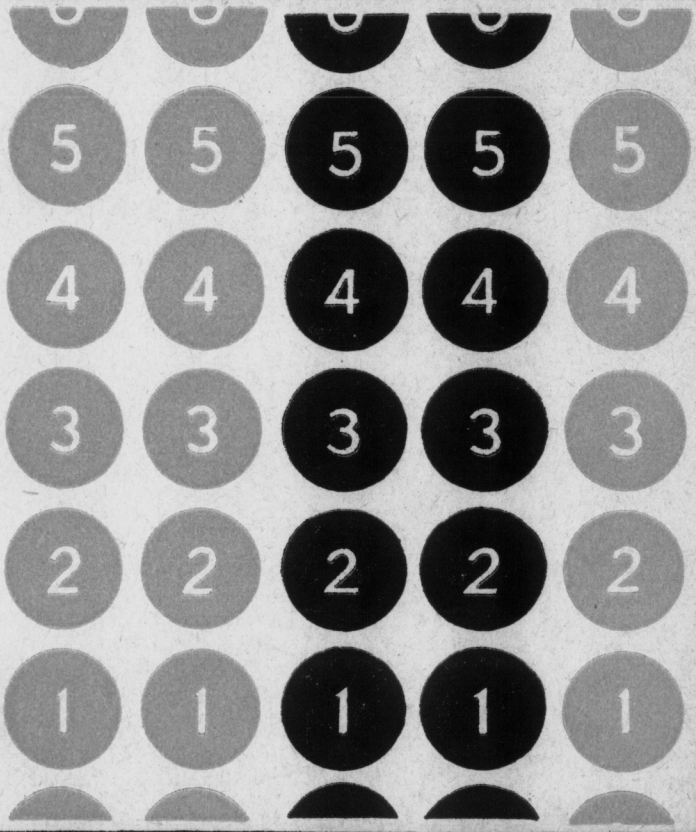
Е. С. БОГОМОЛОВА, Т. М. КОПЫЛОВА

Работа на клавишных машинах



ПРОСВЕЩЕНИЕ · 1964

Е. С. БОГОМОЛОВА, Т. М. КОПЫЛОВА

РАБОТА НА КЛАВИШНЫХ МАШИНАХ

РУКОВОДСТВО ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ В ШКОЛАХ С МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СПЕЦИАЛИЗАЦИЕЙ

Под редакцией кандидата физико-математических наук Е. А. Волкова

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
Москва 1964

ПРЕДИСЛОВИЕ

Организация школ с математической специализацией вызвала необходимость издания для них специальных учебных пособий и руководств.

Настоящая книга является первой попыткой создания руководства для практических занятий учащихся по вычислительной математике.

Цель практических занятий — ознакомить учащихся с правилами действий над приближенными числами и с основными приемами вычислений на настольных счетных машинах «Мерседес Эвклид» и «Рейнметалл (САР)».

Излагаемый круг вопросов подобран на базе опыта работы с учащимися школ № 444 и 52 Москвы.

При написании книги были использованы лекции, прочитанные для вычислителей Е. А. Волковым. Им же написана глава VI «Перевод чисел из десятичной системы счисления в двоичную на настольной счетной машине».

Весь приведенный материал иллюстрируется конкретными примерами. Кроме того, в специальном приложении собран ряд примеров по численному решению математических задач, встречающихся в практике научных учреждений. После решения некоторых задач в книге даны упражнения на каждый из методов. Обширного задачного материала мы не приводим, так как это не является целью данного руководства. В практической работе,

естественно, могут возникнуть отклонения в отдельных местах настоящего руководства.

Так как методы работы на клавишных машинах с учащимися средней школы излагаются впервые, то не все здесь может быть охвачено и предусмотрено. Поэтому мы будем благодарны за все критические замечания и пожелания, направленные в адрес нашей книги.

Выражаем глубокую благодарность кандидату физико-математических наук Е. А. Волкову, оказавшему большую помощь при написании книги, а также кандидату педагогических наук, заслуженному учителю РСФСР С. И. Шварцбурду за ряд ценных советов и замечаний.

Авторы.

ГЛАВА I

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧИСЛА

§ 1. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧИСЛА И ПРАВИЛА ДЕЙСТВИЙ НАД НИМИ

Число, выражающее величину не точно, а с некоторой погрешностью, называется приближенным. Приближенные числа получаются, например, в результате округления математических констант, выражающихся бесконечными десятичными дробями, и при измерении физических величин.

Абсолютная величина разности между точным числом A и его приближенным значением a называется абсолютной погрешностью Δ данного приближенного числа a:

$$\Delta = |A - a|.$$

Абсолютная погрешность не полностью характеризует точность приближенных чисел. Поэтому для более полной характеристики приближенных чисел обычно еще рассматривают относительную погрешность δ, которая представляет собой отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного числа, т. е.

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}.$$

У приближенного числа a все знаки называются верными, если абсолютная погрешность не превышает одной единицы разряда последней цифры числа a.

При записи приближенных чисел следует оставлять только верные знаки, лишние знаки нужно отбрасывать согласно следующему правилу округления:

При отбрасывании лишних цифр принято последнюю цифру, которая остается, увеличивать на единицу, если отбрасываемая часть числа больше половины единицы последнего оставляемого разряда, и оставлять последнюю цифру без изменения, если отбрасываемая часть числа меньше половины единицы последнего оставляемого разряда.

Если отбрасываемая часть числа равна половине единицы последнего оставляемого разряда, то последнюю из остающихся цифр округляют до четной.

Так, например, применяя правило округления чисел, число π с различным числом знаков получим в виде 3,141 59; 3,1416; 3,142; 3,14.

Рассмотрим еще пример. Пусть в результате измерения некоторой физической величины получили число 5,612. Известно, что ошибка измерения может достигнуть по абсолютной величине 0,005. Следовательно, измеренное значение имеет три верные значащие цифры и после округления запишется в виде 5,61.

Если у приближенного числа в целой части цифр больше, чем количество имеющихся верных знаков, то при записи таких чисел следует выделять степень 10 одним из следующих способов.

Приближенное число 214 062 357 с тремя верными знаками можно записать либо так:

$$0{,}214 \cdot 10^9,$$

либо еще так:

$$214 \cdot 10^6.$$

Будем называть **значащими цифрами** первую слева цифру, отличную от нуля, и все цифры, расположенные правее, включая и нули. Нули в приближенном числе на правом конце, если они являются верными цифрами, следует писать. Например, приближенное число 0,024 00 имеет пять верных десятичных знаков (четыре верные значащие цифры), а число 0,024 только три верных десятичных знака (две верные значащие цифры), т. е. эти два числа как приближенные числа различные. Величина абсолютной погрешности приближенного числа характеризуется приблизительно числом верных десятичных знаков, а величина относительной погрешности — числом верных значащих цифр.

Правила подсчета верных цифр при действиях над приближенными числами

Всякий результат действий над приближенными числами также является приближенным числом. При сложных расчетах с приближенными числами трудно точно учесть влияние погрешностей на каждом шагу вычислений. Поэтому обычно пользуются следующими приближенными правилами подсчета верных цифр В. М. Брадиса:

1. *При сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом десятичных знаков.*

2. *При умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом значащих цифр.*

3. *При возведении в квадрат и в куб в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближенное число.*

4. *При извлечении квадратного и кубического корней в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеет подкоренное приближенное число.*

5. *Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при сложении и вычитании) или больше значащих цифр (при умножении, делении, возведении в степень и извлечении корня), чем другие, то их предварительно следует округлить, сохраняя одну лишнюю цифру.*

6. *При вычислении посредством логарифмов одночленного выражения следует подсчитать число значащих цифр в приближенном данном, имеющем наименьшее число значащих цифр, и взять таблицу логарифмов с числом десятичных знаков на единицу большим. При потенцировании последняя значащая цифра результата отбрасывается.*

Для компенсации накопления ошибок при вычислениях весь расчет обычно ведут над числами с одной или несколькими запасными цифрами по сравнению с числом цифр, требуемых при формальном применении изложенных выше правил для получения требуемой точности окончательных результатов. В окончательном

результате запасные цифры отбрасываются. Число необходимых запасных знаков существенно зависит от характера каждой конкретной задачи; и вопрос выбора числа запасных знаков выходит за пределы настоящего руководства.

В заключение рассмотрим несколько примеров на действия с приближенными числами:

1. Найти сумму приближенных чисел:

$$a = 34{,}51, \qquad \Delta a \leqslant 0{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ и}$$
$$b = 0{,}34575, \qquad \Delta b \leqslant 0{,}5 \cdot 10^{-5}.$$

Прежде чем складывать эти числа, оставляют у них столько десятичных знаков, сколько их имеет менее точное слагаемое, т. е. два десятичных знака, остальные отбрасывают по правилу округления и складывают:

$$\begin{array}{r} 34{,}51 \\ +\ 0{,}35 \\ \hline 34{,}86 \end{array}$$

2. Найти произведение приближенных чисел:

$$a = 341{,}2, \qquad \Delta a \leqslant 0{,}5 \cdot 10^{-1} \text{ и}$$
$$b = 0{,}0679345, \qquad \Delta b \leqslant 0{,}5 \cdot 10^{-7}.$$

Перед умножением этих чисел у числа b оставляют значащих цифр на единицу больше, чем их имеет число a. Результат умножения округляют до четырех значащих цифр:

$$c = a \cdot b = 341{,}2 \times 0{,}067\,934 \approx 23{,}179\,08 \approx 23{,}18.$$

3. Возвести в куб приближенное число:

$$a = 2{,}35, \qquad \Delta a \leqslant 0{,}5 \cdot 10^{-2},$$
$$a^3 = a^2 a.$$

При промежуточном умножении, т. е. при промежуточном a^2, берется один запасной знак. Результат округляется до трех значащих цифр:

$$a^2 = 2{,}35 \times 2{,}35 \approx 5{,}522;$$
$$a^3 = 5{,}522 \cdot a = 5{,}522 \times 2{,}35 \approx 12{,}9767 \approx 12{,}98.$$

В дальнейшем в примерах, иллюстрирующих действия над приближенными числами, мы будем пользоваться знаком равенства «=», подразумевая при этом, что равенство выполняется с точностью до погрешности округления в младшем разряде нашего результата.

§ 2. НОРМАЛИЗОВАННЫЕ ЧИСЛА

Каждому числу мы отнесем его десятичный порядок P, который определяется следующим образом:

Если в числе есть целая часть, то порядок будет равен количеству значащих цифр до запятой слева со знаком плюс.

Если же число представляет собой дробь, то порядок будет равен количеству нулей после запятой до первой значащей цифры со знаком минус.

Примеры.

1. $a = 25{,}6784, \quad P_a = 2.$
2. $b = 0{,}002\,5648, \quad P_b = -2.$
3. $c = 0{,}3564, \quad P_c = 0.$

Порядок числа нуль условно принимается равным $-\infty$.

Нормализованным числом называется число, представленное в виде $X = M_x \cdot 10^{P_x}$,

где $0{,}1 \leqslant M_x < 1$ — мантисса числа или его значащая часть, P_x — десятичный порядок.

Примеры.

1. $a = 135{,}641 = 0{,}135\,641 \cdot 10^3, \quad M_a = 0{,}135\,641, \quad P_a = 3.$
2. $b = -0{,}002\,465 = -0{,}2465 \cdot 10^{-2}, \quad M_b = -0{,}2465, \quad P_b = -2.$
3. $c = 0{,}678\,310 = 0{,}678\,310 \cdot 10^0, \quad M_c = 0{,}678\,310, \quad P_c = 0.$

Если рассматриваемое число приближенное, то у мантиссы следует писать только верные знаки. При действиях умножения и деления над нормализованными числами, производимых, например, на настольной счетной машине, мы получаем значащую часть результата, а с определением положения запятой в результате, что эквивалентно определению порядка результата, возникают

затруднения. Поэтому в таких случаях удобно пользоваться следующими правилами определения порядка результата.

Правило определения порядка произведения

Если значащая часть произведения меньше значащей части какого-либо из сомножителей, то порядок произведения равен сумме порядков сомножителей.

Если значащая часть произведения больше или равна значащей части какого-либо из сомножителей, то порядок произведения равен сумме порядков сомножителей без единицы.

Примеры.

$$c = a \cdot b.$$

1. $a = 0{,}5 \cdot 10^1$, $b = 0{,}7 \cdot 10^2$.
   $M_c = 0{,}35$, $M_c < M_a = 0{,}5$. Следовательно, $P_c = P_a + P_b = 1 + 2 = 3$; $c = 0{,}35 \cdot 10^3$.

2. $a = 0{,}3 \cdot 10^1$, $b = 0{,}2 \cdot 10^2$.
   $M_c = 0{,}6$, $M_c > M_a = 0{,}3$. Следовательно, $P_c = P_a + P_b - 1 = 1 + 2 - 1 = 2$; $c = 0{,}6 \cdot 10^2$.

3. $a = 0{,}1 \cdot 10^2$, $b = 0{,}5 \cdot 10^1$.
   $M_c = 0{,}5$, $M_c = M_b$. Следовательно, $P_c = P_a + P_b - 1 = 2 + 1 - 1 = 2$; $c = 0{,}5 \cdot 10^2$.

Правило определения порядка частного

Если значащая часть делимого меньше значащей части делителя, то порядок частного будет равен разности порядков делимого и делителя.

Если значащая часть делимого больше или равна значащей части делителя, то порядок частного равен разности порядков делимого и делителя плюс единица.

Примеры.

$$c = \frac{a}{b}.$$

1. $a = 0{,}3 \cdot 10^2$, $b = 0{,}5 \cdot 10^1$; $M_a < M_b$, $M_c = 0{,}6$.
   $P_c = P_a - P_b = 2 - 1 = 1$, $c = 0{,}6 \cdot 10^1$.

2. $a=0{,}6\cdot 10^1$, $b=0{,}2\cdot 10^3$; $M_a>M_b$, $M_c=0{,}3$.
$P_c=P_a-P_b+1=1-3+1=-1$, $c=0{,}3\cdot 10^{-1}$.

3. $a=0{,}4\cdot 10^2$, $b=0{,}4\cdot 10^1$; $M_a=M_b$, $M_c=0{,}1$.
$P_c=P_a-P_b+1=2-1+1=2$, $c=0{,}1\cdot 10^2$.

Сложение и вычитание нормализованных чисел

Рассмотрим два возможных случая.

1. Сложение и вычитание нормализованных чисел с равными порядками

При сложении нормализованных чисел с равными порядками складываются их мантиссы.

Если сумма мантисс меньше единицы, то порядок суммы чисел равен порядку слагаемых.

Если же сумма мантисс больше или равна единице, то у полученной суммы мантисс нужно сдвинуть запятую влево на один разряд, и в этом случае порядок суммы чисел будет равен порядку слагаемых плюс единица.

При вычитании нормализованных чисел с равными порядками вычитаются их мантиссы. Если разность мантисс больше или равна 0,1, то порядок разности чисел равен порядку слагаемых.

Если же разность мантисс меньше 0,1, то у полученной разности мантисс нужно сдвинуть запятую вправо на число разрядов, равное количеству имеющихся нулей после запятой до первой значащей цифры, и в этом случае порядок разности чисел будет равен порядку слагаемых минус количество сдвигов запятой вправо.

2. Сложение и вычитание нормализованных чисел с разными порядками

При сложении чисел с разными порядками к мантиссе большего числа прибавляется мантисса меньшего числа, сдвинутая вправо на количество разрядов, равное разности между порядком большего числа и порядком меньшего числа.

Если сумма мантисс меньше единицы, то порядок суммы чисел равен порядку большего числа.

Если же сумма мантисс больше единицы или равна единице, то у полученной суммы мантисс нужно сдвинуть запятую влево на один разряд, и в этом случае порядок суммы чисел будет равен порядку большего числа плюс единица.

При вычитании чисел с разными порядками из мантиссы большего числа вычитается мантисса меньшего числа, сдвинутая вправо на количество разрядов, равное разности между порядком большего числа и порядком меньшего числа.

Если разность мантисс больше или равна 0,1, то порядок разности чисел равен порядку большего числа.

Если же разность мантисс меньше 0,1, то у полученной разности мантисс нужно сдвинуть запятую вправо на число разрядов, равное количеству имеющихся нулей после запятой до первой значащей цифры, и в этом случае порядок разности чисел будет равен порядку большего числа минус количество сдвигов запятой вправо.

Примеры.

1. $c = a + b$.
   $a = 0{,}371\,05 \cdot 10^2$, $b = 0{,}243\,72 \cdot 10^2$.
   $M_a + M_b = 0{,}371\,05 + 0{,}243\,72 = 0{,}614\,77$;
   $M_c = 0{,}614\,77$, $P_c = 2$,
   $c = 0{,}614\,77 \cdot 10^2$.

2. $c = a - b$.
   $a = 0{,}623\,74 \cdot 10^2$, $b = 0{,}621\,61 \cdot 10^2$.
   $M_a - M_b = 0{,}623\,74 - 0{,}621\,61 = 0{,}002\,13$;
   $M_c = 0{,}213$, $P_c = 2 - 2 = 0$,
   $c = 0{,}213 \cdot 10^0$.

3. $c = a + b$.
   $a = 0{,}271\,45 \cdot 10^2$, $b = 0{,}981\,54 \cdot 10^4$.

При нахождении суммы (или разности) чисел с разными порядками мантиссу меньшего числа после сдвига округляем до числа десятичных знаков, которое имеет мантисса большего числа, и затем складываем:

$$M_a + M_b = 0{,}981\,54 + 0{,}002\,71 = 0{,}984\,25;$$
$$M_c = 0{,}984\,25, \qquad P_c = P_b = 4,$$
$$c = 0{,}984\,25 \cdot 10^4.$$

ГЛАВА II

ВЫПОЛНЕНИЕ ОСНОВНЫХ ДЕЙСТВИЙ НА НАСТОЛЬНОЙ СЧЕТНОЙ МАШИНЕ «РЕЙНМЕТАЛЛ (САР)»

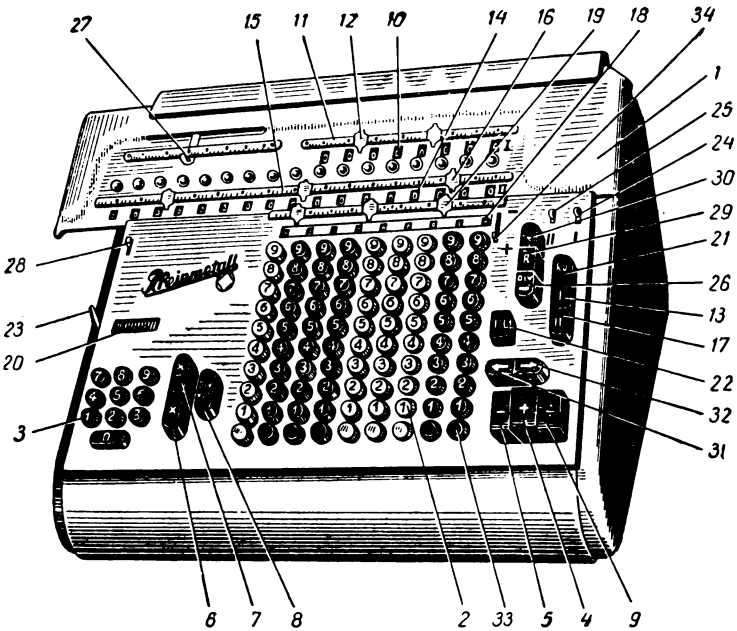


Рис. 1

§ 3. ВНЕШНЕЕ ОПИСАНИЕ МАШИНЫ

На рисунке 1 показаны следующие внешние элементы счетной машины «Рейнметалл (САР)».

1. Каретка.
2. Основная клавиатура.
3. Дополнительная клавиатура.
4. Клавиша сложения.
5. Клавиша вычитания.
6. Клавиша для обычного умножения.
7. Клавиша для умножения с вычитанием.
8. Клавиша подготовки к делению.

9. Клавиша деления.
10. Счетчик оборотов.
11. Шкала счетчика оборотов.
12. Указатель запятых счетчика оборотов.
13. Клавиша гашения счетчика оборотов.
14. Счетчик результатов.
15. Шкала счетчика результатов.
16. Указатель запятых счетчика результатов.
17. Клавиша гашения счетчика результатов.
18. Контрольный регистр основной клавиатуры.
19. Шкала контрольного регистра основной клавиатуры.
20. Контрольный регистр дополнительной клавиатуры.
21. Клавиша для переноса содержимого счетчика результатов в установочный механизм.
22. Клавиша гашения основной клавиатуры и контрольного регистра.
23. Рычаг гашения дополнительной клавиатуры.
24. Рычаг для автоматического гашения счетчика оборотов.
25. Рычаг для автоматического гашения счетчика результатов.
26. Клавиша прерывания деления.
27. Рычаг для установления количества знаков в частном.
28. Рычаг для останова каретки в крайнем правом положении.
29. Клавиша повторения.
30. Клавиша выключения механизма повторения.
31. Клавиша полуавтоматического сдвига каретки влево.
32. Клавиша полуавтоматического сдвига каретки вправо.
33. Клавиша нуля (условно).
34. Рычаг управления счетчиком оборотов.

На счетной машине САР имеются две клавиатуры: основная (2) и дополнительная (3). На основной клавиатуре набираются все числа, необходимые для выполнения арифметических операций, кроме множителя при выполнении операции умножения. Множитель устанавливается на дополнительной клавиатуре. Числа, набранные на основной клавиатуре, отображаются в контрольном регистре (18), что дает возможность проверить,

правильно ли набрано число. Число, установленное на дополнительной клавиатуре, отображается в контрольном регистре (20), и в случае неправильного набора число можно сбросить рычагом (23), отводя его на себя. На основной клавиатуре ошибочно нажатые клавиши можно сбросить нажатием на клавишу (33) в соответствующем разряде либо нажатием на правильную клавишу. Если надо сбросить все число, то следует воспользоваться клавишей гашения (22). Не рекомендуется нажимать одновременно две клавиши одного разряда. Обычно после выполнения какого-либо действия число, стоящее на основной клавиатуре, гасится. Для того чтобы число, стоящее на основной клавиатуре, автоматически не гасилось, перед выполнением действия его закрепляют нажатием на клавишу (29). Если же требуется, чтобы число автоматически погасилось, а клавиша (29) опущена, тогда ее следует поднять нажатием на клавишу (30). Нули на клавиатуре не набираются. Для удобства набора чисел разряды клавиш разбиты на группы, которые окрашены в различные цвета.

Перед началом вычислений следует очистить счетчики оборотов, результатов и клавиатуру. Клавиша умножения (6) служит для получения обычного произведения. Если требуется получить произведение в дополнительном виде или вычесть его из содержимого счетчика результатов, то нажимается клавиша (7).

Клавиша подготовки к делению (8) используется для переноса делимого с основной клавиатуры в счетчик результатов. В счетчике оборотов получается частное, а также счетчик оборотов может служить для подсчета количества слагаемых при суммировании нескольких чисел.

С помощью рычага (24) осуществляется автоматическое гашение счетчика оборотов. Если рычаг опущен вниз, то содержимое счетчика оборотов перед выполнением следующего действия автоматически гасится, если он поднят, то к содержимому счетчика оборотов прибавится следующий результат.

Рычаг (25) служит для автоматического гашения счетчика результатов. Если рычаг опущен вниз, то содержимое счетчика результатов автоматически гасится, если он поднят, то к содержимому счетчика результатов прибавится следующий результат.

