процесса решения воспроизводится с помощью схемы программного останова.

ЛИТЕРАТУРА

- Анисимов Б. В., Голубкин В. Н., Аналоговые вычислительные машины, Изд-во «Высшая школа», М., 1972.
- Анисимов Б. В., Четвериков В. Н., Основы теории и проектирования ЭВМ, Изд-во «Высшая школа», М., 1970.
- Аппель П., Теоретическая механика, том I и II, Физматгиз, 1960.
- Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Изд-во «Наука», 1971.
- Беки Дж., Корплюс У., Теория и применение гибридных вычислительных систем, Изд-во «Мир», 1970.
- Беляев Н. М., Сборник задач по сопротивлению материалов, Изд-во «Наука», 1968.
- Беляев Н. М., Сопротивление материалов, Гостехиздат, М., 1960.
- Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, Изд-во «Наука», том I, 1959, том II, 1960.
- Бруевич Н. Г., Доступов Б. Г., Счетно-решающие устройства, Издание ВВИА им. Н. Е. Жуковского, М., 1954.
- Витенберг И. М., Программирование аналоговых вычислительных машин, Изд-во «Машиностроение», М., 1972.
- Вычислительная техника, справочник, том I, Изд-во «Энергия», М.—Л., 1964.
- Гасс С., Линейное программирование, Физматгиз, М., 1961.
- Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, Изд-во «Наука», 1967.
- Демидович Б. П., Марон И. А., Основы вычислительной математики, Физматгиз, 1960.
- Демидович Б. П. и др., Численные методы анализа, Изд-во «Наука», 1967.
- Емельянов С. В., Системы автоматического управления с переменной структурой, Изд-во «Наука», 1967.
- Емельянов С. В. и др., Теория систем с переменной структурой, Изд-во «Наука», 1970.
- Жуковский Н. Е., Кинематика, статика, динамика точки, Оборонгиз, М.—Л., 1939.
- Заездный А. М., Сборник задач и упражнений по курсу «Теоретическая радиотехника», Связьиздат, Л., 1957.
- Заславский Ю. Л., Сборник задач по линейному программированию, Изд-во «Наука», 1969.
- Зоммерфельд А., Механика, ИЛ, 1947.
- Калихман И. Л., Сборник задач по линейной алгебре и программированию, Изд-во «Высшая школа», М., 1969.
- Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, ИЛ, 1951.
- Кампе-Немм А. А., Решение инженерных задач на моделирующих ЭВМ, Изд-во «Энергия», Ленинградское отделение, 1970.

- Кафаров В. В., Методы кибернетики в химии и химической технологии, Изд-во «Химия», М., 1968.
- Кемени Дж., Снелл Дж., Кибернетическое моделирование, Изд-во «Советское радио», М., 1972.
- Кобринский Н. Е., Математические машины непрерывного действия, Гостехиздат, 1954.
- Коган Б. Я., Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования, Физматгиз, М., 1963.
- Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1953.
- Корн Г., Корн Т., Электронные аналоговые и аналого-цифровые вычислительные машины, т. I, II, Изд-во «Мир», 1967 и 1968.
- Кошляков Н. С. и др., Уравнения в частных производных математической физики, Изд-во «Высшая школа», М., 1970.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика. Электродинамика, Изд-во «Наука», 1968.
- Левенсон Л. Б., Теория механизмов и машин, Машгиз, М., 1954.
- Левин Л., Методы решения технических задач с использованием аналоговых вычислительных машин, Изд-во «Мир», 1966.
- Луценко В. А. и Финякин Л. Н., Аналоговые вычислительные машины в химии и химической технологии, Изд-во «Химия», М., 1969.
- Мак-Кинсп Дж., Введение в теорию игр, Физматгиз, М., 1960.
- Мелентьев П. В., Приближенные вычисления, Физматгиз, М., 1962.
- Новиков П. С., Элементы математической логики, Физматгиз, М., 1959.
- Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Физматгиз, М., 1961.
- Преснухин Л. Н., Соломонов Л. А. и др., Основы теории проектирования вычислительных приборов и машин управления, Изд-во «Высшая школа», М., 1970.
- Преснухин Л. Н., Юдин Д. Б. и др., Основы теории и проектирования приборов управления, Оборонгиз, 1960.
- Рыбашов М. В., Дудников Е. Е., Градусные методы решения линейных равенств, неравенств и задач линейного программирования на АВМ, Изд-во «Советское радио», М., 1970.
- Сальвадори М. Дж., Численные методы в технике, ИЛ, 1955.
- Тетельбаум И. М., Электрическое моделирование, Физматгиз, 1959.
- Цыпкин Я. З., Адаптация и обучение в автоматических системах, Изд-во «Наука», 1968.
- Чесноков А. А., Решающие усилители, Изд-во «Энергия», Ленинградское отделение, 1969.
- Эльсгольц Л. Э., Дифференциальные уравнения, Гостехиздат, М., 1957.
- Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б., Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Изд-во «Наука», 1971.
- Эмануэль Н. М., Кнорре Д. Г., Курс химической кинетики, Изд-во «Высшая школа», М., 1969.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- АВМ** (аналоговая вычислительная машина) 14
— специализированная 19
— структурная 15, 19
— — большая 19
— — малая 19
— — средняя 19
— универсальная 19
Алгебра выбора 173
— логики 173
Аппаратура измерительная 21
— регистрирующая 21
- Блок** 69
— диодный 48
— дифференцирования 21, 53
— интегрирования (интегратор) 21, 29
— нелинейной функции (функциональный преобразователь) 21, 42
— операционный 12, 20
— — идеальный 57
— — реальный 57
— перемножения 21, 43
— программного управления 21, 39
— суммирования (сумматор) 21, 24
— — и интегрирования (интегратор-сумматор) 31
Блок-схема 69
— — коммутационная 69, 71, 116, 163
— — структурная 17, 69, 71
- Время** замедленное 86
— реальное 86
— ускоренное 86
- Деление** 47, 199
Дифференцирование 21, 53
Добротность АВМ 66
Дрейф нуля 24
- Задача** Коши 90
— краевая 90, 122
— масштабная 84, 114
Запаздывание 23, 95
- Изоморфизм** математический 14
Инверсия 174
Инвертор 27
Интегратор 21, 29
Интегратор-сумматор 31
Интерполирование 139
Интерполятор 139
Источник питания АВМ 21
— эталонного напряжения 21, 29, 307
- Квадратор** 44
Ключ 180
Контроль АВМ 75, 105, 114, 186, 224, 246
Коэффициент передачи интегратора 31
— — потенциометра 27
— сумматора 26
— усиления ОУ 22
- Логика** непрерывная 173