Рычаг (28) предназначен для останова каретки в крайнем правом положении. При нажатом рычаге (28) после выполнения действия каретка останавливается в крайнем правом положении

§ 4. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ

Прежде всего необходимо установить указатель запятой на шкале (15) так, чтобы на основной клавиатуре разместилось наибольшее по модулю число, и набрать первое слагаемое. Основная клавиатура (2) дает возможность набирать девятиразрядные числа. Если число, набранное на основной клавиатуре, не потребуется для следующей операции, клавиша (29) должна быть поднята путем нажатия на клавишу (30). Нажатием на клавишу (4) первое слагаемое засылается в счетчик результатов. Затем в соответствии с расположением запятой набирается на основной клавиатуре второе слагаемое и снова нажимается клавиша (4). Сумма получается в счетчике результатов. Аналогичными действиями можно вычислить алгебраическую сумму нескольких чисел. При вычитании вместо клавиши (4) нажимается клавиша (5).

Появление девятки в 11-м разряде при сложении не более 90 чисел показывает, что алгебраическая сумма получилась отрицательной и в дополнительном виде. Для того чтобы получить абсолютное значение суммы, следует все цифры в счетчике результатов заменить дополнением до девяти и в младший разряд прибавить единицу.

При вычислении алгебраической суммы чисел или просто разности двух чисел на вычислительной машине «Рейнметалл» следует обращать внимание на то, чтобы не происходило занимание из 12-го в 11-й разряд, поскольку в вычислительной машине «Рейнметалл» отсутствует возможность занимания из 12-го разряда.

§ 5. УМНОЖЕНИЕ

Умножение производится следующим образом: на дополнительной клавиатуре (3) набирается множитель, а на основной клавиатуре (2) — множимое и нажимается клавиша умножения (6). В счетчике результатов получается произведение, а в счетчике оборотов для контроля появляется множитель.

Положение запятой в произведении определяется по шкалам контрольного регистра и счетчика результатов или по правилам, описанным в § 2.

Пример.

$$1{,}246\,8533 \times 23{,}597\,641 = 29{,}422\,797.$$

В приведенном примере видим, что положению запятой множителя на шкале счетчика оборотов соответствует цифра 7, а положению запятой множимого на шкале контрольного регистра соответствует цифра 6. Находим сумму: $6 + 7 = 13$. По шкале счетчика результатов устанавливаем указатель запятой левее 13-го разряда и списываем результат с верными значащими цифрами, т. е. 29,422 797, причем младший разряд всегда округляется по общепринятому правилу.

§ 6. ДЕЛЕНИЕ

Деление на счетной машине «Рейнметалл» производится следующим образом: на основной клавиатуре (2) с 9-го разряда набирается делимое и нажимается клавиша (8), при помощи которой каретка устанавливается в подготовительное положение для деления и делимое автоматически перебрасывается в счетчик результатов. Затем на основной клавиатуре (2) набирается делитель с 9-го разряда, если значащая часть его меньше значащей части делимого, и с 8-го разряда, если значащая часть его больше или равна значащей части делимого, и нажимается клавиша (9). Рекомендуется также с целью контроля правильности установки делителя нажать клавишу (29), которая обеспечивает сохранение делителя на клавиатуре после выполнения операции деления. Частное получается в счетчике оборотов.

Положение запятой в частном можно определить путем вычитания из показания положения запятой в делимом по шкале счетчика результатов показания положения запятой делителя по шкале контрольного регистра. Удобнее положение запятой частного определять по правилам, описанным в § 2.

Если остаток от деления больше половины делителя, то к младшему разряду счетчика оборотов следует прибавить единицу.

Если в частном требуется менее 8 значащих цифр, то для ускорения выполнения операции деления следует указывать требуемое количество значащих цифр в частном с помощью рычага (27) по имеющейся специальной шкале.

В случае неправильной установки делителя или делимого деление можно прервать нажатием на клавишу (26). После того как машина остановится, следует при помощи клавиши (31) каретку сдвинуть в исходное положение и заново произвести деление.

Пример 1.

125,345 50 : 100,275 40 = 1,250 0125.

Делимое 125,34550 ставится на основной клавиатуре (2) с 9-го разряда, затем нажимается клавиша (8). Делитель 100,27540 ставится на основной клавиатуре (2) также с 9-го разряда и нажимается клавиша (9). Частное 1,2500124 получается в счетчике оборотов, а в счетчике результатов остаток 65850400, который больше половины делителя. Поэтому младший разряд частного увеличивается до 5, т. е. окончательно частное принимаем равным 1,250 0125.

Пример 2.

125,345 50 : 27,275 451 = 4,595 5427.

Все действия производятся так же, как описано выше, с той лишь разницей, что делитель 27,275 451 ставится с 8-го разряда.

§ 7. НАХОЖДЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ НЕСКОЛЬКИХ ЧИСЕЛ И ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ

На счетной машине «Рейнметалл» нахождение произведения нескольких чисел и возведение в степень удобно делать с семью значащими цифрами. Вычисления производятся следующим образом: рычаг (28) опускается вниз для автоматического удержания каретки в крайнем правом положении (это производится после каждого умножения). Затем делается обычное умножение, при котором первый сомножитель набирается на дополнительной клавиатуре (3) с семью значащими цифрами, а второй — на

основной клавиатуре (2) с 7-го разряда. В счетчике результатов получается произведение. В случае появления нуля в 14-м разряде каретка сдвигается влево на один разряд путем нажатия на клавишу (31). Далее производится округление результата, стоящего в счетчике результатов, путем прибавления единицы младшего разряда основной клавиатуры, если цифра, стоящая в счетчике результатов правее 1-го разряда, больше или равна 5. Нажимом на клавишу (21) содержимое счетчика результатов автоматически переносится в контрольный регистр (18) основной клавиатуры в качестве сомножителя (множимого) для последующего умножения. На клавиатуре (3) с семью значащими цифрами набирается следующий сомножитель и производится умножение. Далее поступаем описанным способом.

Порядок окончательного произведения определяется как сумма порядков сомножителей минус число случаев, когда в промежуточном произведении в 14-м разряде получается нуль. Аналогично осуществляется и возведение в степень.

Пример.

$$0{,}257\,3456\cdot 10^{-1}\times 0{,}125\,4567\cdot 10^{2}\times 0{,}675\,5751\cdot 10^{3}\times$$
$$\times\, 0{,}357\,4562\cdot 10^{7}=0{,}779\,6516\cdot 10^{9}.$$

Число 257 3456 набирается на дополнительной клавиатуре, а число 125 4567 набирается на основной клавиатуре с 7-го разряда. При умножении этих чисел в 14-м разряде появился нуль. Сдвигаем каретку влево на один разряд. Округляем младший разряд, производим добавление единицы и нажимом на клавишу (21) переносим число из счетчика результатов в контрольный регистр. (Надо следить за тем, чтобы рычаг (28) всегда был опущен вниз.) Набираем следующий сомножитель 675 5751 на дополнительной клавиатуре и нажимаем на клавишу (6). Далее поступаем так же, как описано выше. В 14-м разряде нуль не появился.

Осуществляем те же действия и со следующим сомножителем. В последнем умножении в 14-м разряде появился нуль. Итак, в двух случаях появлялся нуль. Следовательно, порядок произведения будет равен: $-1+$ $+2+3+7-2=9$.

§ 8. ВЫЧИСЛЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СУММЫ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

При вычислении суммы произведений на счетной машине САР необходимо в счетчике результатов иметь запасные разряды для накопления результата. При вычислении суммы не более 10 произведений достаточно иметь один запасной разряд, а при вычислении суммы от 11 до 100 произведений достаточно иметь два запасных разряда. Поэтому числа устанавливаются на основной клавиатуре при вычислении сумм до 10 произведений с 8-го разряда, а при вычислении сумм до 100 произведений — с 7-го разряда. Таким образом, в первом случае можно брать сомножители с восемью значащими цифрами, во втором случае — с семью. С соответствующим числом знаков устанавливаются и сомножители на дополнительной клавиатуре.

Из всех пар сомножителей, произведения которых мы должны просуммировать, выделяем пару сомножителей с максимальной суммой порядков и вычисляем их произведение описанным выше способом. При этом рычаг (25) отводится вверх, чтобы полученный результат при следующем умножении не сбрасывался. Затем определяем разность ΔP между суммой порядков сомножителей при первом умножении и суммой порядков сомножителей очередного произведения. Если ΔP — четное число, то сомножители набираются на $\frac{\Delta P}{2}$ разрядов меньше каждый, причем на основной клавиатуре сомножители устанавливаются с $(7-\Delta P/2)$-го разряда. Если ΔP — нечетное число, то один из сомножителей, у которого значащая часть больше, сокращается на $\frac{\Delta P}{2}+\frac{1}{2}$ разрядов, а число с меньшей значащей частью — на $\frac{\Delta P}{2}-\frac{1}{2}$ разрядов.

Очередное произведение автоматически складывается с содержимым счетчика результатов, т. е. с суммой предыдущих произведений. Описанный процесс продолжается до тех пор, пока не получится сумма всех произведений.

Положение запятой в сумме произведений определяется при первом умножении.

При вычислении алгебраической суммы произведений, поскольку в счетчике результатов счетной машины САР отсутствует сплошной перенос при вычитании, необхо-

димо вычислить отдельно сумму положительных произведений и сумму отрицательных произведений и затем подвести окончательный итог.

Пример.

$$0{,}257\,45631\cdot10^{1}\times0{,}567\,456\,49\cdot10^{1}+0{,}357\,456\,45\cdot10^{0}\times$$
$$\times0{,}258\,565\,30\cdot10^{1}-0{,}367\,456\,27\cdot10^{0}\times0{,}275\,485\,15\cdot10^{0}=$$
$$=0{,}154\,325\,55\cdot10^{2}.$$

§ 9. ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММЫ И РАЗНОСТИ ЧАСТНЫХ

При вычислении суммы частных прежде всего перемещается рычаг (27) вправо на один или несколько разрядов с целью освобождения одного или нескольких разрядов в счетчике оборотов для накопления суммы частных. Затем выбирается делимое и делитель с максимальной разностью порядков и вычисляется первое частное, для получения которого делимое и делитель устанавливаются с 9-го разряда независимо от соотношения их цифровых частей. Перед вычислением следующего частного определяется разность ΔP между разностью порядков делимого и делителя при первом делении и разностью порядков делимого и делителя при очередном делении. При последующих делениях делимое устанавливается с $(9-\Delta P)$-го разряда, а делитель по-прежнему ставится с 9-го разряда. Рычаг (27) сохраняется в первоначально установленном положении. После нажатия клавиши (9) очередное частное автоматически складывается с содержимым счетчика оборотов. Так процесс продолжается, пока не получим сумму всех частных.

Положение запятой в сумме частных определяется при первом делении.

Пример.

$$(0{,}522\,000\,00\cdot10^{1}:0{,}332\,000\,00\cdot10^{1})+$$
$$+(0{,}675\,000\,00\cdot10^{-1}:0{,}275\,000\,00\cdot10^{0})=$$
$$=0{,}190\,810\,51\cdot10^{1}.$$

При вычислении разности частных сначала вычисляется частное с максимальной разностью порядков делимого и делителя способом, описанным в начале параграфа.

Затем производится установка делимого и делителя для выполнения второго деления. При этом опускается

клавиша (29) для удержания делителя на клавиатуре при последующем полуавтоматическом вычитании частного. Далее производится сдвиг каретки вправо до отказа с помощью клавиши (32). Затем выполняется полуавтоматическое деление с вычитанием частного попеременным нажатием на клавишу (5) до останова машины и на клавишу (31) для сдвига каретки на один разряд влево. Появление в старшем разряде счетчика оборотов цифры 9 указывает, что разность частных получилась отрицательная в дополнительном виде. Определение положения запятой в разности частных также производится при первом делении.

ГЛАВА III

ДЕЙСТВИЯ НАД МНОГОЗНАЧНЫМИ ЧИСЛАМИ НА МАШИНЕ «РЕЙНМЕТАЛЛ (CAP)»

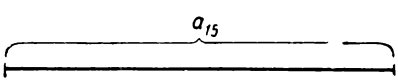
§ 10. ОБОЗНАЧЕНИЯ

В вычислительной практике встречаются случаи, когда приходится производить действия над многозначными числами. Особенно часто с этим сталкиваются при составлении и проверке таблиц чисел с большим числом знаков и при решении контрольных задач для электронных вычислительных машин.

На настольной счетной машине операции над многозначными числами в один прием выполнить невозможно, так как не позволяет разрядность клавиатуры. Многозначные числа приходится разбивать на части или группы (по нескольку разрядов в группе) и действия выполнять по этапам.

Для удобства и краткости описания действий над многозначными числами введем следующие условные обозначения. Многозначное число будем изображать схематично в виде отрезка и обозначать a_N, где индекс N указывает количество знаков, которое содержит число.

Например, число a_{15} имеет 15 знаков, и в виде отрезка его можно представить так:



Выражение, стоящее в скобках под многозначным числом, указывает, в каких разрядах это число или его часть набирается на клавиатуре. Например, 7-значное число $a_{7\,(7-1)}$ на клавиатуре нужно набрать с 7-го по 1-й разряд.

При установке числа a на дополнительной клавиатуре будем использовать обозначение вида $a_{(доп)}$.

$a_p^{окр}$ означает, что число, составленное из P цифр, округляется в младшем разряде путем отбрасывания справа части числа.

Пример. Пусть число $a_{15} = 0{,}471\ 538\ 278\ 567\ 243$ разбито на две группы: $a_8 = 471\ 538\ 27$ и $a_7 = 856\ 7243$, тогда $a_8^{окр} = 471\ 538\ 28$.

Знак плюс перед произведением, например, $+a_7 \times b_8$ означает, что данное произведение прибавляется к содержимому счетчика результатов, т. е. умножение производится без предварительной очистки счетчика результатов.

Стрелка $\xrightarrow{m}$ условно показывает сдвиг вправо числа, стоящего в счетчике результатов, на m разрядов и $\xleftarrow{m}$ аналогичный сдвиг влево.

§ 11. УМНОЖЕНИЕ МНОГОЗНАЧНОГО ЧИСЛА a_N НА МАЛОЗНАЧНОЕ ЧИСЛО a_m ($m \leqslant 8$)

Разбиваем число a_N на группы, по девять разрядов в каждой группе. Разбиение числа a_N на группы следует производить со старшей значащей цифры. Младшая группа числа a_N в случае необходимости дополняется нулями.

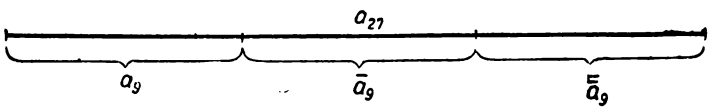
Умножение выполняется следующим образом: a_m устанавливаем на дополнительной клавиатуре, а младшую группу числа a_N устанавливаем на основной клавиатуре и производим умножение. Из счетчика результатов выписываем число, стоящее в 9—1 разрядах, а содержимое остальных разрядов счетчика результатов сдвигаем вправо на девять разрядов. Сдвиг осуществляем путем набора числа на основной клавиатуре и засылки клавишей плюс в счетчик результатов. Затем аналогично вычисляем произведение сомножителя a_m на следующую группу сомно-

жителя a_N, которое при верхнем положении рычага (24) прибавляется в счетчик результатов. Содержимое младших разрядов счетчика результатов (с 9-го по 1-й разряд) приписываем левее ранее выписанного числа. Опять производим аналогичный сдвиг на девять разрядов содержимого счетчика результатов и т. д. После умножения на последнюю старшую группу выписываем весь результат. Положение запятой в произведении определяется по правилам, описанным в § 2.

Пример. $a_N \times a_m$, где $N=27$, $m=5$.

$$a_N = 0{,}123\ 456\ 789\ 123\ 456\ 789\ 123\ 456\ 789 \cdot 10^{-1};$$
$$a_m = 0{,}222\ 22 \cdot 10^{-1};$$
$$a_{27} \times a_5 = 0{,}274\ 345\ 676\ 790\ 145\ 676\ 790\ 145\ 677 \cdot 10^{-2}.$$

1. Разбиваем a_{27} на три группы по 9 разрядов:



$$a_9 = 123\ 456\ 789;$$
$$\bar{a}_9 = 123\ 456\ 789;$$
$$\bar{\bar{a}}_9 = 123\ 456\ 789.$$

2. Производим умножение:

$$+a_5 \times \bar{\bar{a}}_9 = 222\ 22 \times 123\ 456\ 789$$

и в счетчике результатов получаем

000 027 434 567 651 58.

Выписываем число 456 765 158. Переносим 2743 вправо на 9 разрядов, после чего в счетчике результатов имеем следующее число: 000 000 000 000 027 43.

3. Производим умножение:

$$+a_5 \times \bar{a}_9 = 222\ 22 \times 123\ 456\ 789$$

и в счетчике результатов получаем

000 027 434 567 679 01.

Приписываем слева к ранее выписанному числу 456 765 158 содержимое счетчика результатов с 9-го по 1-й разряд и получаем число

456 767 901 456 765 158.

Передвигаем содержимое старших разрядов 2743 вправо на 9 разрядов. После чего в счетчике результатов имеем

000 000 000 000 027 43.

4. Производим последнее умножение:

$$+a_5 \times a_9 = 222\ 22 \times 123\ 456\ 789.$$

В счетчике результатов получаем следующее число:

000 027 434 567 679 01

и приписываем его слева к ранее переписанному числу:

274 345 676 790 145 676 790 145 676 515 8.

5. Положение запятой (порядок числа) определяем при последнем умножении по правилам, описанным в § 2. Поскольку значащая часть произведения больше значащей части сомножителей, порядок согласно указанному правилу равен —3:

$$a_{27} \times a_5 = 0{,}274\ 345\ 676\ 790\ 145\ 676\ 790\ 145\ 676\ 515\ 8 \cdot 10^{-3}.$$

При умножении многозначного числа на малозначное число предполагается, что малозначное число точное. Если многозначное число является приближенным числом, то окончательный результат округляется по числу знаков в многозначном числе.

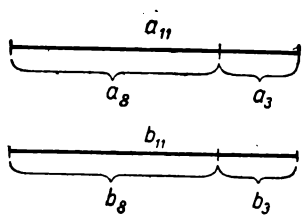
§ 12. УМНОЖЕНИЕ 11-ЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ: $a_{11} \times b_{11}$

(приближенный способ)

1. $\underset{(доп)}{a_8} \times \underset{(8-1)}{b_8}$.

2. $+\underset{(доп)}{a_8} \times \underset{(5-1)}{b_5^{окр}}$.

3. $+\underset{(доп)}{b_8} \times \underset{(5-1)}{a_5^{окр}}$.



Максимальная погрешность метода умножения с учетом окончательного округления результата до 11 значащих цифр не превосходит 6 единиц 12-го знака.

Пример.

$$0{,}527\,345\,456\,42\cdot 10^0 \times 0{,}342\,465\,758\,65\cdot 10^1 = \\ = 0{,}180\,597\,761\,80\cdot 10^1.$$

$$a_8 = 527\,345\,45; \qquad b_8 = 342\,465\,75;$$

$$a_5^{\text{окр}} = 527\,35; \qquad b_5^{\text{окр}} = 342\,47;$$

$$a_3 = 642; \qquad b_3 = 865.$$

1. Производим умножение $+a_8 \times b_8$.

a_8 набираем на основной клавиатуре в 8—1 разрядах, а

b_8 набираем на дополнительной клавиатуре.

В счетчике результатов получаем

018 059 775 504 333 75.

2. Не сбрасывая со счетчика результатов предыдущего произведения, производим умножение $+a_3 \times b_5^{\text{окр}}$. При этом a_3 набираем на дополнительной клавиатуре, а $b_5^{\text{окр}}$ на основной клавиатуре в 5—1 разрядах.

В счетчике результатов получаем

018 059 775 724 199 49.

3. Аналогично производим умножение $+b_3 \times a_5^{\text{окр}}$, после чего в счетчике результатов имеем произведение $a_{11} \times b_{11}$:

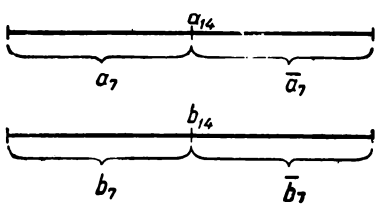
018 059 776 180 357 24.

Окончательно, вычисляя порядок произведения, получаем

$$0{,}180\,597\,761\,80\cdot 10^1.$$

§ 13. УМНОЖЕНИЕ 14-ЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ: $a_{14} \times b_{14}$

(приближенный способ)



1. $\underset{(доп)}{a_7^{окр}} \times \underset{(7-1)}{\bar{b}_7} + \underset{(доп)}{b_7^{окр}} \times \underset{(7-1)}{\bar{a}_7}$.

Выписываем содержимое 7-го и 6-го разрядов счетчика результатов.

2. $\xrightarrow{7}$

3. $\underset{(доп)}{+a_7} \times \underset{(7-1)}{b_7}$.

Выписываем число, стоящее в счетчике результатов с 14-го по 1-й разряд, затем справа приписываем ранее выписанные два разряда и округляем полученное число с 14 знаками.

Максимальная погрешность метода умножения порядка 5 единиц 14-го знака.

Пример.

$$0{,}527\ 345\ 456\ 422\ 35 \cdot 10^0 \times 0{,}342\ 465\ 758\ 653\ 43 \cdot 10^1 = \\ = 0{,}180\ 597\ 761\ 806\ 13 \cdot 10^1.$$

$a_7 = 527\ 345\ 4$; $b_7 = 342\ 465\ 7$;

$a_7^{окр} = 527\ 345\ 5$; $b_7^{окр} = 342\ 465\ 8$;

$\bar{a}_7 = 564\ 223\ 5$; $\bar{b}_7 = 586\ 534\ 3$.

1. Вычисляем сумму произведений $a_7^{окр} \times \bar{b}_7 + b_7^{окр} \times \bar{a}_7$:

$$527\ 345\ 5 \times 586\ 534\ 3 + 342\ 465\ 8 \times 564\ 223\ 5.$$

В счетчике результатов получаем

000 502 533 476 006 95.

Выписываем содержимое 7-го и 6-го разрядов — 76, а содержимое с 14-го по 8-й разряд счетчика результатов сдвигаем вправо на семь разрядов при помощи клавиши (32). Затем содержимое с 14-го по 8-й разряд нажимом на клавишу (21) переносим в контрольный регистр основной клавиатуры, при этом рычаг (24) должен находиться в нижнем положении. После этого клавишей (4) переносим содержимое контрольного регистра в счетчик результатов. Контрольный регистр гасим клавишей (22), а рычаг (24) ставим в верхнее положение.

В счетчике результатов получаем

000 000 000 050 253 34.

2. Производим умножение $+a_7 \times b_7$:

527 345 4 × 342 465 7.

В счетчике результатов получаем

000 180 597 761 806 12.

Выписываем содержимое с 14-го по 1-й разряд и приписываем ранее выписанное число

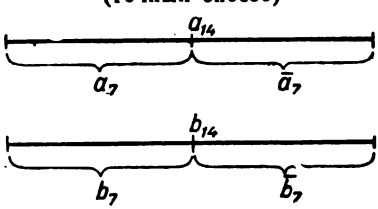
180 597 761 806 127 6.

Далее округляем его до 14 знаков и определяем порядок по известному правилу:

$$a_{14} \times b_{14} = 0{,}180\,597\,761\,806\,13 \cdot 10^1.$$

§ 14. УМНОЖЕНИЕ 14-ЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ: $a_{14} \times b_{14}$

(точный способ)



1. $\underset{\text{(доп.)}}{\bar{a}_7} \times \underset{(7-1)}{\bar{b}_7}$. Выписываем содержимое 7—1 разрядов.