- Масштаб 17, 71, 78
 — переменный 84
 — постоянный 79
 — схемный блока перемножения 44
 Масштабирование 68
 — зависимых переменных 78, 114, 163, 224, 248, 280
 — независимой переменной 86, 116, 281
 — переменное 84
 Машина аналоговая вычислительная (АВМ) 14
 Медиана 186
 Метод второй Ляпунова 193
 — измерения компенсационный 29, 311
 — масштабных задач 112, 225, 231, 280
 — множителей Лагранжа 214
 — неявных функций 44—45, 102, 196
 — Ньютона 207
 — общий 89, 97
 — понижения порядка производной 102
 — проб 123
 — — и поправок 123, 227
 — прямых 135
 — функций чувствительности 108
 — штрафных функций 214, 217
 Моделирование 13
 — математическое 15
 — физическое 15
 Модель 13
 Модель-аналог 16

Напряжение дрейфа нуля 24

 Обращение функций 46
 Ограничения смешанного типа 212, 220
 — типа неравенства 212, 217
 — — равенства 212
 Оператор присваивания условий 178
 Операция выбора 173, 174
 — — inv 174
 — — max 174
 — — min 174
 — присваивания 69
 Оригинал 13
 Останов программный 40
 ОУ (операционный усилитель) 22
 Ошибки АВМ 57
 — операционного блока 60
 — — дифференцирования 64
 — — интегрирования 62
 — — нелинейной функции 65
 — — параметрические 58

 Ошибки операционного блока структурные 58
 — — суммирования 60

 Переключение программное 40
 Переменная избыточная 76
 — машинная 15, 71
 — — зависимая 78
 — — идеальная 58
 — — независимая 78, 86
 — — реальная 58
 Подготовка АВМ 20, 310
 Поле наборное (коммутационное) 20, 306
 Помехи 53, 57
 — промышленные 59
 — флуктуационные 59
 Последействие ОУ 23
 Предикат 176
 Преобразователь специализированный 43
 — универсальный 43
 — функциональный 42
 Прерывание решения 20, 33
 Программа 17, 68
 Программирование АВМ 17, 68

 Редукция краевой задачи к задаче Коши 90, 122, 227, 281
 Режим работы АВМ 20, 309
 — — интегратора 32
 — скользящий 220
 Реле электромеханическое 39
 — электронное идеальное 49

 Связь 17, 69
 — обратная 24
 — — отрицательная 24, 45
 — — положительная 25
 Сглаживание 54
 Система вычислительная 17
 — с переменной структурой 41, 46, 47, 91, 178, 187, 219
 Согласование масштабов 80, 116, 163
 Соотношение контрольное 76, 105, 114, 224
 Состояние интегратора 32
 Способ наименьших квадратов 151
 Сумматор 21
 Схема запоминания 183
 — ключевая 180
 — коммутационная 69, 71

- Схема ограничения пределов 48
 - программного управления 39
 - релейная бесконтактная 49
 - структурная 17, 69, 71

- Таблица выбора 175
 - коммутационная 68
 - масштабная 68, 79, 115, 163
- Траектория фазовая 111

- Усилитель масштабный 27
 - операционный 22
- Уравнение дифференциальное наименьшего спуска 190
 - — определяющее 144
 - — с запаздывающим аргументом 95
 - — чувствительности 108
- Устойчивость решения дифференциальных уравнений 91
- Устройство программного управления 39
 - счетно-решающее 15
 - управления АВМ 20, 309

- Фиксация решения 33
- Форма каноническая дифференциального уравнения 107
- Формула алгебры выбора 174
- Функционал 189
 - нестационарный 194
 - стационарный 194
- Функция «медиана» (med) 186
 - «модуль» 51
 - sign 45, 177
 - sgn 177
 - штрафная 177, 215

- Цепь обратной связи 25
 - переключательная 182
- Цикл предельный 120

- Эквивалентность асимптотическая 93, 200

- Этапы программирования АВМ 72

- Язык блок-схем 69
 - программирования 68

Александр Сергеевич Урмаев

**ОСНОВЫ
МОДЕЛИРОВАНИЯ НА АНАЛОГОВЫХ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ**

М., 1974 г., 320 стр. с илл.

Редактор *Г. Я. Пирогова*
Техн. редактор *С. Я. Шкляр*
Корректор *А. Л. Ипатова*

Сдано в набор 26/XII 1973 г. Подписано к печати 27/VI 1974 г. Бумага 60×90¹/₁₆.
Физ. печ. л. 20. Условн. печ. л. 20. Уч.-изд. л. 18,49. Тираж 28 500 экз. Т-12 802.
Цена книги 75 коп. Заказ № 5.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Лит. типография издательства «Наука», Новосибирск-77, Станиславского, 25.