2. $\xrightarrow{7}$

3. $\underset{\text{(доп)}}{+a_7} \times \underset{(7-1)}{\bar{b}_7} \underset{\text{(доп)}}{+b_7} \times \underset{(7-1)}{\bar{a}_7}$. Выписываем содержимое 7—1 разрядов.

4. $\xrightarrow{7}$

5. $\underset{\text{(доп)}}{+a_7} \times \underset{(7-1)}{b_7}$. Выписываем содержимое 14—1 разрядов.

Результат получается с 27 или 28 точными знаками.

Пример.

$$0{,}527\,345\,456\,422\,35 \cdot 10^0 \times 0{,}342\,465\,758\,653\,43 \cdot 10^1 =$$
$$= 0{,}180\,597\,761\,806\,119\,402\,481\,356\,160 \cdot 10^1.$$

$a_7 = 527\,345\,4$, $b_7 = 342\,465\,7$;

$\bar{a}_7 = 564\,223\,5$; $\bar{b}_7 = 586\,534\,3$.

1. Производим умножение $+\bar{a}_7 \times \bar{b}_7$:

564 223 5 × 586 534 3.

В счетчике результатов получаем

000 330 936 435 616 05.

Выписываем содержимое с 7-го по 1-й разряд — 356 160 5, а число, стоящее с 14-го по 8-й разряд, сдвигаем вправо на семь разрядов способом, описанным в предыдущем параграфе.

В счетчике результатов получаем

000 000 000 033 093 64.

2. Прибавляем к содержимому счетчика результатов сумму произведений

$$+a_7 \times \bar{b}_7 + b_7 \times \bar{a}_7:$$

527 345 4 × 586 534 3 + 342 465 7 × 564 223 5.

В счетчике результатов получаем

000 502 533 394 024 81.

Выписываем число с 7-го по 1-й разряд — 940 248 1, а содержимое с 14-го по 8-й разряд сдвигаем вправо на семь разрядов ранее описанным способом (в § 11), после чего в счетчике результатов получаем

000 000 000 050 253 33.

3. Производим последнее умножение $+a_7 \times b_7$:

527 345 4 × 342 465 7.

В счетчике результатов получаем

000 180 597 761 806 11.

Выписываем содержимое с 14-го по 1-й разряд, приписываем справа ранее выписанные числа и получаем

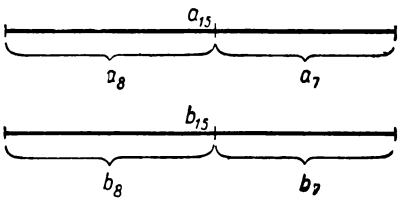
000 180 597 761 806 119 402 481 356 160 5.

В окончательном результате получаем 27 точных знаков цифровой части. Порядок числа определяется по правилам, описанным в § 2.

$$a_{14} \times b_{14} = 0{,}180\,597\,761\,806\,119\,402\,481\,356\,160 \cdot 10^1.$$

§ 15. УМНОЖЕНИЕ 15-ЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ: $a_{15} \times b_{15}$.

(приближенный способ)



1. $\underset{(7-1)}{+b_7} \times \underset{(доп)}{a_8^{окр}} \underset{(7-1)}{+a_7} \times \underset{(доп)}{b_8^{окр}}$.

2. $\xrightarrow{7}$

3. $\underset{(доп)}{a_8} \times \underset{(8-1)}{b_8}$.

Максимальная погрешность метода умножения порядка одной единицы 15-го знака.

Пример.

$$0{,}527\,345\,456\,422\,351 \cdot 10^0 \times 0{,}342\,465\,758\,653\,435 \cdot 10^1 = \\ = 0{,}180\,597\,761\,806\,122 \cdot 10^1.$$

$a_8 = 527\,345\,45$; $\quad b_8 = 342\,465\,75$;

$a_8^{окр} = 527\,345\,46$; $\quad b_8^{окр} = 342\,465\,76$;

$a_7 = 642\,235\,1$; $\quad b_7 = 865\,343\,5$.

1. Вычисляем сумму произведений $+b_7 \times a_8^{окр} + a_7 \times \times b_8^{окр}$:

$$865\,343\,5 \times 527\,345\,46 + 642\,235\,1 \times 342\,465\,76.$$

В счетчике результатов получаем

006 762 784 976 856 86.

Далее делаем сдвиг на семь разрядов описанным в § 11 способом и в счетчике результатов получаем

000 000 000 676 278 49.

2. Производим умножение $+a_8 \times b_8$:

$$527\,345\,45 \times 342\,465\,75.$$

В счетчике результатов получаем

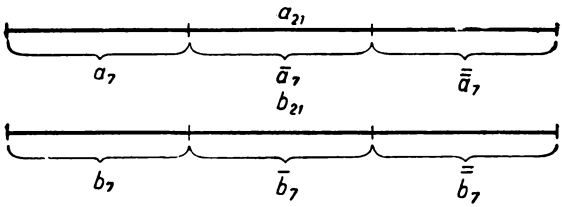
018 059 776 180 612 24.

Выписываем окончательный результат, округленный с 15 знаками, и определяем порядок произведения:

$$a_{15} \times b_{15} = 0{,}180\,597\,761\,806\,122 \cdot 10^1.$$

§ 16. УМНОЖЕНИЕ 21-ЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ: $a_{21} \times b_{21}$

(приближенный способ)



1. $\underset{(\text{доп})}{a_7^{\text{окр}}} \times \underset{(7-1)}{\bar{\bar{b}}_7} + \underset{(\text{доп})}{b_7^{\text{окр}}} \times \underset{(7-1)}{\bar{\bar{a}}_7} + \underset{(\text{доп})}{\bar{a}_7^{\text{окр}}} \times \underset{(7-1)}{\bar{b}_7^{\text{окр}}}.$

Выписываем содержимое 7-го и 6-го разрядов.

2. $\xrightarrow{7}$

3. $\underset{(\text{доп})}{a_7} \times \underset{(7-1)}{\bar{b}_7} + \underset{(\text{доп})}{b_7} \times \underset{(7-1)}{\bar{a}_7}.$

Выписываем содержимое 7—1 разрядов.

4. $\xrightarrow{7}$

5. $\underset{(\text{доп})}{a_7} \times \underset{(7-1)}{b_7}.$

Выписываем содержимое 14—1 разрядов и справа приписываем ранее выписанные числа.

Максимальная погрешность метода умножения порядка 8 единиц 21-го знака.

Пример.

$$0{,}527\,345\,456\,422\,351\,456\,422 \cdot 10^0 \times$$
$$\times 0{,}342\,465\,758\,653\,435\,758\,653 \cdot 10^1 =$$
$$= 0{,}180\,597\,761\,806\,122\,938\,056 \cdot 10^1.$$

$a_7 = 527\,345\,4;$	$b_7 = 342\,465\,7;$
$a_7^{\text{окр}} = 527\,345\,5;$	$b_7^{\text{окр}} = 342\,465\,8;$
$\bar{a}_7 = 564\,223\,5;$	$\bar{b}_7 = 586\,534\,3;$
$\bar{a}_7^{\text{окр}} = 564\,223\,5;$	$\bar{b}_7^{\text{окр}} = 586\,534\,4;$
$\bar{\bar{a}}_7 = 145\,642\,2;$	$\bar{\bar{b}}_7 = 575\,865\,3.$

1. Вычисляем сумму произведений $a_7^{окр} \times \bar{\bar{b}}_7 + b_7^{окр} \times \bar{\bar{a}}_7 + \bar{a}_7^{окр} \times \bar{b}_7^{окр}$ и в счетчике результатов получаем

000 684 493 939 13631.

Выписываем содержимое 7-го и 6-го разрядов — 39, а содержимое 14—8 разрядов переносим вправо на семь разрядов способом, описанным в § 11, и в счетчике результатов получаем

000 000 000 068 449 39.

2. Вычисляем сумму произведений $+a_7 \times \bar{b}_7 + b_7 \times \bar{a}_7$. В счетчике результатов получаем

000 502 533 429 380 56.

Выписываем содержимое с 7-го по 1-й разряд — 293 805 6, а число, стоящее с 14-го по 8-й разряд, переносим вправо на семь разрядов и в счетчике результатов получаем

000 000 000 050 253 34.

3. Производим умножение $+a_7 \times b_7$, после чего в счетчике результатов получаем число

000 180 597 761 806 12.

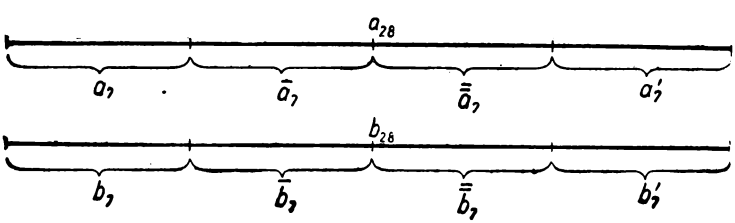
Выписываем результат с 14-го по 1-й разряд и приписываем ранее выписанные числа. Порядок определяется по правилам, описанным в § 2.

Окончательный результат выписывается с 21 значащей цифрой:

$$a_{21} \times b_{21} = 0{,}180\,597\,761\,806\,122\,938\,056 \cdot 10^1.$$

§ 17. УМНОЖЕНИЕ 28-ЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ: $a_{28} \times b_{28}$

(приближенный способ)



1. $\underset{(доп)}{a_7^{окр}} \times \underset{(7-1)}{b'_7} + \underset{(доп)}{b_7^{окр}} \times \underset{(7-1)}{a'_7} + \underset{(доп)}{\bar{a}_7^{окр}} \times \underset{(7-1)}{\bar{\bar{b}}_7^{окр}} + \underset{(доп)}{\bar{b}_7^{окр}} \times \underset{(7-1)}{\bar{\bar{a}}_7^{окр}}.$

Выписываем содержимое 7-го и 6-го разрядов.

2. $\xrightarrow{7}$

3. $\underset{(доп)}{+a_7} \times \underset{(7-1)}{\bar{\bar{b}}_7} + \underset{(доп)}{b_7} \times \underset{(7-1)}{\bar{\bar{a}}_7} + \underset{(доп)}{\bar{a}_7} \times \underset{(7-1)}{\bar{b}_7}.$

Выписываем содержимое с 7-го по 1-й разряд.

4. $\xrightarrow{7}$

5. $\underset{(доп)}{+a_7} \times \underset{(7-1)}{\bar{b}_7} + \underset{(доп)}{b_7} \times \underset{(7-1)}{\bar{a}_7}.$

Выписываем содержимое с 7-го по 1-й разряд.

6. $\xrightarrow{7}$

7. $\underset{(доп)}{+a_7} \times \underset{(7-1)}{b_7}.$

Выписываем содержимое с 14-го по 1-й разряд и справа приписываем ранее выписанные результаты.

Максимальная погрешность метода умножения порядка одной единицы 27-го знака.

Пример.

$$0{,}527\,345\,456\,422\,351\,456\,422\,357\,456\,1 \cdot 10^0 \times$$
$$\times 0{,}342\,465\,758\,653\,435\,758\,653\,864\,561\,4 \cdot 10^1 =$$
$$= 0{,}180\,597\,761\,806\,122\,938\,056\,094\,312\,1 \cdot 10^1.$$

$a_7 = 527\,345\,4$; $b_7 = 342\,465\,7$;

$\bar{a}_7 = 564\,223\,5$; $\bar{b}_7 = 586\,534\,3$;

$\bar{\bar{a}}_7 = 145\,642\,2$; $\bar{\bar{b}}_7 = 575\,865\,3$;

$a'_7 = 357\,456\,1$; $b'_7 = 864\,561\,4$;

$a_7^{окр} = 527\,345\,5$; $b_7^{окр} = 342\,465\,8$;

$\bar{a}_7^{окр} = 564\,223\,5$; $\bar{b}_7^{окр} = 586\,534\,4$;

$\bar{\bar{a}}_7^{окр} = 145\,642\,2$; $\bar{\bar{b}}_7^{окр} = 575\,865\,4$.

1. Находим сумму произведений $a_7^{окр} \times b'_7 + b_7^{окр} \times a'_7 + \bar{a}_7^{окр} \times \bar{\bar{b}}_7^{окр} + \bar{b}_7^{окр} \times \bar{\bar{a}}_7^{окр}$:

$$527\,345\,5 \times 864\,561\,4 + 342\,465\,8 \times 357\,456\,1 +$$
$$+ 564\,223\,5 \times 575\,865\,4 + 586\,534\,4 \times 145\,642\,2.$$

В счетчике результатов получаем

000 988 680 004 923 66.

Выписываем содержимое 7-го и 6-го разрядов — 04, а содержимое с 14-го по 8-й разряд сдвигаем вправо способом, описанным в § 11.

В счетчике результатов получаем

000 000 000 098 868 00.

2. К содержимому счетчика результатов прибавляем сумму произведений $+a_7 \times \bar{\bar{b}}_7 + b_7 \times \bar{\bar{a}}_7 + \bar{a}_7 \times \bar{b}_7$:

$$527\,345\,4 \times 575\,865\,3 + 342\,465\,7 \times 145\,642\,2 + \\ + 564\,223\,5 \times 586\,534\,3.$$

В счетчике результатов получаем

000 684 493 909 431 21.

Выписываем содержимое с 7-го по 1-й разряд — 094 312 1, а содержимое с 14-го по 8-й разряд переносим вправо на семь разрядов.

В счетчике результатов получаем

000 000 000 068 449 39.

3. К содержимому счетчика результатов прибавляем сумму произведений $+a_7 \times \bar{b}_7 + b_7 \times \bar{a}_7$:

$$527\,345\,4 \times 586\,534\,3 + 342\,465\,7 \times 564\,223\,5.$$

В счетчике результатов получаем

000 502 533 429 380 56.

Выписываем содержимое счетчика результатов с 7-го по 1-й разряд — 293 805 6, а содержимое с 14-го по 8-й разряд переносим вправо на семь разрядов и в счетчике результатов получаем

000 000 000 050 253 34.

4. Вычисляем произведение $+a_7 \times b_7$:

$$527\,345\,4 \times 342\,465\,7.$$

Выписываем содержимое счетчика результатов с 14-го по 1-й разряд и приписываем справа ранее выписанные числа:

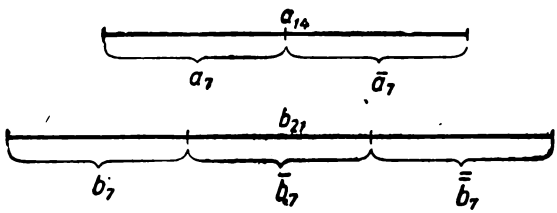
180 597 761 806 122 938 056 094 312 104.

Производим округление до 28 значащих цифр и определяем порядок произведения по правилам, описанным в § 2:

$a_{28} \times b_{28} = 0{,}180\ 597\ 761\ 806\ 122\ 938\ 056\ 094\ 312\ 1 \cdot 10^1.$

§ 18. УМНОЖЕНИЕ 14-ЗНАЧНОГО ЧИСЛА НА 21-ЗНАЧНОЕ: $a_{14} \times b_{21}$

(приближенный способ)



1. $\underset{(\text{доп})\ (7-1)}{a_7^{\text{окр}} \times \bar{\bar{b}}_7} + \underset{(\text{доп})\ (7-1)}{\bar{a}_7^{\text{окр}} \times \bar{b}_7}.$ — Выписываем содержимое 7-го и 6-го разрядов.

2. $\xrightarrow{7}$

3. $\underset{(\text{доп})\ (7-1)}{+a_7 \times \bar{b}_7} + \underset{(\text{доп})\ (7-1)}{b_7 \times \bar{a}_7}.$ — Выписываем содержимое 7—1 разрядов.

4. $\xrightarrow{7}$

5. $+a_7 \times b_7.$ — Выписываем содержимое с 14-го по 1-й разряд и справа приписываем ранее выписанные числа.

Максимальная погрешность метода умножения порядка 1,5 единицы 21-го разряда в предположении, что a_{14} — точное число.

Пример.

$$0{,}527\ 345\ 456\ 422\ 35 \cdot 10^0 \times$$
$$\times 0{,}342\ 465\ 758\ 653\ 435\ 758\ 653 \cdot 10^1 =$$
$$= 0{,}180\ 597\ 761\ 806\ 122\ 439\ 282 \cdot 10^1.$$

$a_7 = 527\ 345\ 4;$ $\quad b_7 = 342\ 465\ 7;$

$a_7^{\text{окр}} = 527\ 345\ 5;$ $\quad \bar{b}_7 = 586\ 534\ 3;$

$\bar{a}_7 = 564\ 223\ 5;$ $\quad \bar{b}_7^{\text{окр}} = 586\ 534\ 4;$

$\bar{\bar{b}}_7 = 575\ 865\ 3.$

1. Вычисляем сумму произведений $\bar{a}_7^{окр} \times \bar{b}_7 + \bar{a}_7 \times b_7^{окр}$:

527 345 5×575 865 3+564 223 5×586 534 4.

В счетчике результатов получаем

000 634 616 466 599 55.

Выписываем содержимое 7-го и 6-го разрядов — 66, число, стоящее с 14-го по 8-й разряд, переносим вправо на семь разрядов способом, описанным в § 11.

В счетчике результатов получаем

000 000 000 063 461 64.

2. Вычисляем сумму произведений $\underset{(доп)}{+a_7} \times \underset{(7-1)}{\bar{b}_7} + \underset{(доп)}{b_7} \times \underset{(7-1)}{\bar{a}_7}$:

527 345 4×586 534 3+342 465 7×564 223 5.

В счетчике результатов получаем

000 502 533 424 392 81.

Выписываем содержимое с 7-го по 1-й разряд — 243 928 1, а содержимое с 14-го по 8-й разряд переносим вправо на семь разрядов.

В счетчике результатов получаем

000 000 000 050 253 34.

3. Производим умножение $+a_7 \times b_7$:

527 345 4×342 465 7.

В счетчике результатов получаем

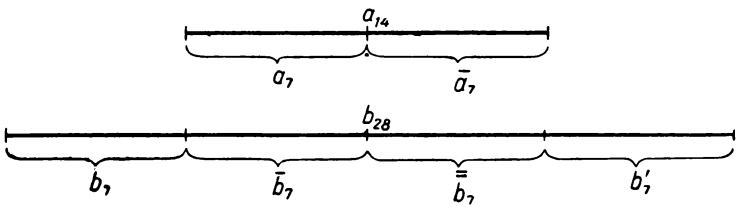
000 180 597 761 806 12.

Выписываем содержимое счетчика результатов с 14-го по 1-й разряд и приписываем справа ранее выписанные числа. Порядок окончательного результата определяется по правилам, описанным в § 2.

$$a_{14} \times b_{21} = 0{,}180\ 597\ 761\ 806\ 122\ 439\ 282 \cdot 10^1.$$

§ 19. УМНОЖЕНИЕ 14-ЗНАЧНОГО ЧИСЛА НА 28-ЗНАЧНОЕ: $a_{14} \times b_{28}$

(приближенный способ)



1. $\underset{(\text{доп})\ (7-1)}{a_7^{\text{окр}}} \times b'_7 + \underset{(\text{доп})\ (7-1)}{\bar{a}_7} \times \bar{\bar{b}}_7^{\text{окр.}}$ — Выписываем содержимое 7-го и 6-го разрядов.
2. $\xrightarrow{7}$
3. $+a_7 \times \bar{\bar{b}}_7 + \bar{a}_7 \times \bar{b}_7.$ — Выписываем содержимое с 7-го по 1-й разряд.
4. $\xrightarrow{7}$
5. $+a_7 \times \bar{b}_7 + b_7 \times \bar{a}_7.$ — Выписываем содержимое с 7-го по 1-й разряд.
6. $\xrightarrow{7}$
7. $+a_7 \times b_7.$ — Выписываем содержимое с 14-го по 1-й разряд и приписываем справа ранее выписанные числа.

Максимальная погрешность метода умножения порядка 1,5 единицы 28-го знака в предположении, что a_{14} — точное число.

Пример.

$$0{,}527\,345\,456\,422\,35 \cdot 10^0 \times$$
$$\times 0{,}342\,465\,758\,653\,435\,758\,653\,864\,561\,9 \cdot 10^1 =$$
$$= 0{,}180\,597\,761\,806\,122\,439\,281\,306\,746\,3 \cdot 10^1.$$

$a_7 = 527\,345\,4;$ $\quad b_7 = 342\,465\,7;$

$a_7^{\text{окр}} = 527\,345\,5;$ $\quad \bar{b}_7 = 586\,534\,3;$

$\bar{a}_7 = 564\,223\,5;$ $\quad \bar{\bar{b}}_7 = 575\,865\,3;$

$\bar{\bar{b}}_7^{\text{окр}} = 575\,865\,4;$

$b'_7 = 864\,561\,9.$

1. Находим сумму произведений $a_7^{окр} \times b_7' + \bar{a}_7 \times \bar{b}_7^{окр}$:

$$527\,345\,5 \times 864\,561\,9 + 564\,223\,5 \times 575\,865\,4.$$

В счетчике результатов получаем

000 780 839 618 953 35.

Выписываем содержимое 7-го и 6-го разрядов — 18, а число, стоящее в 14—8 разрядах, переносим вправо на семь разрядов способом, описанным в § 11.

В счетчике результатов получаем

000 000 000 078 083 96.

2. Вычисляем сумму произведений $+a_7 \times \bar{\bar{b}}_7 + \bar{a}_7 \times \bar{b}_7$:

$$527\,345\,4 \times 575\,865\,3 + 564\,223\,5 \times 586\,534\,3.$$

В счетчике результатов получаем

000 634 616 430 674 63.

Выписываем содержимое с 7-го по 1-й разряд — 306 746 3, а содержимое с 14-го по 8-й разряд сдвигаем вправо на семь разрядов и в счетчике результатов получаем

000 000 000 063 461̄ 64.

3. Вычисляем сумму произведений $+a_7 \times \bar{b}_7 + b_7 \times \bar{a}_7$:

$$527\,345\,4 \times 586\,534\,3 + 342\,465\,7 \times 564\,223\,5.$$

В счетчике результатов получаем

000 502 533 424 392 81.

Выписываем содержимое с 7-го по 1-й разряд — 243 928 1, а содержимое с 14-го по 8-й разряд переносим вправо на семь разрядов.

В счетчике результатов получаем

000 000 000 050 253 34.

4. Вычисляем произведение $+a_7 \times b_7$:

$$527\,345\,4 \times 342\,465\,7.$$

В счетчике результатов получаем

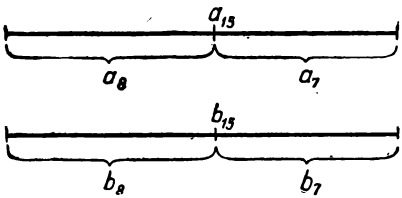
000 180 597 761 806 12.

Выписываем содержимое счетчика результатов с 14-го по 1-й разряд и приписываем справа ранее выписанное число. Порядок окончательного результата определяется по правилам, описанным в § 2.

$$a_{14} \times b_{28} = 0{,}180\,597\,761\,806\,122\,439\,281\,306\,746\,3 \cdot 10^1.$$

§ 20. ДЕЛЕНИЕ 15-ЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ: $c_{15} = a_{15} : b_{15}$

(приближенный способ)



1. $[a_{15} - 1$ (во 2-м разряде)$] : b_8 = c_8$.
2. $\xleftarrow{7}$ остатка и $+1$ (в 16-м разряде).
3. $-(b_7 \times c_8) : b_8^{окр} = \bar{c}_8$.
4. $c_8 + \bar{c}_8^{окр} \cdot 10^{-7}$.

Максимальная погрешность метода деления порядка 3 единиц 15-го знака.

Для более подробного пояснения данной схемы рассмотрим следующий пример:

$$0{,}180\,597\,761\,806\,122 \cdot 10^1 : 0{,}342\,465\,758\,653\,435 \cdot 10^1 = \\ = 0{,}527\,345\,456\,422\,350 \cdot 10^0.$$

1. Числитель a_{15} засылаем в счетчик результатов либо с 16-го разряда, если значащая часть числителя меньше значащей части знаменателя ($M_a < M_b$), либо с 15-го разряда, если значащая часть числителя больше значащей части знаменателя ($M_a > M_b$). Поскольку основная клавиатура имеет всего 9 разрядов, то она не дает возможности установить сразу a_{15}, поэтому мы a_{15} разбиваем на две части: a_7 и a_8.

Если $M_a < M_b$, то a_8 набираем на основной клавиатуре с 9-го по 2-й разряд и забрасываем в счетчик результатов. Затем с 9-го по 3-й разряд набираем a_7 и нажимаем на клавишу (8), при этом рычаг (24) должен находиться в верхнем положении. После чего в счетчике результатов фиксируется a_{15} с 16-го по 2-й разряд.

Если $M_a \geqslant M_b$, то a_8 набираем на основной клавиатуре с 8-го по 1-й разряд, а a_7 набираем с 8-го по 2-й разряд, и тогда a_{15} фиксируется в счетчике результатов с 15-го по 1-й разряд.

В данном примере $M_a < M_b$, значит, a_{15} устанавливаем с 16-го по 2-й разряд.

Далее в любом случае ставим во второй разряд основной клавиатуры единицу и вычитаем ее из содержимого счетчика результатов.

В счетчике результатов имеем

01 805 977 518 061 220.

Устанавливаем всегда в 8—1 разрядах основной клавиатуры b_8 и производим деление. В счетчике оборотов и в счетчике результатов получаем

5 273 454 4
000 000 000 187 442 0

Выписываем $c_8 = 527\,345\,44$.

2. Клавишей (32) сдвигаем каретку вправо на семь разрядов и остаток 187 442 0 набираем на клавиатуре в 7—1 разрядах, а счетчик результатов очищаем. В 16-й разряд счетчика результатов прибавляем единицу.

В счетчике результатов получаем

010 187 442 000 000 00.

3. Клавишей (31) возвращаем каретку в исходное положение. Производим умножение — $(b_7 \times c_8)$ следующим образом. На дополнительной клавиатуре набираем b_7, а на основной клавиатуре набираем c_8 и нажимаем на клавишу (7) и рычаг (28) опускаем вниз для того, чтобы каретка остановилась в исходном положении для деления.

В счетчике результатов получаем

005 624 092 512 413 60.

Делим содержимое счетчика результатов на $b_8^{окр} = 342\,465\,76$, которое ставим в 8—1 разрядах, после чего в счетчиках оборотов и результатов получаем

164 223 49
000 000 000 281 143 36

4. К c_8 прибавляем со сдвигом на семь разрядов второе округленное частное $\bar{c}_8^{окр}$

$$\begin{array}{r} +\ 527\,345\,44 \\ 164\,223\,50 \\ \hline 527\,345\,4564\,223\,50 \end{array}$$

Таким образом, $c_{15} = 0{,}527\,345\,456\,422\,350 \cdot 10^0$.
Порядок частного определяется при первом делении по правилам, описанным в § 2.

§ 21. ДЕЛЕНИЕ 21-ЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ: $c_{21} = a_{21} : b_{21}$

(приближенный способ)

1. $c_{14} = a_{15} : b_{15}$.
2. $\alpha_{21} = c_{14} \times b_{21}$.
3. $\Delta_8 = a_{21} - \alpha_{21}$.
4. $\varepsilon_8 = \Delta_8 : b_8$.
5. $c_{21} = c_{14} + \varepsilon_8$.

Метод деления обеспечивает 20—21 верных значащих цифр.

Пример.

$$0{,}180\,597\,761\,806\,122\,439\,282 \cdot 10^1 :$$
$$: 0{,}342\,465\,758\,653\,435\,758\,653 \cdot 10^1 =$$
$$= 0{,}527\,345\,456\,422\,351\,456\,422 \cdot 10^0.$$

1. Получаем c_{14} по схеме, описанной в предыдущем параграфе, с той разницей, что второе частное c_8 не округляется, и определяем его порядок.

$$c_{14} = 0{,}180\,597\,761\,806\,122 \cdot 10^1 : 0{,}342\,465\,758\,653\,435 \cdot 10^1 =$$
$$= 0{,}527\,345\,456\,422\,34 \cdot 100.$$

$$\begin{array}{rl} 527\,345\,44 & \text{(первое частное)} \\ + & \\ 16\,422\,349 & \text{(второе частное)} \\ \hline 527\,345\,456\,422\,349 & \text{(результат)} \end{array}$$

c_{14} также выписываем без округления последнего знака; в данном случае в виде

$$c_{14} = 0{,}527\,345\,456\,422\,34 \cdot 10^0.$$

2. Вычисляем $\alpha_{21} = c_{14} \times b_{21}$ по ранее описанной схеме:

$$0{,}527\,345\,456\,422\,34 \cdot 10^0 \times$$
$$\times 0{,}342\,465\,758\,653\,435\,758\,653 \cdot 10^1 =$$
$$= 0{,}180\,597\,761\,806\,119\,014\,624 \cdot 10^1.$$

3. Вычисляем $\Delta_8 = a_{21} - \alpha_{21}$:

$$\begin{array}{r} -\ 0{,}180\,597\,761\,806\,122\,938\,056 \cdot 10^1 \\ 0{,}180\,597\,761\,806\,119\,014\,624 \cdot 10^1 \\ \hline 0{,}000\,000\,000\,000\,003\,923\,432 \cdot 10^1 \end{array}$$
$$\Delta_8 = 0{,}392\,4332 \cdot 10^{-13}.$$

4. Вычисляем $\varepsilon_8 = \frac{\Delta_8}{b_8}$:

$$\varepsilon_8 = 0{,}392\,3432 \cdot 10^{-13} : 0{,}342\,465\,75 \cdot 10^1 =$$
$$= 0{,}114\,564\,22 \cdot 10^{-13}.$$

5. Вычисляем $c_{21} = c_{14} + \varepsilon_8$:

$$\begin{array}{r} +\ 0{,}527\,345\,456\,422\,34 \\ 0{,}000\,000\,000\,000\,011\,456\,422 \\ \hline 0{,}527\,345\,456\,422\,351\,456\,422 \end{array}$$
$$c_{21} = 0{,}527\,345\,456\,422\,351\,456\,422 \cdot 10^0.$$

§ 22. ДЕЛЕНИЕ 28-ЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ: $c_{28} = a_{28} : b_{28}$

(приближенный способ)

1. $c_{14} = a_{15} : b_{15}$.
2. $\alpha_{28} = c_{14} \times b_{28}$.
3. $\Delta_{15} = a_{28} - \alpha_{28}$.
4. $\varepsilon_{15} = \Delta_{15} : b_{15}$.
5. $c_{28} = c_{14} + \varepsilon_{15}$.

Метод деления обеспечивает 26—28 верных значащих цифр.

Пример.

$$0{,}180\,597\,761\,806\,122\,938\,056\,094\,312\,1 \cdot 10^1 :$$
$$: 0{,}342\,465\,758\,653\,435\,758\,653\,864\,561\,4 \cdot 10^1 =$$
$$= 0{,}527\,345\,456\,422\,351\,456\,422\,357\,456\,0 \cdot 10^0.$$

$$c_{14} = 0{,}527\,345\,456\,422\,34 \cdot 10^0.$$
$$\alpha_{28} = 0{,}180\,597\,761\,806\,119\,014\,623\,720\,212\,0 \cdot 10^1.$$

$$\Delta_{15} = 0{,}000\,000\,000\,000\,003\,923\,432\,374\,100\,1 \cdot 10^{1} =$$
$$= 0{,}392\,343\,237\,410\,01 \cdot 10^{-16}.$$
$$\varepsilon_{15} = 0{,}392\,343\,237\,410 \cdot 10^{-13}:$$
$$:0{,}342\,465\,758\,653\,435 \cdot 10^{1} =$$
$$= 0{,}114\,564\,223\,574\,553 \cdot 10^{-14}.$$
$$c_{28} = 0{,}527\,345\,456\,422\,351\,456\,422\,357\,455\,3 \cdot 10^{0}.$$

ГЛАВА IV

ВЫПОЛНЕНИЕ ОСНОВНЫХ ДЕЙСТВИЙ НА НАСТОЛЬНОЙ СЧЕТНОЙ МАШИНЕ «МЕРСЕДЕС ЭВКЛИД». МОДЕЛЬ 38 MS

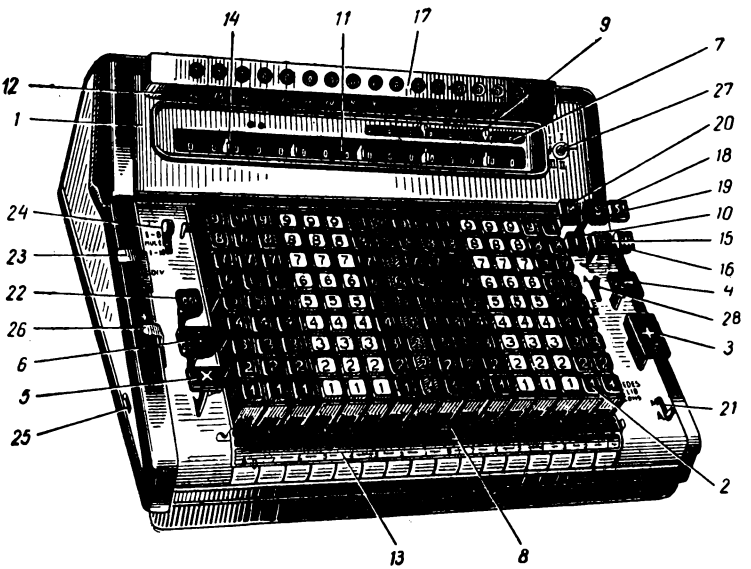


Рис. 2

§ 23. ВНЕШНЕЕ ОПИСАНИЕ МАШИНЫ

На рисунке 2 показаны следующие внешние элементы счетной машины «Мерседес Эвклид», модель 38 MS:

1. Каретка.
2. Клавиатура.
3. Клавиша сложения.

4. Клавиша вычитания.
5. Клавиша умножения.
6. Клавиша деления.
7. Счетчик оборотов.
8. Шкала для определения положения запятой при делении.
9. Указатель запятых счетчика оборотов.
10. Клавиша гашения счетчика оборотов.
11. Счетчик результатов.
12. Шкала счетчика результатов.
13. Шкала для определения положения запятой при умножении.
14. Указатель запятой счетчика результатов.
15. Клавиша гашения счетчика результатов.
16. Клавиша гашения клавиатуры.
17. Накапливающий счетчик.
18. Клавиша для запоминания чисел.
19. Клавиша для гашения накапливающего счетчика.
20. Клавиша «М» для умножения содержимого счетчика результатов.
21. Рычаг «А-М».
22. Клавиша для переключения счетчика оборотов.
23. Рычаг для получения частного с различным количеством знаков.
24. Рычаг для умножения многозначных чисел.
25. Рычаг останова машины при неправильном делении.
26. Рычаг для вычитания произведения и частного.
27. Штифт для получения дополнительного числа в счетчике результатов.
28. Рычаг «А-Е».

Числа, необходимые для выполнения арифметических операций, набираются на клавиатуре нажатием клавиш. Нули на клавиатуре не набираются. Клавиатура имеет 16 разрядов, что дает возможность набирать 16-разрядные числа. Ошибочно нажатая клавиша автоматически устанавливается в начальном положении при нажатии на правильную клавишу или клавишу гашения (16) всей клавиатуры или при одновременном нажатии двух клавиш этого разряда. Окраска рядов клавиш и указателей запятых в различные цвета облегчает набор чисел. Для удобства выполнения некоторых операций 9-й разряд справа обычно выделен красным или зеленым цветом.

Поясним назначение некоторых рычагов и клавиш вычислительной машины.

Клавиши (18) и (19) предназначены для обращения к запоминающему счетчику. При нажатии на клавишу (18) происходит сложение содержимого счетчика результатов и содержимого накапливающего счетчика, при этом результат остается в накапливающем счетчике, а счетчик результатов очищается. При нажатии на клавишу (19) также происходит сложение содержимого счетчика результатов и содержимого накапливающего счетчика, но при этом сумма остается в счетчике результатов, а накапливающий счетчик очищается.

Рычаг «А-М» (21) служит для автоматического гашения клавиатуры. Если рычаг стоит в положении «А», то при сложении и вычитании клавиатура автоматически гасится. Если рычаг находится в положении «М», содержимое клавиатуры сохраняется.

Рычаг (26) служит для сложения и вычитания произведения и частного. В положении «плюс» прибавляется произведение в счетчик результатов и частное в счетчик оборотов, в положении «минус» вычитается произведение из счетчика результатов и частное из счетчика оборотов. Рычаг «А-Е» используется при пользовании клавишей (20).

Назначение всех остальных элементов машины будет объяснено при описании различных действий по мере надобности.

Перед началом работы следует очистить накапливающий счетчик нажатием на клавишу (19), счетчик результатов, счетчик оборотов и клавиатуру одновременным нажатием на клавиши (10), (15), (16).

§ 24. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ

Прежде всего устанавливается указатель запятой на шкале (12) так, чтобы на клавиатуре разместить наибольшее по модулю слагаемое и оставить требуемое число запасных разрядов в счетчике результатов для накопления суммы. Затем набирается на клавиатуре первое слагаемое и нажатием на клавишу (3) засылается в счетчик результатов. Далее в соответствии с расположением запятой устанавливается на клавиатуре второе слагаемое и снова нажимается клавиша (3). Сумма получается в счетчике результатов. Аналогично можно получить

сумму нескольких слагаемых. В счетчике оборотов происходит подсчет количества слагаемых, если клавиша (22) поднята до отказа.

Примеры.

$$2{,}345\,650 + 35{,}865\,460 = 38{,}211\,110;$$
$$2{,}345\,650 + 35{,}865\,460 + 58{,}345\,470 = 96{,}556\,580.$$

Аналогичными действиями можно вычислить алгебраическую сумму нескольких чисел. При вычитании второго числа нажимается клавиша (4). Появление девяток левее возможной старшей цифры результата показывает, что результат получился отрицательный и в дополнительном виде. Для того чтобы получить абсолютное значение результата, нужно штифт (27) сдвинуть вправо. При появлении в последнем разряде справа красного нуля необходимо прибавить единицу в следующий, старший разряд.

Пример.

$$2{,}345\,650 - 35{,}865\,460 - 125{,}460\,751 = -158{,}980\,561.$$

В счетчике результатов имеем

999 999 984 101 9439,

т. е. результат получился в дополнительном виде. Для того чтобы получить его абсолютное значение, отводим штифт (27) вправо и списываем результат со знаком минус:

— 158,980 561.

При повторном сложении или вычитании одного и того же числа рычаг «А-М» (21) следует установить в положение «М», что обеспечивает сохранение на клавиатуре установленного числа.

§ 25. УМНОЖЕНИЕ

Для получения произведения двух чисел на левой половине клавиатуры, включая 9-й разряд, набирается множитель, на правой половине начиная с 8-го разряда устанавливается множимое и нажимается клавиша (5). В счетчике результатов получается произведение. Для

определения положения запятой в произведении служат шкалы (12) и (13). Шкала (13) состоит из двух половин, каждая из которых имеет деления от 1 до 8. На левой половине шкалы считывается показание, расположенное правее запятой, множимого, а на правой половине шкалы считывается показание, расположенное правее запятой, множителя. Находится сумма показаний, которая используется для отделения запятой в произведении по шкале (12). При этом запятая у произведения располагается левее показания шкалы (12). В процессе умножения чисел при верхнем положении клавиши (22) множитель, установленный на левой половине клавиатуры, прибавляется в счетчик оборотов, при нижнем положении клавиши (22) множитель вычитается. При среднем положении клавиши (22) счетчик оборотов при умножении отключен (при таком положении счетчик оборотов работает только при делении).

Пример.

$$1{,}246\,8533 \times 23{,}597\,641 = 29{,}422\,796\,553\,0653.$$

В приведенном выше примере видим, что положению запятой множимого по шкале (13) соответствует цифра 7, а положению запятой множителя — цифра 6. Находим сумму: $7+6=13$. По шкале (12) устанавливаем указатель запятой после 13-го разряда, считая справа налево, и считываем результат. Для определения положения запятой в произведении можно пользоваться правилами, описанными в § 2.

Вышеописанный способ умножения применим только для чисел, имеющих не более восьми знаков. Вычислительная машина «Мерседес Эвклид» позволяет также производить непосредственное умножение чисел с различным числом знаков, в сумме у сомножителей не превосходящих шестнадцати. Обозначим через a_n и b_m сомножители, где индексы n и m указывают число знаков у сомножителей. Предположим, что $n > 8$; $m < 8$; $n + m \leqslant 16$.

Умножение производим следующим образом. Набираем на левой половине клавиатуры число b_m так, чтобы его младший разряд попал в 9-й разряд клавиатуры. Затем отводим рычаг (24) в положение «1—16» и нажимаем клавишу умножения (5). Происходит так называемый **угон каретки вправо.**

Устанавливаем на клавиатуре с $(16-m)$-го разряда число a_n и отводим рычаг (24) в положение «1—8». Производится автоматическое умножение чисел.

Пример.

$$0{,}576\,475\,451 \cdot 10^3 \times 0{,}345\,645 \cdot 10^2 = 0{,}199\,255\,857 \cdot 10^5.$$

$$n = 9; \quad m = 6; \quad 16 - 6 = 10.$$

§ 26. ДЕЛЕНИЕ

На левой половине клавиатуры с 16-го по 10-й разряд набирается делимое, на правой половине начиная с 9-го разряда набирается делитель, если значащая часть делимого больше значащей части делителя, и с 8-го разряда, если значащая часть делимого меньше значащей части делителя, и нажимается клавиша (6). Частное получается в счетчике оборотов. Если делимое имеет более 7 разрядов, то сначала надо на клавиатуре набрать делимое с 16-го разряда и отправить его в счетчик результатов нажатием на клавишу (3), затем установить делитель и после этого нажать на клавишу (6). Положение запятой частного определяется по шкале (8) путем вычитания из показания положения запятой делимого показания положения запятой делителя.

Пример.

$$0{,}3456\,7540 : 0{,}2454\,6500 = 1{,}408\,2472.$$

В приведенном примере положению запятой делимого по шкале (8) соответствует число 16, а положению запятой делителя по шкале (8) — цифра 9. Находим разность: $16 - 9 = 7$.

Следовательно, в счетчике оборотов указатель запятой, отделяющий целую часть от дробной, устанавливается левее 7-го разряда.

В случае, когда используются все цифры частного, полученного в счетчике оборотов, округление частного производится с помощью остатка, стоящего в счетчике результатов. При этом, если остаток больше половины делителя, к младшему разряду частного добавляется единица.

Если в частном требуется менее 6 значащих цифр, то следует пользоваться рычагом (23), с помощью кото-

рого указывается на одну или две цифры больше, чем требуется иметь значащих цифр в частном. Для определения положения запятой в частном можно пользоваться также правилами, приведенными в § 2.

В случае, если машина попала в режим непрерывного деления, когда забыли установить делитель, или обнаружено, что неверно набрано какое-нибудь из чисел, деление можно прервать, отведя на себя рычаг (25). Затем следует нажать на клавишу умножения (5) для возврата каретки в исходное положение. После чего можно продолжить необходимые вычисления.

§ 27. НАХОЖДЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ НЕСКОЛЬКИХ ЧИСЕЛ И ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ

Для получения произведения нескольких чисел или степени числа используется клавиша «М» (20). При нажатии на клавишу (20) часть числа, стоящая в счетчике результатов (с 16-го по 9-й разряд), запоминается во внутреннем счетчике машины, а другая часть числа (с 8-го по 1-й разряд) аннулируется. Число, находящееся во внутреннем счетчике, должно быть обязательно использовано в следующем действии в качестве сомножителя. Если после нажатия на клавишу «М» число, отправленное во внутренний счетчик, требуется вернуть обратно в счетчик результатов на прежнее место (например, забыли записать число), то достаточно произвести умножение на единицу, установленную в 9-м разряде клавиатуры. Если требуется число, стоящее с 16-го по 9-й разряд в счетчике результатов, передвинуть вправо или влево на несколько разрядов, то можно нажать на клавишу «М» и произвести умножение на единицу, установленную на клавиатуре и сдвинутую вправо или влево на соответствующее число разрядов по отношению к единице, стоящей в 9-м разряде. Если к тому же требуется изменить знак числа, то умножение на единицу производится с установкой знакового рычага (26) на минус.

При нахождении произведения нескольких чисел с помощью клавиши «М» мы должны обращать внимание на возможную потерю знаков, так как при умножении в 16-м разряде может появиться нуль. Однако потерю знаков, а именно появление нуля в 16-м разряде, можно предупредить. Для этого перед умножением следует

обратить внимание на первые цифры сомножителей. Если произведение первых цифр (с грубым учетом следующих цифр) заведомо больше 10 (например, $2{,}75 \times 5{,}35 > 10$, так как $2 \times 5 = 10$), то в произведении не будет потери знаков.

Если произведение первых цифр сомножителей (с грубым учетом следующих цифр) будет заведомо меньше 10, то будет потеря значащих цифр в произведении (например, $2{,}15 \times 3{,}65$ меньше 10, так как $2 \times 4 = 8$). Могут быть сомнительные случаи, когда трудно на глаз определить, больше или меньше 10 произведение грубо округленных сомножителей (например, $3{,}15 \times 3{,}29$ или $2{,}51 \times 3{,}99$). Таким образом, если мы уверены в том, что потери значности не будет, то второй сомножитель ставим с 8-го разряда, если же уверены в том, что будет потеря значности, тогда второй сомножитель ставится с 9-го разряда. В сомнительных случаях надо пропустить текущий сомножитель и использовать один из последующих сомножителей, который даст один из упомянутых явных случаев, а потом произвести умножение на пропущенный сомножитель.

Может быть случай, когда при первом же умножении произойдет потеря значности, тогда удобно первый сомножитель, набранный на клавиатуре с 16-го разряда, заслать в счетчик результатов при помощи клавиши (3) и затем нажать клавишу «М», после чего с 9-го разряда поставить на клавиатуре второй сомножитель и произвести умножение.

После каждого промежуточного результата следует производить округление по 9-му разряду счетчика результатов, т. е. если в 8-м разряде стоит цифра 5 или больше, то в 9-й разряд добавляется единица. Затем устанавливается сомножитель с 8-го или 9-го разряда и только после этого нажимается клавиша «М». Порядок произведения нескольких чисел равен сумме порядков всех сомножителей минус число случаев установки множимого с 9-го разряда, которые встречались в процессе счета.

Пример.

$$
\begin{array}{r}
0{,}257\,345\,65 \cdot 10^{-2} \\
\times\ 0{,}125\,456\,70 \cdot 10^{2} \\
0{,}675\,565\,12 \cdot 10^{3} \\
0{,}357\,456\,15 \cdot 10^{7} \\
\hline
0{,}779\,651\,79 \cdot 10^{8}
\end{array}
$$

1-й случай, когда число 0,322 857 36 ставится с 9-го разряда.

2-й случай, когда число 0,218 111 17 ставится с 9-го разряда.

В приведенном примере сумма порядков равна 10 и два случая, когда второй сомножитель ставился с 9-го разряда. Следовательно, порядок произведения будет равен: $10-2=8$.

Аналогично производится возведение числа в степень.

При возведении числа в квадрат округление чисел производится следующим образом.

Если в 8-м и 7-м разрядах стоит число, близкое 75, то при округлении увеличиваются на единицу 9-го разряда оба сомножителя.

Если в 8-м и 7-м разрядах стоит число, меньшее 75, но большее 25, то при округлении увеличивается на единицу один из сомножителей.

Если в 8-м и 7-м разрядах стоит число, меньшее 25, то при округлении не увеличивается ни один из сомножителей.

При пользовании клавишей «М» следует обращать внимание на положение рычага «А—Е». Если рычаг «А—Е» находится в положении «Е», то при последующем нажатии клавиши «М» одновременно гасятся счетчик результатов и счетчик оборотов. Если рычаг «А—Е» находится в положении «А», то гасится счетчик результатов, а в счетчике оборотов получается сумма сомножителей.

§ 28. ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММЫ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Для получения суммы произведений рычаг (26) устанавливается в положение «плюс». Далее из всех пар сомножителей, сумму произведений которых необходимо получить, выделяем пару сомножителей с наибольшей суммой порядков и производим их умножение. При этом сомножители округляются до 7 значащих цифр и устанавливаются с 15-го и 7-го разрядов с тем, чтобы в счетчике результатов иметь два запасных разряда для накопления. После этого, не сбрасывая из счетчика результатов предыдущего результата, начинаем выполнять следующее умножение. Предварительно определяем разность ΔP между суммой порядков сомножителей при первом умножении и суммой порядков данных сомножителей.

Если ΔP — четное число, то сомножители на клавиатуре набираем не с 15-го и 7-го разрядов, а сдвигаем

их вправо на $\frac{\Delta P}{2}$ разрядов каждый и производим их округление.

Если же ΔP — нечетное число, то сомножитель, у которого значащая часть больше, сдвигаем вправо на один разряд дальше, чем другой сомножитель, и производим умножение. Полученный результат автоматически сложится с содержимым счетчика результатов. Так процесс продолжается до тех пор, пока не получим сумму всех произведений. При вычитании произведения рычаг (26) должен стоять в положении «минус».

Положение запятой в алгебраической сумме произведений определяется при первом умножении.

Для избежания ошибки при определении знака алгебраической суммы произведений следует сначала вычислить сумму положительных произведений и затем поочередно вычитать остальные произведения. При этом если при вычитании какого-либо произведения цифра «0» в 16-м разряде счетчика результатов переходит в положение «9», то это служит сигналом того, что окончательный результат отрицательный.

При вычислении суммы большого числа произведений следует их разбивать на группы по нескольку десятков слагаемых.

Пример.

$$(0{,}275\,4562\cdot 10^0 \times 0{,}345\,5601\cdot 10^1) +$$
$$+ (0{,}156\,7653\cdot 10^1 \times 0{,}567867\cdot 10^1) -$$
$$- (0{,}345\,4562\cdot 10^0 \times 0{,}654\,5724\cdot 10^0) = 0{,}962\,7925\cdot 10^1.$$

Сначала вычисляется второе произведение, затем прибавляется первое произведение и, наконец, вычитается последнее произведение.

§ 29. ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММЫ И РАЗНОСТИ ЧАСТНЫХ

Для получения суммы частных рычаг (26) ставится в положение «плюс». Затем выбирается частное с максимальным порядком и производится деление. При этом делимое устанавливается с 15-го разряда для того, чтобы в счетчике оборотов иметь запасной разряд для накопления суммы частных. Делитель становится либо с 9-го разряда, если его значащая часть меньше (или

равна) значащей части делимого, либо с 8-го разряда, если его значащая часть больше значащей части делимого.

Перед вычислением следующего частного определяем разность ΔP между порядком первого частного и порядком следующего частного, затем делимое устанавливается с $(15-\Delta P)$-го разряда, а делитель в зависимости от соотношения значащих частей делимого и делителя ставится либо с 8-го, либо с 9-го разряда. Очередное частное автоматически складывается с содержимым счетчика оборотов. Так процесс продолжается до тех пор, пока не получится сумма всех частных. Положение запятой в счетчике оборотов определяется при первом делении по правилам, описанным в § 2.

Аналогично получается и разность частных, только при вычитании следующего частного клавиша (22) должна быть поднята до отказа, а рычаг (26) переведен в положение «минус». Появление девятки в старшем разряде при вычитании говорит о том, что результат получился отрицательный и в дополнительном виде. Чтобы получить абсолютное значение результата, надо заменить все цифры дополнением до девяти и в младший разряд прибавить единицу.

Примеры.

1. $0{,}552\cdot 10^1 : 0{,}332\cdot 10^1 + 0{,}675\cdot 10^{-1} : 0{,}275\cdot 10^0 = 0{,}191\cdot 10^1.$

2. $0{,}552\cdot 10^1 : 0{,}332\cdot 10^1 - 0{,}675\cdot 10^{-1} : 0{,}275\cdot 10^0 = 0{,}142\cdot 10^1.$

ГЛАВА V

ДЕЙСТВИЯ НАД МНОГОЗНАЧНЫМИ ЧИСЛАМИ НА МАШИНЕ «МЕРСЕДЕС»

§ 30. ОБОЗНАЧЕНИЯ

В настоящей главе будут использованы обозначения, введенные в § 10. В тех случаях, когда сдвиг удобно осуществить с помощью клавиши «М» с последующим умножением на единицу, устанавливаемую в k-м разряде клавиатуры, мы будем употреблять обозначение $\underset{\longrightarrow}{m}\,M\,(k)$.

Будут рассмотрены случаи:

1. Умножение многозначных чисел приближенным и точным способами:

$$a_N \times a_m \, (N > 8, \; m \leqslant 8),$$
$$a_{10} \times b_{10}, \quad a_{11} \times b_{11}, \quad a_{14} \times b_{14}, \quad a_{21} \times b_{21},$$
$$a_{28} \times b_{28}, \quad a_{14} \times b_{21}, \quad a_{14} \times b_{28}.$$

2. Деление $\frac{a_{15}}{b_{15}}$ (приближенный способ).

Описание способов деления $\frac{a_{21}}{b_{21}}$ и $\frac{a_{28}}{b_{28}}$ в настоящей главе опущено, поскольку деление 21-значных чисел и 28-значных чисел на машине «Мерседес» производится без каких-либо изменений по тем же схемам, что и на машине «Рейнметалл».

§ 31. УМНОЖЕНИЕ МНОГОЗНАЧНОГО ЧИСЛА a_N НА МАЛОЗНАЧНОЕ ЧИСЛО a_m ($m \leqslant 8$)

Определяем количество разрядов в группах, на которые разбиваем сомножитель a_N. Количество разрядов в группе принимаем равным 16—m. Разбиение числа a_N на группы следует производить со старшей значащей цифры. Младшая группа числа a_N в случае необходимости добавляется нулями. Процесс умножения производится с использованием так называемого «угона каретки». Устанавливаем сомножитель a_m как обычно (с последним знаком на красном разряде клавиатуры): рычаг (24) ставим в положение «1—16», затем на клавиатуре в крайнем правом положении устанавливаем младшую группу числа a_N и производим умножение. Выписываем содержимое 16—m младших разрядов счетчика результатов, а содержимое остальных старших разрядов счетчика результатов передвигаем вправо на 16—m разрядов. Затем аналогично вычисляем произведение сомножителя a_m на следующую группу сомножителя a_N, которое автоматически прибавляется в счетчик результатов. Содержимое младших 16—m разрядов счетчика результатов приписываем левее ранее выписанного числа. Опять производим аналогичный сдвиг и т. д. После умножения на последнюю, старшую группу выписываем весь результат. Положение запятой в произведении определяется при последнем умножении по правилам, описанным в § 2.

Пример. $a_N \times a_m$, где $N=27$, $m=5$.

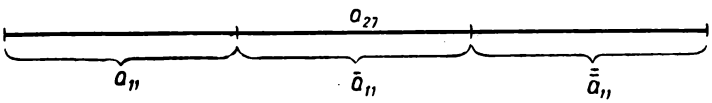
$a_{27}=0{,}123\ 456\ 789\ 123\ 456\ 789\ 123\ 456\ 789 \cdot 10^{-1}$;

$a_5=0{,}222\ 22 \cdot 10^{-1}$;

$a_{27} \times a_5 = 0{,}274\ 345\ 676\ 790\ 145\ 676\ 790\ 145\ 677 \cdot 10^{-3}$.

1. Находим разность: $16-m=16-5=11$.

2. Разбиваем a_{27} на группы по 11 разрядов, после чего получаем две группы по 11 разрядов и одну группу 5 разрядов, которую дополняем нулями до 11 знаков.



$$a_{11}=123\ 456\ 789\ 12, \quad \bar{a}_{11}=345678\ 912\ 34,$$
$$\bar{\bar{a}}_{11}=567\ 890\ 000\ 00.$$

3. Производим умножение:

$$a_5 \times \bar{\bar{a}}_{11} = \underset{(13-9)}{222\,22} \times \underset{(11-1)}{567\,890\ 000\,00}$$

и в счетчике результатов получаем число

126 196 515 800 0000.

Записываем: 65158. Переносим 12619 вправо на 11 разрядов, после чего в счетчике результатов имеем следующее число:

000 000 000 001 2619.

4. Производим умножение:

$$+a_5 \times \bar{a}_{11} = \underset{(13-9)}{222\,22} \times \underset{(11-1)}{345\ 678\ 912\ 34}$$

и в счетчике результатов получаем

076 816 767 901 4567.

Приписываем слева к ранее выписанному числу 65158 содержимое 11—1 разрядов (т. е. 16—m младших разрядов) и получаем число 676 790 145 676 5158. Передвигаем содержимое старших m-разрядов, т. е. число 7681, в правое крайнее положение в счетчике результатов.

После чего в счетчике результатов имеем следующее число:

000 000 000 000 7681.

5. Производим последнее умножение:

$$+a_5 \times a_{11} = \underset{(13-9)}{22\,222} \times \underset{(11-1)}{123\,456\,789\,12}.$$

В счетчике результатов получаем следующее число:

027 434 567 679 0145

и приписываем его слева к ранее вычисленному числу:

274 345 676 790 145 676 790 145 676 5158.

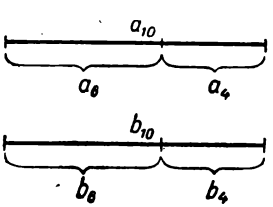
6. Положение запятой (порядок числа) определяем при последнем умножении по шкалам машины или по правилам, описанным в § 2. Поскольку значащая часть произведений больше значащей части сомножителей, порядок согласно указанному правилу равен —3 и $+a_{27} \times a_5 = 0{,}274\,345\,676\,790\,145\,676\,790\,145\,676\,5158 \cdot 10^{-3}$.

Примечание. При умножении a_5 на a_{11}, $\bar{a}_{11}$, $\bar{\bar{a}}_{11}$ надо пользоваться рычагом (24) (см. гл. IV, § 25).

При умножении многозначного числа на малозначное число предполагается, что малозначное число точное. Если многозначное число приближенное, то окончательный результат округляется по числу знаков, равному числу знаков в многозначном числе.

§ 32. УМНОЖЕНИЕ 10-ЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ: $a_{10} \times b_{10}$

(приближенный способ)



1. $\underset{(14-9)}{a_6} \times \underset{(10-1)}{b_{10}}$ [пользуясь рычагом (28)].
2. $\underset{(12-9)}{+a_4} \times \underset{(6-1)}{b_6^{\text{окр}}}$.

Максимальная погрешность метода умножения с учетом окончательного округления результата до 10 значащих цифр не превосходит 5,5 единицы 11-го знака.

Пример.

$$0{,}527\,345\,4564 \cdot 10^0 \times 0{,}342\,465\,7586 \cdot 10^1 = 0{,}180\,597\,7618 \cdot 10^1.$$

$$a_6 = 527\,345; \qquad b_{10} = 342\,465\,7586;$$
$$a_4 = 4564; \qquad b_6^{\text{окр}} = 342\,466.$$

1. Производим умножение a_6 на b_{10} с предварительным уГоном каретки (см. гл. IV, § 25). В счетчике результатов получаем

$$180\,597\,605\,468\,9170.$$

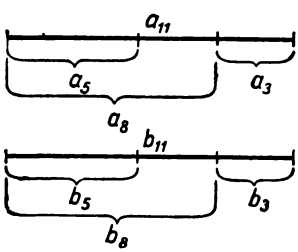
2. Не сбрасывая предыдущего результата из счетчика результатов, производим умножение $a_4 \times b_6^{\text{окр}}$. В счетчике результатов получаем произведение $a_{10} \times b_{10}$:

$$180\,597\,761\,770\,3\dot{9}94.$$

Порядок произведения согласно правилам, описанным в § 2, равен сумме порядков сомножителей: $0 + 1 = 1$.

§ 33. УМНОЖЕНИЕ 11-ЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ: $a_{11} \times b_{11}$

(приближенный способ)



1. $\underset{(16-9)}{a_8} \times \underset{(8-1)}{b_8}$.
2. $\underset{(11-9)}{+a_3} \times \underset{(5-1)}{b_5^{\text{окр}}}$.
3. $\underset{(11-9)}{+b_3} \times \underset{(5-1)}{a_5^{\text{окр}}}$.

Максимальная погрешность метода умножения с учетом окончательного округления результата до 11 значащих цифр не превосходит 6 единиц 12-го знака.

Пример.

$$0{,}527\,345\,456\,42\cdot 10^0\times 0{,}342\,465\,758\,65\cdot 10^1=$$
$$=0{,}180\,597\,761\,80\cdot 10^1.$$

$a_8=527\,345\,45;\qquad b_8=342\,465\,75;$

$a_5^{окр}=527\,35;\qquad b_5^{окр}=342\,47;$

$a_3=642;\qquad b_3=865.$

1. Производим умножение $a_8\times b_8$.

В счетчике результатов получаем

180 597 755 043 337 5.

2. Не сбрасывая из счетчика результатов предыдущего произведения, производим умножение $+a_3\times b_5^{окр}$.

В счетчике результатов получаем

180 597 757 241 9949.

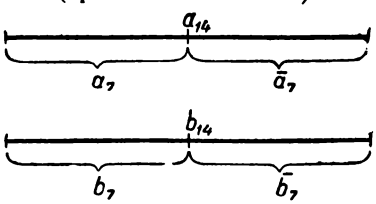
3. Аналогично производим умножение $+b_3\times a_5^{окр}$ и в счетчике результатов имеем произведение $a_{11}\times b_{11}$:

180 597 761 803 572 4.

$$a_{11}\times b_{11}=0{,}180\,597\,761\,803\,572\,4\cdot 10^1.$$

§ 34. УМНОЖЕНИЕ 14-ЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ: $a_{14}\times b_{14}$

(приближенный способ)



1. $\underset{(15-9)}{a_7^{окр}}\times\underset{(8-2)}{\bar{b}_7}+\underset{(15-9)}{b_7^{окр}}\times\underset{(8-2)}{\bar{a}_7}$.

Выписываем содержимое 7-го и 8-го разрядов счетчика результатов.

2. $\xrightarrow{7} M(2)$.

Выписываем число, стоящее в счетчике результатов с 15-го по 2-й разряд, затем справа приписываем ранее выписанные два разряда и округляем полученное число с 14 знаками.

3. $\underset{(15-9)}{a_7}\times\underset{(8-2)}{b_7}$.

Максимальная погрешность метода умножения порядка 5 единиц 14-го знака.

Пример.

$$0{,}527\,345\,456\,422\,35 \cdot 10^0 \times 0{,}342\,465\,758\,653\,43 \cdot 10^1 = \\ = 0{,}180\,597\,761\,806\,13 \cdot 10^1.$$

$$a_7 = 527\,3454; \qquad b_7 = 342\,4657;$$
$$a_7^{\text{окр}} = 5273455; \qquad b_7^{\text{окр}} = 342\,4658;$$
$$\bar{a}_7 = 564\,2235; \qquad \bar{b}_7 = 586\,5343.$$

1. Вычисляем сумму произведений:

$$a_7^{\text{окр}} \times \bar{b}_7 + b_7^{\text{окр}} \times \bar{a}_7 = \\ = 527\,345\,5 \times 586\,534\,3 + 342\,4658 \times 564\,2235,$$

в счетчике результатов получаем

050 253 3476 006 950.

Выписываем содержимое 8-го и 7-го разрядов — 76, а содержимое с 15-го по 9-й разряд сдвигаем вправо на семь разрядов. После чего в счетчике результатов будет стоять следующее число:

000 000 005 025 334 0.

2. Производим умножение:

$$+a_7 \times b_7 = 527\,3454 \times 342\,4657,$$

после чего в счетчике результатов получим величину:

018 059 776 180 612 0.

Выписываем содержимое с 15-го по 2-й разряд и приписываем ранее выписанное число:

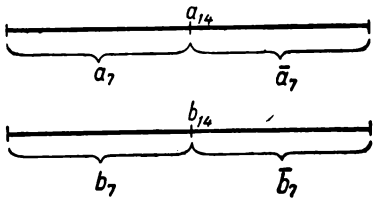
180 597 761 806 127 6.

Далее округляем его до 14 знаков и определяем порядок по известному правилу.

$$a_{14} \times b_{14} = 0{,}180\,597\,761\,806\,13 \cdot 10^1.$$

§ 35. УМНОЖЕНИЕ 14-ЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ: $a_{14} \times b_{14}$

(точный способ)



1. $\bar{a}_7 \times \bar{b}_7$. Выписываем содержимое 8—2 разрядов.
2. $\xrightarrow{7} M\,(2)$.
3. $+a_7 \times \bar{b}_7 + b_7 \times \bar{a}_7$. Выписываем содержимое 8—2 разрядов.
4. $\xrightarrow{7} M\,(2)$.
5. $+a_7 \times b_7$. Выписываем содержимое с 15-го по 2-й разряд и справа приписываем ранее выписанное число.

Результат получается с 27 или 28 точными знаками.

Пример.

$$0{,}527\,345\,456\,422\,35 \cdot 10^0 \times 0{,}342\,465\,758\,653\,43 \cdot 10^1 =$$
$$= 0{,}180\,597\,761\,806\,119\,402\,481\,356\,160 \cdot 10^1.$$

$a_7 = 527\,345\,4$; $b_7 = 342\,465\,7$;

$\bar{a}_7 = 564\,223\,5$; $\bar{b}_7 = 586\,534\,3$.

Производим умножение:

$$\bar{a}_7 \times \bar{b}_7 = 564\,2235 \times 586\,5343$$

и в счетчике результатов получаем

0 330 936 435 616 050.

Выписываем содержимое с 8-го по 2-й разряд — 356 1605, а число, стоящее в 15—9 разрядах, сдвигаем на 7 разрядов вправо с помощью клавиши «М», после чего в счетчике результатов имеем

000 000 003 309 364 0.

Прибавляем к содержимому счетчика результатов сумму произведений $+a_7 \times \bar{b}_7 + b_7 \times \bar{a}_7$:

$$527\,3454 \times 586\,5343 + 342\,4657 \times 564\,2235$$

и в счетчике результатов получаем

$$050\,253\,339\,402\,481\,0.$$

Выписываем число с 8-го по 2-й разряд — 940 2481, а содержимое с 15-го по 9-й разряд сдвигаем на 7 разрядов вправо, после чего в счетчике результатов получаем

$$000\,000\,005\,025\,333\,0.$$

Производим последнее умножение: $+a_7 \times b_7 = 527\,3454 \times 342\,4657$ и в счетчике результатов получаем:

$$180\,597\,761\,806\,110.$$

Выписываем содержимое 15—2 разрядов, приписываем справа ранее выписанные числа и получаем

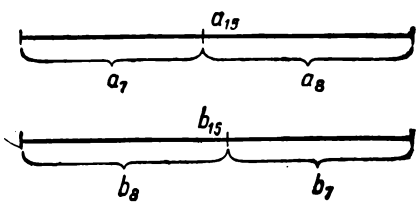
$$180\,597\,761\,806\,119\,402\,481\,356\,160\,5.$$

В окончательном результате получим 27 точных знаков цифровой части. Порядок числа можно определить по правилам, описанным в § 2.

$$a_{14} \times b_{14} = 0{,}180\,597\,761\,806\,119\,402\,481\,356\,160 \cdot 10^1.$$

§ 36. УМНОЖЕНИЕ 15-ЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ: $a_{15} \times b_{15}$

(приближенный способ)



1. $\underset{(15-9)}{b_7} \times \underset{(8-1)}{a_8^{\text{окр}}} + \underset{(15-9)}{a_7} \times \underset{(8-1)}{b_8^{\text{окр}}}.$
2. $\xrightarrow{7} M\,(2).$
3. $\underset{(16-9)}{+a_8} \times \underset{(8-1)}{b_8}.$

Максимальная погрешность метода умножения порядка одной единицы 15-го знака.

Пример.

$$0{,}527\,345\,456\,422\,351 \cdot 10^0 \times 0{,}342\,465\,758\,653\,435 \cdot 10^1 = \\ = 0{,}180\,597\,761\,806\,122 \cdot 10^1.$$

$$a_8 = 527\,345\,45; \qquad b_8 = 342\,465\,75;$$
$$a_8^{\text{окр}} = 527\,345\,46; \qquad b_8^{\text{окр}} = 342\,465\,76;$$
$$a_7 = 642\,235\,1; \qquad b_7 = 865\,343\,5.$$

Вычисляем сумму произведений $b_7 \times a_8^{\text{окр}} + a_7 \times b_8^{\text{окр}}$: $865\,3435 \times 527\,345\,46 + 642\,2351 \times 342\,465\,76$ и в счетчике результатов получаем

067 627 8497 685 686.

Далее делаем сдвиг на 7 разрядов вправо, после чего в счетчике результатов имеем

000 000 006 762 784 9.

Производим умножение $+a_8 \times b_8$:

527 345 45 × 342 465 75

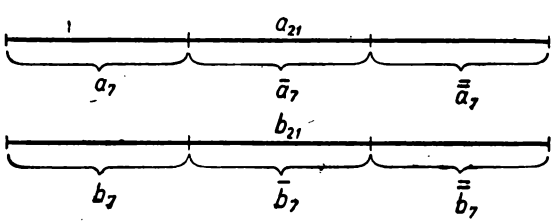
и получаем число

180 597 761 806 122 4.

Выписываем окончательный результат, округленный с 15 знаками, и определяем порядок произведения:

$$a_{15} \times b_{15} = 0{,}180\,597\,761\,806\,122 \cdot 10^1.$$

§ 37. УМНОЖЕНИЕ 21-ЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ: $a_{21} \times b_{21}$ (приближенный способ)



1. $\underset{(15-9)}{a_7^{\text{окр}}} \times \underset{(8-2)}{\bar{\bar{b}}_7} + \underset{(15-9)}{b_7^{\text{окр}}} \times \underset{(8-2)}{\bar{\bar{a}}_7} + \underset{(15-9)}{\bar{a}_7^{\text{окр}}} \times \underset{(8-2)}{\bar{b}_7^{\text{окр}}}$. Выписываем содержимое 8-го и 7-го разрядов.
2. $\xrightarrow{7} M(2)$.

3. $\underset{(15-9)}{+a_7} \times \underset{(8-2)}{\bar{b}_7} + \underset{(15-9)}{b_7} \times \underset{(8-2)}{\bar{a}_7}$. Выписываем содержимое 8—2 разрядов.

4. $\xrightarrow{7} M\,(2)$.

5. $\underset{(15-9)}{+a_7} \times \underset{(8-2)}{b_7}$. Выписываем число, стоящее в 15—2 разрядах, и справа приписываем ранее выписанные числа.

Максимальная погрешность метода умножения порядка 8 единиц 21-го знака.

Пример.

$$0{,}527\,345\,456\,422\,351\,456\,422 \cdot 10^0 \times$$
$$\times 0{,}342\,465\,758\,653\,435\,758\,653 \cdot 10^1 =$$
$$= 0{,}180\,597\,761\,806\,122\,938\,056 \cdot 10^1.$$

$a_7 = 527\,345\,4$; $b_7 = 342\,465\,7$;

$a_7^{окр} = 527\,345\,5$; $b_7^{окр} = 342\,465\,8$;

$\bar{a}_7 = 564\,223\,5$; $\bar{b}_7 = 586\,534\,3$;

$\bar{a}_7^{окр} = 564\,223\,5$; $\bar{b}_7^{окр} = 586\,534\,4$;

$\bar{\bar{a}}_7 = 145\,642\,2$; $\bar{\bar{b}}_7 = 575\,865\,3$.

Вычисляем сумму произведений $a_7^{окр} \times \bar{\bar{b}}_7 + b_7^{окр} \times \bar{\bar{a}}_7 + \bar{a}_7^{окр} \times \bar{b}_7^{окр}$ и в счетчике результатов получаем

068 449 393 913 631 0.

Выписываем содержимое 8-го и 7-го разрядов — 39. Содержимое 15—9 разрядов переносим вправо на 7 разрядов с помощью клавиши «М» и в счетчике результатов получаем

000 000 006 844 939 0.

Вычисляем сумму произведений $+a_7 \times \bar{b}_7 + b_7 \times \bar{a}_7$. В счетчике результатов имеем

050 253 342 938 056 0.

Выписываем содержимое с 8-го по 2-й разряд — 293 805 6, число, стоящее с 15-го по 9-й разряд, переносим вправо и в счетчике результатов получаем

000 000 005 025 334 0.

Производим умножение $+a_7 \times b_7$, после чего в счетчике результатов получаем число

$$018\,059\,776\,180\,612\,0.$$

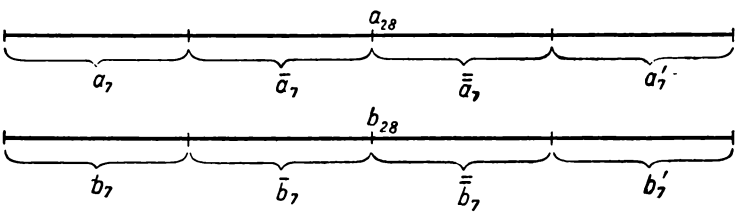
Выписываем результат с 15 по 2 разряд, справа приписываем ранее выписанные числа, порядок определяется по правилам, описанным в § 2.

Окончательный результат выписывается с 21 значащей цифрой:

$$a_{21} \times b_{21} = 0{,}180\,597\,761\,806\,122\,938\,056 \cdot 10^1.$$

§ 38. УМНОЖЕНИЕ 28-ЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ: $a_{28} \times b_{28}$

(приближенный способ)



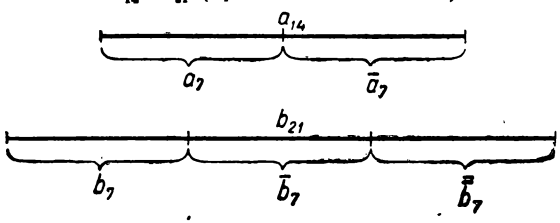
1. $a_7^{окр} \times b_7' + b_7^{окр} \times a_7' + \bar{a}_7^{окр} \times \bar{\bar{b}}_7^{окр} + \bar{b}_7^{окр} \times \bar{\bar{a}}_7^{окр}$. — Выписываем содержимое 7-го и 8-го разрядов.
2. $\xrightarrow{7} M\ (2)$.
3. $+a_7 \times \bar{\bar{b}}_7 + b_7 \times \bar{\bar{a}}_7 + \bar{a}_7 \times \bar{b}_7$. — Выписываем содержимое с 8-го по 2-й разряд.
4. $\xrightarrow{7} M\ (2)$.
5. $+a_7 \times \bar{b}_7 + b_7 \times \bar{a}_7$. — Выписываем содержимое с 8-го по 2-й разряд.
6. $\xrightarrow{7} M\ (2)$.
7. $+a_7 \times b_7$. — Выписываем 15—2 разряды и справа приписываем ранее выписанные результаты.

Максимальная погрешность метода умножения порядка одной единицы 27-го знака.

Пример.

$$0{,}527\,345\,456\,422\,351\,456\,422\,357\,456\,1\cdot 10^0\times$$
$$\times 0{,}342\,465\,758\,653\,435\,758\,653\,864\,561\,4\cdot 10^1=$$
$$=0{,}180\,597\,761\,806\,122\,938\,056\,094\,312\,1\cdot 10^1.$$

§ 39. УМНОЖЕНИЕ 14-ЗНАЧНОГО ЧИСЛА НА 21-ЗНАЧНОЕ: $a_{14}\times b_{21}$ (приближенный способ)



1. $a_7^{окр}\times\bar{\bar{b}}_7+\bar{a}_7\times\bar{b}_7^{окр}$. — Выписывается содержимое 8-го и 7-го разрядов.
2. $\xrightarrow{7} M(2)$.
3. $a_7\times\bar{b}_7+b_7\times\bar{a}_7$. — Выписывается содержимое 8—2 разрядов.
4. $\xrightarrow{7} M(2)$.
5. $+a_7\times b_7$. — Выписывается содержимое 15—2 разрядов и справа приписываются ранее выписанные числа.

Максимальная погрешность метода умножения порядка 1,5 единицы 21-го разряда в предположении, что a_{14} — точное число.

Пример.

$$0{,}527\,345\,456\,422\,35\cdot 10^0\times$$
$$\times 0{,}342\,465\,758\,653\,435\,758\,653\cdot 10^1=$$
$$=0{,}180\,597\,761\,806\,122\,439\,282\cdot 10^1.$$

$a_7=527\,345\,4$; $b_7=342\,465\,7$;
$a_7^{окр}=527\,345\,5$; $\bar{b}_7=586\,534\,3$;
$\bar{a}_7=564\,223\,5$; $\bar{b}_7^{окр}=586\,534\,4$;
$\bar{\bar{b}}_7=575\,865\,3$.

1. Вычисляем сумму произведений $a_7^{окр}\times\bar{\bar{b}}_7+\bar{a}_7\times\bar{b}_7^{окр}$:

$$527\,3455\times 575\,8653+564\,2235\times 586\,5344.$$

В счетчике результатов получаем

063 461 646 659 955 0.

Выписываем содержимое 8-го и 7-го разрядов — 66, число, стоящее в 15—9 разрядах, переносим вправо на 7 разрядов с помощью клавиши «М» и в счетчике результатов получаем

000 000 006 346 164 0.

2. Вычисляем сумму произведений $+a_7 \times \bar{b}_7 + b_7 \times \bar{a}_7$:

527 3454 × 586 5343 + 342 4657 × 564 2235.

В счетчике результатов получаем

050 253 342 439 281 0.

Выписываем содержимое с 8-го по 2-й разряд — 243 928 1, а содержимое с 15-го по 9-й разряд переносим вправо на 7 разрядов и в счетчике результатов получаем

000 000 005 025 334 0.

3. Производим умножение $+a_7 \times b_7$:

527 3454 × 342 4657.

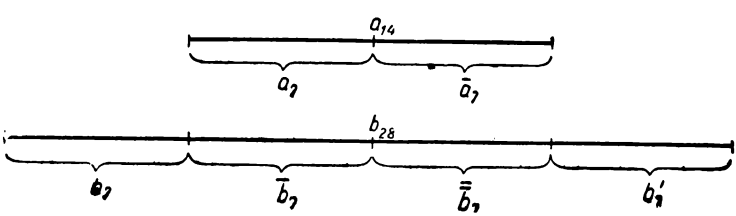
В счетчике результатов получаем

018 059 776 180 612 0.

Выписываем содержимое счетчика результатов с 15-го по 2-й разряд и приписываем справа ранее выписанные значения. Порядок окончательного результата определяется по правилам, описанным в § 2.

$$a_{14} \times b_{21} = 0{,}180\,597\,761\,806\,122\,439\,282 \cdot 10^1.$$

§ 40. УМНОЖЕНИЕ 14-ЗНАЧНОГО ЧИСЛА НА 28-ЗНАЧНОЕ: $a_{14} \times b_{28}$ (приближенный способ)



1. $a_7^{окр} \times b'_7 + \bar{a}_7 \times \bar{\bar{b}}_7^{окр}$. Выписываются 8—7 разряды.

2. $\xrightarrow{7} M\,(2)$.

3. $a_7 \times \bar{\bar{b}}_7 + \bar{a}_7 \times \bar{b}_7$ Выписываются 8—2 разряды.

4. $\xrightarrow{7} M\,(2)$.

5. $a_7 \times \bar{b}_7 + b_7 \times \bar{a}_7$. Выписываются 8—2 разряды.

6. $\xrightarrow{7} M\,(2)$.

7. $a_7 \times b_7$. Выписываются 15—9 разряды и приписываются справа ранее выписанные числа.

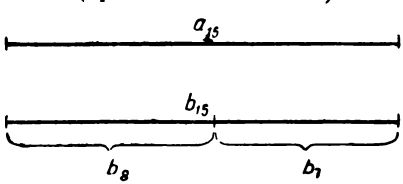
Максимальная погрешность метода умножения порядка 1,5 единицы 28-го знака в предположении, что a_{14} — точное число.

Пример.

$$0{,}527\,345\,456\,422\,25 \cdot 10^0 \times$$
$$\times 0{,}342\,465\,758\,653\,435\,758\,653\,864\,5619 \cdot 10^1 =$$
$$= 0{,}180\,597\,761\,806\,122\,439\,281\,306\,746\,3 \cdot 10^1.$$

§ 41. ДЕЛЕНИЕ 15-ЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ: $c_{15} = a_{15} : b_{15}$

(приближенный способ)



1. $[a_{15} - 1$ (в 9-м разряде)$] : b_8 = c_8$.

2. $\xleftarrow{7}$ остатка и $+1$ (в 16-м разряде).

3. $-(b_7 \times c_8) : b_8^{окр} = \bar{c}_8$.

4. $c_8 + \bar{c}_8^{окр} \cdot 10^{-7}$.

Максимальная погрешность метода деления порядка 3 единиц 15-го знака.

Для более подробного пояснения данной схемы деления рассмотрим следующий пример:

$$0{,}180\,597\,761\,806\,122 \cdot 10^1 : 0{,}342\,465\,758\,653\,435 \cdot 10^1 =$$
$$= 0{,}527\,345\,456\,422\,350 \cdot 10^0.$$

1. Набираем на клавиатуре a_{15} либо с 16-го разряда (если $M_a < M_b$), либо с 15-го разряда (если $M_a \geqslant M_b$) и вычитаем единицу из 9-го разряда. В данном случае $M_a < M_b$, значит, a_{15} устанавливаем с 16-го разряда и из 9-го разряда вычитаем единицу. В счетчике результатов имеем

180 597 751 806 122 0.

Далее производим деление на b_8, устанавливаемое в 8—1 разрядах клавиатуры.

В счетчике оборотов и в счетчике результатов получаем

5 273 454 4
000 000 000 187 442 0.

Выписываем $c_8 = 527\,345\,44$.

2. Остаток 187 442 сдвигаем влево на 7 разрядов и в 16-й разряд прибавляем единицу. В счетчике результатов получаем

101 874 420 000 000 0.

3. Переведя рычаг (26) в положение «минус», производим умножение $-(b_7 \times c_8)$ и в счетчике результатов получаем

056 240 925 124 136 0.

Делим содержимое счетчика результатов на $b_8^{окр}$, после чего в счетчике оборотов и результатов получаем

1 642 234 9
000 000 002 811 433 6.

4. К c_8 прибавляем второе округленное частное $\bar{c}_8^{окр}$ со сдвигом на 7 разрядов:

$$\begin{array}{r} 527\,345\,44 \\ +\quad 164\,223\,50 \\ \hline 527\,345\,456\,422\,350 \end{array}.$$

Таким образом, $c_{15} = 0{,}527\,345\,456\,422\,350 \cdot 10^0$.
Порядок частного определяется при первом делении по правилам, описанным в § 2.

ГЛАВА VI

ПЕРЕВОД ЧИСЕЛ ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ДВОИЧНУЮ НА НАСТОЛЬНОЙ СЧЕТНОЙ МАШИНЕ «МЕРСЕДЕС ЭВКЛИД», МОДЕЛЬ 38 MS

Назовем число A нормализованным в двоичной системе счисления, если оно записано в следующем виде:

$$A = \pm 2^r \cdot M_A, \qquad (1)$$

где r — целое число (положительное, нуль или отрицательное). M_A удовлетворяет условию:

$$0{,}5 = 2^{-1} \leqslant M_A < 2^0 = 1$$

и представлено в двоичной системе счисления:

$$M_A = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cdot 2^{-i},$$

где $\alpha_1 = 1$, $\alpha_i (i = 2, 3, \ldots)$ могут принимать значения 0 или 1. В дальнейшем M_A мы будем называть мантиссой числа A, а r — двоичным порядком числа A. На практике представляется удобным записывать мантиссу M_A не в двоичной системе счисления, а в восьмеричной, что экономит запись чисел, облегчает ввод и контроль ввода программ в электронные счетные машины типа М-20, БЭСМ-2 и др.

В дальнейшем мы будем говорить коротко «число A переведено в двоичную систему счисления» и будем при этом подразумевать, что оно представлено в виде (1), причем его мантисса записана в восьмеричной системе счисления:

$$A_N = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 8^{-i} \sim 0,\ a_1 a_2 a_3 \ldots,$$

где a_1 может принимать значения 4, 5, 6, 7, а a_i $(i = 2, 3, \ldots)$ принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Мы будем осуществлять перевод чисел в двоичную систему счисления с 36 разрядами в значащей части двоичного представления (или с 12 разрядами восьмерич-

ного представления) и двоичным порядком r, лежащим в пределах: $-36 < r \leqslant 54$.

36 разрядов двоичной системы счисления соответствуют приблизительно 11 значащим цифрам десятичной системы счисления.

Описываемый ниже способ перевода чисел в двоичную систему на настольной счетной машине «Мерседес» рекомендуется использовать при составлении программы для ввода в машину важных констант с предельной точностью. При автоматическом же переводе чисел в вычислительной машине обычно происходит потеря точности из-за неэкономности используемого двоично-десятичного кода при вводе чисел в машину.

Для перевода чисел в двоичную систему счисления на настольной счетной машине потребуются вспомогательные таблицы 1, 2 и 3.

В таблице 1 в два столбца помещены степени двойки 2^r в пределах от $r = -36$ до $r = 54$ с 12 значащими цифрами.

Таблица 2 служит для перевода в восьмеричную систему целых десятичных чисел N, лежащих в пределах: $0 \leqslant N \leqslant 511$. Таблица 2 состоит из 64 колонок, в которых попарно в порядке возрастания расположены числа, представленные в десятичной и восьмеричной системах счисления. В таблице 3 помещены четыре контрольных числа, назначение которых будет объяснено ниже.

Наглядность метода перевода чисел при помощи настольной счетной машины иллюстрируется следующим примером.

Пусть требуется перевести числа $B = 0{,}000\,2441\,4062\,5$ и $C = 0{,}0000\,5615\,4098\,5976\,68$ в двоичную систему счисления. Сначала округлим заданные числа или дополним их нулями до 12 значащих цифр:

$$B = 0{,}000\,2441\,4062\,5000;$$
$$C = 0{,}0000\,5615\,4098\,5977.$$

Обратимся к таблице 1. Может быть два случая: либо заданное число совпадает с одним из чисел, помещенных в таблице 1, либо не совпадает. В нашем примере число B совпадает с табличным значением. В том случае, когда заданное число совпадает с табличным значением, можно сразу записать его двоичное (двоично-восьмерич-

ное) представление. Порядок заданного числа равен показателю степени двойки, помещенной в соседней строчке той же половины таблицы в направлении, указанном стрелками. В нашем примере число B совпадает с табличным значением $0{,}2441\ 4062\ 5000 \cdot 10^{-3}$, и, следовательно, порядок числа B равен — 11. Мантисса числа, совпавшего с любым табличным значением, независимо от порядка числа всегда одна и та же:

$$M_B = 0{,}400\ 000\ 000\ 000.$$

Итак, B в двоичной (двоично-восьмеричной) системе счисления имеет следующее представление:

$$B = 2^{-11} \cdot 0{,}400\ 000\ 000\ 000.$$

В случае, если заданное число не совпадает ни с одним числом, помещенным в таблице 1, нужно найти два табличных значения, между которыми по абсолютной величине расположено заданное число. В нашем примере число C расположено между числами $0{,}3051\ 7578\ 1250 \cdot 10^{-4}$ и $0{,}6103\ 5156\ 2500 \cdot 10^{-4}$ (табл. 1).

Порядок заданного числа равен степени двойки, расположенной в таблице 1 в направлении стрелок. Порядок числа C согласно изложенному правилу будет — 14.

После того как по таблице 1 определен порядок заданного числа, можно приступить к вычислению его мантиссы. Для этого прежде всего нужно заданное число умножить на число 2^{18-r}, записанное в таблице 1 в соседнем столбце в одной строчке с двойкой, степень которой является порядком заданного числа. В нашем случае 5615 4098 5977 нужно умножить на число, стоящее в таблице 1 в левом столбце рядом с 2^{-14}, а именно на 4294 9672 9600. Мы сознательно опустили запятые в числах 0,0000 5615 4098 5977 и 4294 9672 96,00, так как в дальнейших вычислениях нет необходимости следить за запятой.

Умножение 12-значных чисел 5615 4098 5977 и 4294 9672 9600 производится на счетной машине сокращенным способом. Устанавливаем на клавиатуре первые восемь цифр первого сомножителя 5615 4098 и первые восемь цифр второго сомножителя 4294 9672 и умножаем эти числа. Затем к полученному результату прибавляем произведение первого числа, округленного до четырех

цифр, и числа, составленного из четырех последних цифр второго числа, а также произведение второго числа, округленного до четырех цифр, и числа, составленного из четырех последних цифр первого числа, т. е. $5615 \times 9600 + 4295 \times 5977$. При умножении этих чисел нужно множимое и множитель устанавливать с 4-го по 1-й и с 12-го по 9-й разряды клавиатуры.

Теперь в счетчике результатов стоит число

2411 8001 7013 1071.

Разделим число, стоящее в счетчике результатов, на $512 = 2^9$, причем рычаг (23) (см. рис. 2), находящийся слева от клавиатуры, ставим в положение «4», а делитель 512 устанавливаем в 9—7 разрядах клавиатуры. После деления в счетчике оборотов и счетчике результатов получаем следующие числа:

0471 0000
0000 2801 7013 1071

Выписываем число 471, стоящее в 7—5 разрядах счетчика оборотов, и число 028, стоящее в 13—11 разрядах счетчика результатов:

$$C \sim 2^{-14} \cdot 0{,}471\,028.$$

Переносим число, стоящее в 10—1 разрядах счетчика результатов, с округлением до восьми значащих цифр на правую половину клавиатуры. Очищаем счетчик оборотов и счетчик результатов. Умножаем число 0170 1311, стоящее на правой половине клавиатуры, на число $262\,144 = 2^{18}$, помещаемое в 16—11 разрядах клавиатуры.

В счетчике результатов получим произведение

0044 5988 4707 8400.

Делим найденное число, как в предыдущем случае, на 512. Теперь в счетчике оборотов и счетчике результатов стоят следующие числа:

0008 0000
0003 6388 4707 8400

Из 7—5 разрядов счетчика оборотов выписываем 008 и из 13—11 разрядов счетчика результатов целую часть,

округляя последнюю до большего числа, если в 10-м разряде счетчика результатов стоит цифра 5 или большая:

$$M_c \sim 2^{-14} \cdot 0{,}471\,028\,008\,364.$$

Для того чтобы найти выражение M_c в восьмеричной системе счисления, нужно обратиться к таблице 2. Против числа 471 находим его восьмеричное представление 727, против числа 028—034, против числа 008—010, наконец, против числа 364 находим 554.

Итак, C имеет следующее выражение:

$$C = 2^{-14} \cdot 0,\ 727\,034\,010\,554.$$

Чтобы быть уверенным в правильности перевода числа в двоичную систему счисления, следует провести следующий контроль.

По таблице 1 еще раз убедимся в правильности выбора порядка числа C. Осуществим перевод числа C из двоичной системы счисления в десятичную. Для этого умножим 471 на первое контрольное число 1953 1250, помещенное в таблице 3.

При этом контрольное число устанавливаем в 8—1 разрядах клавиатуры, а число 471 — в 16—14 разрядах. К произведению, стоящему в счетчике результатов, прибавляем произведение числа 028 на второе контрольное число 3814 6973. Второе контрольное число помещаем на правой половине клавиатуры, а число 028 — в 13—11 разрядах клавиатуры. Затем прибавляем произведение третьего контрольного числа на число 008. Третье контрольное число 0745 0563 набираем на 8—1 разрядах клавиатуры, а число 008 — на 11—9 разрядах. Наконец, прибавляем произведение четвертого контрольного числа 000 145 35 на число 364. Последнее контрольное число помещаем в 8—1 разрядах клавиатуры, а число 364 — в 11—9 разрядах.

В счетчике результатов получим M_c в десятичной системе счисления:

0920 0287 5141 9644.

Запятая в числе M_c стоит между 16 и 15 разрядами счетчика результатов.

Для того чтобы вычислить контрольное значение, остается умножить M_c на два в степени порядка числа C, в нашем случае на $2^{-14} = 0{,}6103\,5156\,2500 \cdot 10^{-4}$.

Передаем при помощи клавиши (18) число M_c из счетчика результатов в счетчик-накопитель (17). Умножаем число M_c, стоящее в счетчике-накопителе, округлив его до 12 знаков (9200 2875 1420) описанным выше сокращенным способом, на значащую часть числа 2^{-14} (6103 5156 2500).

В счетчике результатов получим контрольное значение числа C:

5615 4098 5974 1180.

Полагаем допустимым расхождением контрольного значения числа C с заданным значением C в три с половиной единицы одиннадцатой значащей цифры с любым знаком.

В нашем случае разность между контрольным значением числа C и заданным значением C лежит в допустимых пределах:

$$\begin{array}{r} 5615\,4098\,59\,76\,68 \\ -\ 5615\,4098\,59\,74 \\ \hline 02\,68 \end{array}$$

В заключение необходимо сделать следующие замечания:

1. Обычно в начале перевода при первом умножении заданного числа C на 2^{18-r} первая значащая цифра в счетчике результатов, равная 1 или 2, располагается в 16-м разряде. Однако в некоторых случаях старшая значащая цифра после первого умножения может оказаться в 15-м разряде счетчика результатов. В этих случаях в отличие от описанного выше способа перевода следует при первом делении на 512 число 512 устанавливать в 8—6 разрядах клавиатуры, целую часть остатка от деления при первом делении выписывать из 12—10 разрядов счетчика результатов и, наконец, дробную часть переносить на правую половину клавиатуры из 9—2 разрядов счетчика результатов. Например, при переводе числа $D = 0{,}21$ после первого умножения получаем в счетчике результатов число

0220 2009 6000 0000.

Окончательно получаем следующее восьмеричное выражение числа D:

$$D = 2^{-2} \cdot 0{,}656\,050\,753\,412.$$

2. В некоторых случаях, когда значащая часть заданного числа или значащая часть табличного числа, за исключением нескольких первых цифр, состоит из нулей, первое умножение заданного числа на табличное число (из табл. 1) можно осуществить в один прием с предварительным угоном каретки. Например, пусть требуется перевести в двоичную систему счисления число 60,00 5667 9912. Это число нужно умножить на табличное значение 4096,0000 0000. Или пусть требуется перевести в двоичную систему счисления число 0,0000 1270 0000 0000. Значащую часть этого числа 1270 0000 0000 нужно умножить на табличное значение 1717 9869 1840. Умножение в обоих случаях можно осуществить в один прием с предварительным угоном каретки, причем первая значащая цифра в произведении должна быть помещена в 16-м разряде счетчика результатов.

3. В тех случаях, когда переводятся числа из десятичной системы счисления в двоичную с меньшей точностью, чем три единицы десятой значащей цифры, изложенный метод перевода чисел можно упрощать.

При переводе приближенных чисел примерно с семью или восемью верными десятичными знаками следует производить первое умножение заданного числа на табличное число в один прием, округляя оба сомножителя до восьми значащих цифр. Аналогично последнее умножение чисел при контрольных вычислениях следует производить с восемью значащими цифрами. При этом допускается расхождение контрольного значения с заданным числом в пределах нескольких единиц восьмой значащей цифры заданного числа. Расхождение больше одной единицы в восьмой значащей цифре происходит относительно редко. Даже если и имеется расхождение больше одной единицы восьмой значащей цифры, то оно происходит в основном за счет последнего умножения при контрольных вычислениях, так что фактический перевод числа из десятичной системы счисления в двоичную выполнен значительно точнее. И наконец, можно после

первого деления на 512 перенос дробной части остатка на правую половину клавиатуры осуществлять с округлением до четырех значащих цифр и при этом помещать его в 8—5 разрядах клавиатуры.

При переводе приближенных чисел с шестью или пятью верными десятичными знаками следует производить первое умножение заданного числа на табличное значение с семью значащими цифрами. Затем после первого деления на 512 дробная часть остатка округляется до двух значащих цифр и переносится на правую половину клавиатуры в 8 и 7 разряды; на левой половине клавиатуры вместо числа 2621 4400 устанавливается число 0005 1200; производится умножение установленных чисел. После умножения из 13—11 разрядов счетчика результатов выписывается (с округлением) число, определяющее 7-й—9-й разряды восьмеричного представления заданного числа. Последние три младшие цифры восьмеричного представления числа в этом случае принимаются равными нулю. При контроле допускается расхождение в пределах нескольких единиц седьмой значащей цифры заданного числа; значащая часть заданного числа до семизначной дополняется мысленно нулями.

При переводе приближенных чисел не более чем с пятью верными десятичными знаками следует производить первое умножение заданного числа на табличное значение с шестью значащими цифрами.

После первого деления на 512 выписывается частное из счетчика оборотов и выписывается с округлением целая часть остатка из 13—11 разрядов счетчика результатов На этом выделение цифровой части заданного числа в восьмеричной системе счисления заканчивается. 7-я - 12-я цифры восьмеричного представления в этом случае принимаются равными нулю.

При контроле допускается расхождение в пределах одной единицы пятой значащей цифры заданного числа.

Следует заметить, что при переводе чисел с уменьшенной точностью можно округлять контрольные числа до разрядов, отмеченных пунктирными линиями (см. контрольные числа, табл. 3). Под пунктирными линиями подписано число верных знаков в переводимых числах.

Таблица 1

	2^{9}	$0,5120\,0000\,0000\cdot10^{3}$	2^{9}	$0,5120\,0000\,0000\cdot10^{3}$
	2^{10}	$0,1024\,0000\,0000\cdot10^{4}$	2^{8}	$0,2560\,0000\,0000\cdot10^{3}$
	2^{11}	$0,2048\,0000\,0000\cdot10^{4}$	2^{7}	$0,1280\,0000\,0000\cdot10^{3}$
	2^{12}	$0,4096\,0000\,0000\cdot10^{4}$	2^{6}	$0,6400\,0000\,0000\cdot10^{2}$
	2^{13}	$0,8192\,0000\,0000\cdot10^{4}$	2^{5}	$0,3200\,0000\,0000\cdot10^{2}$
↓	2^{14}	$0,1638\,4000\,0000\cdot10^{5}$	2^{4}	$0,1600\,0000\,0000\cdot10^{2}$ ↑
	2^{15}	$0,3276\,8000\,0000\cdot10^{5}$	2^{3}	$0,8000\,0000\,0000\cdot10^{1}$
	2^{16}	$0,6553\,6000\,0000\cdot10^{5}$	2^{2}	$0,4000\,0000\,0000\cdot10^{1}$
16—11 →	2^{17}	$0,1310\,7200\,0000\cdot10^{6}$	2^{1}	$0,2000\,0000\,0000\cdot10^{1}$
	2^{18}	$0,2621\,4400\,0000\cdot10^{6}$	2^{0}	$0,1000\,0000\,0000\cdot10^{1}$
	2^{19}	$0,5242\,8800\,0000\cdot10^{6}$	2^{-1}	$0,5000\,0000\,0000\cdot10^{0}$
	2^{20}	$0,1048\,5760\,0000\cdot10^{7}$	2^{-2}	$0,2500\,0000\,0000\cdot10^{0}$
	2^{21}	$0,2097\,1520\,0000\cdot10^{7}$	2^{-3}	$0,1250\,0000\,0000\cdot10^{0}$
	2^{22}	$0,4194\,3040\,0000\cdot10^{7}$	2^{-4}	$0,6250\,0000\,0000\cdot10^{-1}$
	2^{23}	$0,8388\,6080\,0000\cdot10^{7}$	2^{-5}	$0,3125\,0000\,0000\cdot10^{-1}$
	2^{24}	$0,1677\,7216\,0000\cdot10^{8}$	2^{-6}	$0,1562\,5000\,0000\cdot10^{-1}$
↓	2^{25}	$0,3355\,4432\,0000\cdot10^{8}$	2^{-7}	$0,7812\,5000\,0000\cdot10^{-2}$ ↑
	2^{26}	$0,6710\,8864\,0000\cdot10^{8}$	2^{-8}	$0,3906\,2500\,0000\cdot10^{-2}$
	2^{27}	$0,1342\,1772\,8000\cdot10^{9}$	2^{-9}	$0,1953\,1250\,0000\cdot10^{-2}$
	2^{28}	$0,2684\,3545\,6000\cdot10^{9}$	2^{-10}	$0,9765\,6250\,0000\cdot10^{-3}$
	2^{29}	$0,5368\,7091\,2000\cdot10^{9}$	2^{-11}	$0,4882\,8125\,0000\cdot10^{-3}$
	2^{30}	$0,1073\,7418\,2400\cdot10^{10}$	2^{-12}	$0,2441\,4062\,5000\cdot10^{-3}$
	2^{31}	$0,2147\,4836\,4800\cdot10^{10}$	2^{-13}	$0,1220\,7031\,2500\cdot10^{-3}$

Продолжение

2^{31}	$0,2147\,4836\,4800 \cdot 10^{10}$	2^{-13}	$0,1220\,7031\,2500 \cdot 10^{-3}$
2^{32}	$0,4294\,9672\,9600 \cdot 10^{10}$	2^{-14}	$0,6103\,5156\,2500 \cdot 10^{-4}$
2^{33}	$0,8589\,9345\,9200 \cdot 10^{10}$	2^{-15}	$0,3051\,7578\,1250 \cdot 10^{-4}$
2^{34}	$0,1717\,9869\,1840 \cdot 10^{11}$	2^{-16}	$0,1525\,8789\,0625 \cdot 10^{-4}$
2^{35}	$0,3435\,9738\,3680 \cdot 10^{11}$	2^{-17}	$0,7629\,3945\,3125 \cdot 10^{-5}$
2^{36}	$0,6871\,9476\,7360 \cdot 10^{11}$	2^{-18}	$0,3814\,6972\,6562 \cdot 10^{-5}$
2^{37}	$0,1374\,3895\,3472 \cdot 10^{12}$	2^{-19}	$0,1907\,3486\,3281 \cdot 10^{-5}$
2^{38}	$0,2748\,7790\,6944 \cdot 10^{12}$	2^{-20}	$0,9536\,7431\,6406 \cdot 10^{-6}$
2^{39}	$0,5497\,5581\,3888 \cdot 10^{12}$	2^{-21}	$0,4768\,3715\,8203 \cdot 10^{-6}$
2^{40}	$0,1099\,5116\,2778 \cdot 10^{13}$	2^{-22}	$0,2384\,1857\,9102 \cdot 10^{-6}$
2^{41}	$0,2199\,0232\,5555 \cdot 10^{13}$	2^{-23}	$0,1192\,0928\,9551 \cdot 10^{-6}$
2^{42}	$0,4398\,0465\,1110 \cdot 10^{13}$	2^{-24}	$0,5960\,4644\,7754 \cdot 10^{-7}$
2^{43}	$0,8796\,0930\,2221 \cdot 10^{13}$	2^{-25}	$0,2980\,2322\,3877 \cdot 10^{-7}$
2^{44}	$0,1759\,2186\,0444 \cdot 10^{14}$	2^{-26}	$0,1490\,1161\,1938 \cdot 10^{-7}$
2^{45}	$0,3518\,4372\,0888 \cdot 10^{14}$	2^{-27}	$0,7450\,5805\,9692 \cdot 10^{-8}$
2^{46}	$0,7036\,8744\,1777 \cdot 10^{14}$	2^{-28}	$0,3725\,2902\,9846 \cdot 10^{-8}$
2^{47}	$0,1407\,3748\,8355 \cdot 10^{15}$	2^{-29}	$0,1862\,6451\,4923 \cdot 10^{-8}$
2^{48}	$0,2814\,7497\,6711 \cdot 10^{15}$	2^{-30}	$0,9313\,2257\,4615 \cdot 10^{-9}$
2^{49}	$0,5629\,4995\,3421 \cdot 10^{15}$	2^{-31}	$0,4656\,6128\,7308 \cdot 10^{-9}$
2^{50}	$0,1125\,8999\,0684 \cdot 10^{16}$	2^{-32}	$0,2328\,3064\,3654 \cdot 10^{-9}$
2^{51}	$0,2251\,7998\,1369 \cdot 10^{16}$	2^{-33}	$0,1164\,1532\,1827 \cdot 10^{-9}$
2^{52}	$0,4503\,5996\,2738 \cdot 10^{16}$	2^{-34}	$0,5820\,7660\,9135 \cdot 10^{-10}$
2^{53}	$0,9007\,1992\,5476 \cdot 10^{16}$	2^{-35}	$0,2910\,3830\,4567 \cdot 10^{-10}$
2^{54}	$0,1801\,4398\,5095 \cdot 10^{17}$	2^{-36}	$0,1455\,1915\,2284 \cdot 10^{-10}$

Таблица 2

0	000	16	020	32	040	48	060	64	100	80	120	96	140	112	160
1	001	17	021	33	041	49	061	65	101	81	121	97	141	113	161
2	002	18	022	34	042	50	062	66	102	82	122	98	142	114	162
3	003	19	023	35	043	51	063	67	103	83	123	99	143	115	163
4	004	20	024	36	044	52	064	68	104	84	124	100	144	116	164
5	005	21	025	37	045	53	065	69	105	85	125	101	145	117	165
6	006	22	026	38	046	54	066	70	106	86	126	102	146	118	166
7	007	23	027	39	047	55	067	71	107	87	127	103	147	119	167
8	010	24	030	40	050	56	070	72	110	88	130	104	150	120	170
9	011	25	031	41	051	57	071	73	111	89	131	105	151	121	171
10	012	26	032	42	052	58	072	74	112	90	132	106	152	122	172
11	013	27	033	43	053	59	073	75	113	91	133	107	153	123	173
12	014	28	034	44	054	60	074	76	114	92	134	108	154	124	174
13	015	29	035	45	055	61	075	77	115	93	135	109	155	125	175
14	016	30	036	46	056	62	076	78	116	94	136	110	156	126	176
15	017	31	037	47	057	63	077	79	117	95	137	111	157	127	177

Продолжение

128	200	144	220	160	240	176	260	192	300	208	320	224	340	240	360
129	201	145	221	161	241	177	261	193	301	209	321	225	341	241	361
130	202	146	222	162	242	178	262	194	302	210	322	226	342	242	362
131	203	147	223	163	243	179	263	195	303	211	323	227	343	243	363
132	204	148	224	164	244	180	264	196	304	212	324	228	344	244	364
133	205	149	225	165	245	181	265	197	305	213	325	229	345	245	365
134	206	150	226	166	246	182	266	198	306	214	326	230	346	246	366
135	207	151	227	167	247	183	267	199	307	215	327	231	347	247	367
136	210	152	230	168	250	184	270	200	310	216	330	232	350	248	370
137	211	153	231	169	251	185	271	201	311	217	331	233	351	249	371
138	212	154	232	170	252	186	272	202	312	218	332	234	352	250	372
139	213	155	233	171	253	187	273	203	313	219	333	235	353	251	373
140	214	156	234	172	254	188	274	204	314	220	334	236	354	252	374
141	215	157	235	173	255	189	275	205	315	221	335	237	355	253	375
142	216	158	236	174	256	190	276	206	316	222	336	238	356	254	376
143	217	159	237	175	257	191	277	207	317	223	337	239	357	255	377

Продолжение

256	400	272	420	288	440	304	460	320	500	336	520	352	540	368	560
257	401	273	421	289	441	305	461	321	501	337	521	353	541	369	561
258	402	274	422	290	442	306	462	322	502	338	522	354	542	370	562
259	403	275	423	291	443	307	463	323	503	339	523	355	543	371	563
260	404	276	424	292	444	308	464	324	504	340	524	356	544	372	564
261	405	277	425	293	445	309	465	325	505	341	525	357	545	373	565
262	406	278	426	294	446	310	466	326	506	342	526	358	546	374	566
263	407	279	427	295	447	311	467	327	507	343	527	359	547	375	567
264	410	280	430	296	450	312	470	328	510	344	530	360	550	376	570
265	411	281	431	297	451	313	471	329	511	345	531	361	551	377	571
266	412	282	432	298	452	314	472	330	512	346	532	362	552	378	572
267	413	283	433	299	453	315	473	331	513	347	533	363	553	379	573
268	414	284	434	300	454	316	474	332	514	348	534	364	554	380	574
269	415	285	435	301	455	317	475	333	515	349	535	365	555	381	575
270	416	286	436	302	456	318	476	334	516	350	536	366	556	382	576
271	417	287	437	303	457	319	477	335	517	351	537	367	557	383	577

Продолжение

384	600	400	620	416	640	432	660	448	700	464	720	480	740	496	760
385	601	401	621	417	641	433	661	449	701	465	721	481	741	497	761
386	602	402	622	418	642	434	662	450	702	466	722	482	742	498	762
387	603	403	623	419	643	435	663	451	703	467	723	483	743	499	763
388	604	404	624	420	644	436	664	452	704	468	724	484	744	500	764
389	605	405	625	421	645	437	665	453	705	469	725	485	745	501	765
390	606	406	626	422	646	438	666	454	706	470	726	486	746	502	766
391	607	407	627	423	647	439	667	455	707	471	727	487	747	503	767
392	610	408	630	424	650	440	670	456	710	472	730	488	750	504	770
393	611	409	631	425	651	441	671	457	711	473	731	489	751	505	771
394	612	410	632	426	652	442	672	458	712	474	732	490	752	506	772
395	613	411	633	427	653	443	673	459	713	475	733	491	753	507	773
396	614	412	634	428	654	444	674	460	714	476	734	492	754	508	774
397	615	413	635	429	655	445	675	461	715	477	735	493	755	509	775
398	616	414	636	430	656	446	676	462	716	478	736	494	756	510	776
399	617	415	637	431	657	447	677	463	717	479	737	495	757	511	777

Таблица 3

Контрольные числа

1	2				3
16—14	19531	25	0		8—1
13—11	38	14	69	73	8—1
11—9		07	45	0563	8—1
11—9		00	01	4535	8—1
		4	6	8	

В графе (1) указаны разряды, в которых устанавливаются трехзначные числа, полученные при переводе в восьмеричную систему.

В графе (2) приведены значения контрольных чисел.

В графе (3) указаны разряды, в которых устанавливаются контрольные числа.

ГЛАВА VII

РАЗНОЕ

§ 42. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Интерполяция — вычисление для заданного x значения функции

$$y = f(x), \tag{1}$$

исходя из нескольких известных ее значений:

$$y_k = f(x_k), \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Термин «интерполяция» употребляется только тогда, когда x не выходит за пределы данных значений x_k. В противном случае применяется термин «экстраполяция».

Интерполяция называется прямой, когда по известному значению аргумента находится значение функции, и обратной, когда по известному значению функции находится значение аргумента.

Линейная интерполяция

Если искомая функция строится по ее значениям, известным только в двух точках, то обычно применяется

линейная интерполяция. Формула линейной интерполяции следующая:

$$f=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(f_2-f_1)+f_1. \qquad (2)$$

При обратной линейной интерполяции аргумент и функция меняются своими ролями и формула ее имеет вид:

$$x=\frac{f-f_1}{f_2-f_1}(x_2-x_1)+x_1. \qquad (3)$$

Пример 1. По таблице значений функции $\sin x$ и ее первых разностей Δ найти $\sin x$ для $x=0{,}2756\,7548$:

x	$\sin x$	Δ
0,2755	0,272 028 12	9622
0,2756	0,272 124 34	9623
0,2757	0,272 220 57	9622
0,2758	0,272 316 79	9622
0,2759	0,272 413 01	

Как видно из таблицы, наше значение аргумента, для которого нужно найти значение функции, находится между $x_1=0{,}2756$ и $x_2=0{,}2757$. Обычно искомая функция находится между ее значениями, соответствующими этим аргументам, т. е. между

$$f_1=\sin x_1=0{,}272\,124\,34 \quad \text{и} \quad f_2=\sin x_2=0{,}272\,220\,57.$$

Таким образом, мы нашли границы, где должна находиться искомая функция $\sin x$. Далее начинаем вычисления по формуле (2).

Находим разность между заданным аргументом и меньшим табличным значением аргумента:

$$x-x_1=0{,}2756\,7548-0{,}2756=0{,}0000\,7548. \qquad (4)$$

Находим табличную разность между граничными значениями функции:

$$\Delta_1=f_2-f_1=0{,}2722\,2057-0{,}2721\,2434=0{,}0000\,9623, \qquad (5)$$

которая обычно дается в таблицах.

Вычисляем произведение $(x-x_1)$ на (f_2-f_1):

$$(x-x_1)(f_2-f_1)=0{,}0000\,0000\,7263\,4404. \qquad (6)$$

Далее полученное произведение нужно разделить на $x_2 - x_1$. Так как таблица задана с постоянным шагом изменения аргумента $h = 0{,}0001$, то деление на $x_2 - x_1$ равносильно сдвигу запятой в произведении (6) вправо на четыре разряда, в результате которого имеем:

$$\frac{(x-x_1)(f_2-f_1)}{x_2-x_1} = 0{,}0000\,7263\,4404.$$

Складывая этот результат с f_1, получаем искомое значение функции:

$$f = \sin x = 0{,}2721\,9697.$$

Пример 2. По таблице значений функции $\sin x$, заданной в приведенном выше примере 1, найти x, при котором $\sin x = 0{,}2721\,9697$. Здесь вычисления проводим по формуле, обратной линейной интерполяции (3).

Находим разность между заданной функцией и табличной, соответствующей меньшему граничному значению аргумента:

$$f - f_1 = 0{,}27219697 - 0{,}27212434 = 0{,}0000\,7263. \qquad (7)$$

Разность (7) делим на табличную разность (5):

$$\frac{f-f_1}{f_2-f_1} = \frac{0{,}0000\,7263}{0{,}0000\,9623} = 0{,}7548\ldots \qquad (8)$$

Далее полученное частное (8) нужно умножить на $x_2 - x_1$, что равносильно сдвигу запятой влево на четыре разряда.

Сдвинув запятую влево на четыре разряда и прибавив к полученному результату x_1, получаем искомое $x = 0{,}2756\,7548$.

Замечание. Если в таблице значения аргумента заданы с постоянным шагом, то линейную интерполяцию можно применять лишь тогда, когда вторые разности (разности соседних первых разностей) по модулю не превосходят четырех единиц младшего разряда используемого значения функции.

В рассматриваемой таблице $\sin x$ вторые разности не превышают по модулю четырех единиц. В частности, первые разности имеют следующие значения:

$$\Delta_1 = f_2 - f_1 = 9622; \qquad \Delta_3 = f_4 - f_3 = 9622;$$
$$\Delta_2 = f_3 - f_2 = 9623; \qquad \Delta_4 = f_5 - f_4 = 9622,$$

а вторые разности такие:

$$\Delta_1^2 = \Delta_2 - \Delta_1 = 1; \quad \Delta_2^2 = \Delta_3 - \Delta_2 = -1; \quad \Delta_3^2 = \Delta_4 - \Delta_3 = 0.$$

В этом случае при прямой линейной интерполяции искомое значение функции получается с числом верных знаков, равным числу знаков у табличных значений функции.

При обратной линейной интерполяции число верных знаков у искомого значения аргумента равно числу знаков у табличного значения аргумента плюс число знаков у первой разности, если старшая цифра первой разности не менее 5, или на единицу меньше, если старшая цифра первой разности меньше 5.

В рассмотрённых выше примерах как искомая функция, так и искомое значение аргумента имеют восемь верных знаков.

§ 43. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА. СХЕМА ЭЙТКЕНА

В тех случаях, когда линейная интерполяция не дает требуемой точности, применяется интерполяция высокого порядка. В частности, *интерполяция высокого порядка* может проводиться по схеме Эйткена. Преимущество этой схемы состоит в том, что она позволяет использовать неравноотстоящие точки.

Рассмотрим применение схемы Эйткена на примере линейной интерполяции.

Введем следующее обозначение $I_{12\ldots n}$ есть *интерполирующая* функция, построенная по n-точкам. Например, I_{12} означает интерполирующую функцию, построенную по точкам: (x_1, f_1) и (x_2, f_2), а I_{123} построена по трем точкам: (x_1, f_1), (x_2, f_2) и (x_3, f_3).

Формулу линейной интерполяции (2) можно записать также в виде

$$f = \frac{f_2(x - x_1) - f_1(x - x_2)}{x_2 - x_1}. \tag{9}$$

Рассмотрим вычисления по формуле (9) отдельно на настольной счетной машине «Рейнметалл» и на настольной счетной машине «Мерседес».

Вычисления на машине «Рейнметалл»

1. Находят разности: $(x-x_1)$ и $(x-x_2)$.

2. Вычисляют произведение: $(x-x_1)f_2$.

Разность $(x-x_1)$ набирается на дополнительной клавиатуре, а значение функции f_2 — на основной клавиатуре с 8-го разряда.

Произведение получается в счетчике результатов, а разность $(x-x_1)$ — в счетчике оборотов.

3. Сохраняя на машине содержимое счетчика оборотов и результат первого произведения, производим вычитание произведения $(x-x_2)f_1$ с учетом его знака. После выполнения этой операции в счетчике результатов получается числитель формулы (9), а в счетчике оборотов автоматически получается знаменатель.

4. Нажимом на клавишу (8) каретка устанавливается в исходное положение для деления и содержимое счетчика оборотов переносится в соответствующие разряды основной клавиатуры. Затем производится деление, в результате которого получается искомое значение функции f.

Вычисления на машине «Мерседес»

1. Находят разности: $(x-x_1)$ и $(x-x_2)$.

2. Вычисляют произведение: $(x-x_1)f_2$.

Разность $(x-x_1)$ набирается на левой половине клавиатуры, включая красный ряд, а функция f_2 — на правой, начиная с 8-го разряда, и производится умножение (клавиша (22) должна быть при этом поднята до отказа). Произведение получается в счетчике результатов, а разность $(x-x_1)$ — в счетчике оборотов.

3. Сохраняя на машине содержимое счетчика оборотов и результат первого произведения, производим вычитание произведения $(x-x_2)f_1$ с учетом его знака.

После выполнения этой операции на счетчике результатов получается числитель формулы (9), а на счетчике оборотов автоматически получается знаменатель.

4. Содержимое счетчика оборотов переносится на соответствующие разряды клавиатуры. После чего счетчик оборотов очищается и производится деление, в результате которого получается искомое значение функции f.

Таким образом, для заданного x нахождение значения функции по известным ее значениям в двух точках как

на машине «Рейнметалл», так и на машине «Мерседес» свелось к перекрестному умножению и одному делению, в результате которых получили величину I_{12}:

$$\begin{array}{ll} x-x_1 \searrow\!\!\nearrow & f_1 \\ x-x_2 \nearrow\!\!\searrow & f_2 \end{array} \qquad I_{12}$$

По схеме Эйткена значение функции для какого-то x по известным ее значениям в нескольких точках находится путем последовательного применения вышеописанного процесса.

Пусть известно значение функции в трех точках:

$$\begin{array}{ll} x_1 & f_1 \\ x_2 & f_2 \\ x_3 & f_3 \end{array}$$

Для заданного x требуется найти значение f.

Находим разности $(x-x_i)$ и пишем соответствующие им значения функции:

$$\begin{array}{ll} x-x_1 & f_1 \\ x-x_2 & f_2 \\ x-x_3 & f_3 \end{array}$$

Берем первую и вторую строки и производим интерполяцию по описанной выше схеме, в результате которой получаем величину I_{12}:

$$\begin{array}{ll} x-x_1 \searrow\!\!\nearrow & f_1 \\ x-x_2 \nearrow\!\!\searrow & f_2 \end{array} \qquad I_{12}$$

Далее производим аналогичные вычисления с первой и третьей строками:

$$\begin{array}{ll} x-x_1 \searrow\!\!\nearrow & f_1 \\ x-x_3 \nearrow\!\!\searrow & f_3 \end{array} \qquad I_{13}$$

Затем берем разности $(x-x_2)$, $(x-x_3)$, полученные величины I_{12}, I_{13} и снова производим перекрестное умножение, в результате которого получаем искомое значение функции $f=I_{123}$:

$$\begin{array}{ll} x-x_2 \searrow\!\!\nearrow & I_{12} \\ x-x_3 \nearrow\!\!\searrow & I_{13} \end{array} \qquad I_{123}$$

Таким образом, по Эйткену интерполирование свелось к вычислению по следующей схеме:

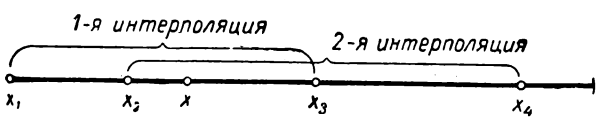
$$
\begin{array}{llll}
\cancel{x - x_1} & \cancel{f_1} & & \\
x - x_2 & f_2 & J_{12} & \\
x - x_3 & f_3 & J_{13} & J_{123}
\end{array}
$$

т. е. сначала производятся перекрестные умножения первой строки со второй и первой строки с третьей, в результате которых получаются величины I_{12} и I_{13}. Далее первая строка и второй столбец вычеркиваются, производится перекрестное умножение двух оставшихся строк и получается искомое значение функции I_{123}.

При интерполировании по четырем точкам получается следующая схема:

$$
\begin{array}{llll}
\cancel{x - x_1} & \cancel{f_1} & & \\
\cancel{x - x_2} & \cancel{f_2} & \cancel{J_{12}} & \\
x - x_3 & f_3 & J_{13} & J_{123} \\
x - x_4 & f_4 & J_{14} & J_{124} \quad J_{1234}
\end{array}
$$

Совершенно аналогично производится интерполирование по n-точкам. Схема Эйткена применима также и для случая экстраполяции. Следует сказать, что вопрос строгого определения верных знаков при интерполировании по схеме Эйткена выходит за пределы настоящего руководства. На практике, например, можно проинтерполировать по заданному числу точек дважды, заменив одно значение функции.



Совпадающие знаки полученных результатов можно принять за верные.

Пример. По заданным точкам

x_i	f_i
0,2437	0,75683
0,2651	0,64315
0,3042	0,50276
0,3503	0,42315

для $x = 0{,}2705$ определить f.

Проведем интерполяцию по трем первым точкам:

$x - x_i$	f_i		
0,0268	0,75683		
0,0054	0,64315	0,614464	
—0,0337	0,50276	0,623761	0,618582

Теперь заменим одно значение функции, проинтерполируем по трем последним точкам:

$x - x_i$	f_i		
0,0054	0,64315		
—0,0337	0,50276	0,623761	
—0,0798	0,42315	0,560956	0,619780

Видим, что в качестве искомого значения можно принять $f = 0{,}619$, поскольку оно отличается менее чем на одну единицу от обоих результатов интерполяции.

§ 44. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО И КУБИЧЕСКОГО КОРНЕЙ

Квадратный и кубический корни из числа можно получить на настольной счетной машине вычислением по итерационным формулам.

Для получения корня квадратного из числа x может быть использована формула:

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(y_n + \frac{x}{y_n}\right), \tag{10}$$

а для кубического корня формула:

$$y_{n+1} = \frac{2}{3}\, y_n + \frac{x}{3y_n^2}. \tag{11}$$

Графически из таблиц или другим каким-либо способом находится нулевое приближение y_0 и уточняется последовательными приближениями по формулам (10) или

соответственно (11). Вычисления по формулам (10) и (11) ведутся до тех пор, пока не совпадут два последовательных результата в пределах требуемой точности.

Пример 1. Найти корень квадратный $y=\sqrt{x}$ из числа $x=0{,}367\,568\,42$ с восемью значащими цифрами.

Определяем, что $y_0 \approx 0{,}6$. Подставляя это значение в формулу (10), имеем:

$$y_1=\frac{1}{2}\left(y_0+\frac{x}{y_0}\right)=\frac{1}{2}\left(0{,}6+\frac{0{,}367\,568\,42}{0{,}6}\right)=0{,}606\,307\,02.$$

Значение y_1 снова подставляем в формулу (10), получаем y_2 и так процесс продолжаем до совпадения двух последовательных приближений:

$$y_2=\frac{1}{2}\left(y_1+\frac{x}{y_1}\right)=\frac{1}{2}\left(0{,}606\,307\,02+\frac{0{,}367\,568\,42}{0{,}606\,307\,02}\right)=0{,}606\,274\,22;$$

$$y_3=\frac{1}{2}\left(y_2+\frac{x}{y_2}\right)=\frac{1}{2}\left(0{,}606\,274\,22+\frac{0{,}367\,568\,42}{0{,}606\,274\,22}\right)=0{,}606\,274\,21;$$

$$y_4=\frac{1}{2}\left(y_3+\frac{x}{y_3}\right)=\frac{1}{2}\left(0{,}606\,274\,21+\frac{0{,}367\,568\,42}{0{,}606\,274\,21}\right)=0{,}606\,274\,21.$$

Таким образом, $y_3=y_4=0{,}606\,274\,21$.
Следовательно, с восемью верными значащими цифрами $y=0{,}606\,274\,21$.

Пример 2. Найти корень кубический $y=\sqrt[3]{x}$ из числа $x=0{,}541\,726$ с шестью значащими цифрами.

Определяем, что $y_0 \approx 0{,}8$. Уточняя это значение по формуле (11), имеем:

$$y_1=\frac{2}{3}y_0+\frac{x}{3y_0^2}=\frac{2}{3}\cdot 0{,}8+\frac{0{,}541\,726}{3\cdot(0{,}8)^2}=0{,}815\,482;$$

$$y_2=\frac{2}{3}y_1+\frac{x}{3y_1^2}=\frac{2}{3}\cdot 0{,}815\,482+\frac{0{,}541\,726}{3\cdot(0{,}815\,482)^2}=0{,}815\,192;$$

$$y_3=\frac{2}{3}y_2+\frac{x}{3y_2^2}=\frac{2}{3}\cdot 0{,}815\,192+\frac{0{,}541\,726}{3\cdot(0{,}815\,192)^2}=0{,}815\,192.$$

Получили, что $y_2=y_3=0{,}815\,192$.
Следовательно, в пределах 6 значащих цифр можно принять $y=0{,}815\,192$.

Замечание. Используя методы деления и умножения многозначных чисел, описанные в главах III и V, можно вычислить по итерационным формулам (10) и (11) квадратный и кубический корни с большим числом знаков. В результате извлечения корней можно получить, например, 28 знаков.

§ 45. РАСЧЕТНАЯ СХЕМА

В вычислительной практике часто приходится производить расчеты по одним и тем же формулам много раз. Обычно формулы представляют собой сложные выражения, по которым трудно бывает вычислять без выписывания промежуточных результатов. В таких случаях удобно пользоваться расчетной схемой. Расчетная схема составляется по принципу разбиения сложных операций на простейшие и представляет собой совокупность граф. В каждую графу записывается или исходная величина, или результат одной или нескольких операций, выполняемых на машине без выписывания промежуточных результатов. Каждой графе присваивается номер, который обычно указывается в скобках в отличие от констант, входящих в формулы. Расчетные схемы рекомендуется составлять как можно экономичнее, следует избегать ненужных промежуточных записей, используя все имеющиеся возможности машины. Так, при повторных умножениях следует на машине «Рейнметалл» широко использовать клавишу «Rü» (21), а на машине «Мерседес» — клавишу «М» (20). Для хранения промежуточных результатов на машине «Мерседес» следует использовать накапливающий счетчик (17). Нужно также учитывать то, что сумму и разность произведений можно получить на счетчике результатов, а сумму и разность частных — на счетчике оборотов.

При вычислении дробных выражений знаменатель, как правило, вычисляется раньше числителя.

Приведем примеры составления расчетных схем.

Пример 1. Требуется произвести расчеты по формуле:

$$z = x^2 + \frac{3xy-2}{x^2} - \frac{1}{y}.$$

На машине «Рейнметалл» вычислять по этой формуле удобно по следующей расчетной схеме:

x	y	$(1)^2$	$\frac{3(1)(2)-2}{(3)}-\frac{1}{(2)}+(3)$
(1)	(2)	(3)	(4)

При составлении приведенной схемы учтено, что разность частных можно получить на счетчике оборотов.

При счете на машине «Мерседес» графу (3) можно опустить, так как для хранения x^2 можно использовать накапливающий счетчик (17).

Пример 2. Произвести вычисления по формуле:

$$f=\frac{x^2-2y^2}{3,4x+y}-2y^2+5.$$

Здесь можно порекомендовать такую расчетную схему:

x	y	$2(2)^2$	$3,4(1)-(2)$	$\frac{(1)^2-(3)}{(4)}-2(3)+5$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

При вычислении по этой схеме на машине «Рейнметалл» используется клавиша «Rü» (21), а на машине «Мерседес» — клавиша «М» (20). Кроме того, при счете на машине «Мерседес» в приведенной схеме можно опустить графу (4), используя для хранения знаменателя дроби накапливающий счетчик (17).

§ 46. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ИСКЛЮЧЕНИЯ (МЕТОД ГАУССА)

Пусть задана система (1) пяти уравнений с пятью неизвестными (см. стр. 94—95).

Решить ее надо методом Гаусса с точностью до 6-й значащей цифры. Чтобы получить заданную точность, расчет

(1)

$$
\begin{aligned}
&0{,}90600000\cdot10^{1}x_1+0{,}34000000\cdot10^{0}x_2-0{,}20000000\cdot10^{-1}x_3-\\
&0{,}34000000\cdot10^{0}x_1-0{,}84100000\cdot10^{1}x_2+0{,}14000000\cdot10^{0}x_3+\\
&0{,}10800000\cdot10^{1}x_1-0{,}92000000\cdot10^{0}x_2+0{,}19010000\cdot10^{2}x_3+\\
&0{,}10500000\cdot10^{1}x_1-0{,}20000000\cdot10^{-1}x_2+0{,}10000000\cdot10^{1}x_3+\\
&0{,}30000000\cdot10^{0}x_1-0{,}58000000\cdot10^{0}x_2+0{,}91000000\cdot10^{0}x_3+
\end{aligned}
$$

	Коэффициенты при x_1	Коэффициенты при x_2	Коэффициенты при x_3	Коэффициенты при x_4
(2)	$0{,}90600000\cdot10^{1}$	$+0{,}34000000\cdot10^{0}$	$-0{,}20000000\cdot10^{-1}$	$-0{,}10200000\cdot10^{1}$
	$0{,}34000000\cdot10^{0}$	$-0{,}84100000\cdot10^{1}$	$+0{,}14000000\cdot10^{0}$	$+0{,}10500000\cdot10^{1}$
	$0{,}10800000\cdot10^{1}$	$-0{,}92000000\cdot10^{0}$	$+0{,}19010000\cdot10^{2}$	$+0{,}25000000\cdot10^{0}$
	$0{,}10500000\cdot10^{1}$	$-0{,}20000000\cdot10^{-1}$	$+0{,}10000000\cdot10^{1}$	$+0{,}10000000\cdot10^{2}$
	$0{,}30000000\cdot10^{0}$	$-0{,}58000000\cdot10^{0}$	$+0{,}91000000\cdot10^{0}$	$+0{,}40000000\cdot10^{-1}$
(3)	1	$+0{,}37527594\cdot10^{-1}$	$-0{,}22075055\cdot10^{-2}$	$-0{,}11258278\cdot10^{0}$
		$-0{,}84227594\cdot10^{1}$	$+0{,}14075055\cdot10^{0}$	$+0{,}10882781\cdot10^{1}$
		$-0{,}96052980\cdot10^{0}$	$+0{,}19012384\cdot10^{2}$	$+0{,}37158940\cdot10^{0}$
		$-0{,}59403974\cdot10^{-1}$	$+0{,}10023179\cdot10^{1}$	$+0{,}10118212\cdot10^{2}$
		$-0{,}59125828\cdot10^{0}$	$+0{,}91066225\cdot10^{0}$	$+0{,}73774834\cdot10^{-1}$
(4)		1	$-0{,}16710741\cdot10^{-1}$	$-0{,}12920684\cdot10^{0}$
			$0{,}18996333\cdot10^{2}$	$+0{,}24748238\cdot10^{0}$
			$0{,}10013252\cdot10^{1}$	$+0{,}10110537\cdot10^{2}$
			$0{,}90078189\cdot10^{0}$	$-0{,}26197800\cdot10^{-2}$
(5)			1	$+0{,}13027903\cdot10^{-1}$
				$0{,}10097492\cdot10^{2}$
				$-0{,}14355079\cdot10^{-1}$
(6)				1
(7)				

методом исключения (метод
са)

$$0,10200000\cdot10^{1}x_4 - 0,50000000\cdot10^{0}x_5 = 0,73000000\cdot10^{1}$$
$$0,10500000\cdot10^{1}x_4 - 0,30000000\cdot10^{0}x_5 = 0,60000000\cdot10^{0}$$
$$0,25000000\cdot10^{0}x_4 - 0,45000000\cdot10^{0}x_5 = 0,21000000\cdot10^{1}$$
$$0,10000000\cdot10^{2}x_4 + 0,70000000\cdot10^{0}x_5 = -0,100000\cdot10^{0}$$
$$0,40000000\cdot10^{-1}x_4 - 0,80400000\cdot10^{1}x_5 = 0,10500000\cdot10^{1}$$

Коэффициенты при x_5	Свободный член W	Σ	Контрольная Σ
$-0,50000000\cdot10^{0}$	$-0,73000000\cdot10^{1}$	$+0,56000000\cdot10^{0}$	
$-0,30000000\cdot10^{0}$	$-0,60000000\cdot10^{0}$	$-0,77800000\cdot10^{1}$	
$-0,45000000\cdot10^{0}$	$-0,21000000\cdot10^{1}$	$+0,16870000\cdot10^{2}$	
$+0,70000000\cdot10^{0}$	$+0,10000000\cdot10^{0}$	$+0,12830000\cdot10^{2}$	
$-0,80400000\cdot10^{1}$	$-0,10500000\cdot10^{1}$	$-0,84200000\cdot10^{1}$	
$-0,55187638\cdot10^{-1}$	$-0,80573951\cdot10^{0}$	$+0,61810155\cdot10^{-1}$	$0,61810160\cdot10^{-1}$
$-0,28123620\cdot10^{0}$	$-0,32604857\cdot10^{0}$	$-0,78010155\cdot10^{1}$	$-0,78010155\cdot10^{1}$
$-0,39039735\cdot10^{0}$	$-0,12298013\cdot10^{1}$	$+0,16803245\cdot10^{2}$	$0,16803245\cdot10^{2}$
$+0,75794702\cdot10^{0}$	$+0,94602649\cdot10^{0}$	$+0,12765099\cdot10^{2}$	$0,12765099\cdot10^{2}$
$-0,80234437\cdot10^{1}$	$-0,80827815\cdot10^{0}$	$-0,84385430\cdot10^{1}$	$-0,84385430\cdot10^{1}$
$+0,33390031\cdot10^{-1}$	$+0,38710422\cdot10^{-1}$	$+0,92618287\cdot10^{0}$	$0,92618287\cdot10^{0}$
$-0,35832523\cdot10^{0}$	$-0,11926188\cdot10^{1}$	$+0,17692871\cdot10^{2}$	$0,17692871\cdot10^{2}$
$+0,75993052\cdot10^{0}$	$+0,94832604\cdot10^{0}$	$+0,12820118\cdot10^{2}$	$0,12820119\cdot10^{2}$
$-0,80037015\cdot10^{1}$	$-0,78539029\cdot10^{0}$	$-0,78909297\cdot10^{1}$	$-0,78909297\cdot10^{1}$
$-0,18862863\cdot10^{-1}$	$-0,62781527\cdot10^{-1}$	$+0,93138349\cdot10^{0}$	$0,93138351\cdot10^{0}$
$+0,77881838\cdot10^{0}$	$+0,10111908\cdot10^{1}$	$+0,11887500\cdot10^{2}$	$0,11887501\cdot10^{2}$
$-0,79867102\cdot10^{1}$	$-0,72883783\cdot10^{0}$	$-0,87299031\cdot10^{1}$	$-0,87299031\cdot10^{1}$
$+0,77129883\cdot10^{-1}$	$+0,10014277\cdot10^{0}$	$+0,11772725\cdot10^{1}$	$0,11772726\cdot10^{1}$
$-0,79856030\cdot10^{1}$	$-0,72740027\cdot10^{0}$	$-0,87130033\cdot10^{1}$	$-0,87130033\cdot10^{1}$
1	$+0,91088960\cdot10^{-1}$	$+0,10910890\cdot10^{1}$	$0,10910890\cdot10^{1}$

ведем с восемью значащими цифрами. Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений. Для простоты вычислений при обратном ходе удобно сначала преобразовать уравнения так, чтобы в их правых частях стояли нули.

Вычисления ведутся по следующей схеме:

1) Составляем таблицу (2) коэффициентов и вычисляем построчные контрольные суммы Σ, как показано ниже; W — свободные члены со знаком минус.

2) Делим все члены первого уравнения, включая сумму, которая нужна для дальнейшего контроля, на коэффициент при первом неизвестном. Получаем новое выражение уравнения и при первом неизвестном коэффициент, равный единице. Контролем правильности всех делений служит построчная сумма, которая должна быть равна предыдущей сумме, разделенной на коэффициент при первом неизвестном. Затем идет последовательное исключение первого неизвестного из всех остальных уравнений. Умножаем все члены полученного нового первого уравнения на коэффициент при первом неизвестном в одном из последующих уравнений и вычитаем почленно соответствующее уравнение. После чего получается следующее (3) звено таблицы.

3) Далее мы поступаем аналогично и исключаем последовательно остальные неизвестные. В конце концов мы получаем уравнение с одним неизвестным (7), откуда x_5 будет равен свободному члену, взятому с противоположным знаком.

Затем начинается обратный ход счета, т. е. нахождение значений неизвестных. Делается это следующим образом: подставляем x_5 в первое уравнение (6) таблицы и прибавляем свободный член, получаем x_4 с обратным знаком. Аналогично получаем x_3, x_2 и x_1. Чтобы убедиться в верности найденных значений неизвестных, следует их подставить в систему уравнений (1).

В результате всех вычислений получаем следующее решение заданной системы уравнений:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}792\,117\,64\cdot 10^{0};\\
x_2 &= -0{,}466\,596\,38\cdot 10^{-1};\\
x_3 &= 0{,}622\,764\,49\cdot 10^{-1};\\
x_4 &= -0{,}931\,170\,89\cdot 10^{-1};\\
x_5 &= -0{,}910\,889\,60\cdot 10^{-1}.
\end{aligned}
$$

47. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ (МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ)

1) Пусть нам задана система пяти уравнений с пятью известными и требуется ее решить методом Зейделя:

$$
\begin{aligned}
&0{,}906\cdot10^{1}x_1+0{,}34\cdot10^{0}x_2-0{,}2\cdot10^{-1}x_3-0{,}102\cdot10^{1}x_4-0{,}5\cdot10^{0}x_5=0{,}73\cdot10^{1};\\
&0{,}34\cdot10^{0}x_1-0{,}841\cdot10^{1}x_2+0{,}14\cdot10^{0}x_3+0{,}105\cdot10^{1}x_4-0{,}3\cdot10^{0}x_5=0{,}6\cdot10^{0};\\
&0{,}108\cdot10^{1}x_1-0{,}92\cdot10^{0}x_2+0{,}1901\cdot10^{2}x_3+0{,}25\cdot10^{0}x_4-0{,}45\cdot10^{0}x_5=0{,}210\cdot10^{1};\\
&0{,}105\cdot10^{1}x_1-0{,}2\cdot10^{-1}x_2+0{,}1\cdot10^{1}x_3+0{,}1\cdot10^{2}x_4+0{,}7\cdot10^{0}x_5=-0{,}1\cdot10^{0};\\
&0{,}30\cdot10^{0}x_1-0{,}58\cdot10^{0}x_2+0{,}91\cdot10^{0}x_3+0{,}4\cdot10^{-1}x_4-0{,}804\cdot10^{1}x_5=0{,}105\cdot10^{1}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

2) Разрешаем заданные уравнения относительно x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, взятых с наибольшими по модулю коэффициентами, и получаем новые уравнения:

$$
\begin{aligned}
&x_1=-0{,}375\,275\,94\cdot10^{-1}x_2+0{,}220\,750\,55\cdot10^{-2}x_3+\\
&\quad+0{,}112\,582\,78\cdot10^{0}x_4+0{,}551\,876\,38\cdot10^{-1}x_5+0{,}805\,739\,51\cdot10^{0};\\
&x_2=0{,}404\,280\,62\cdot10^{-1}x_1+0{,}166\,468\,49\cdot10^{-1}x_3+\\
&\quad+0{,}124\,851\,36\cdot10^{0}x_4-0{,}356\,718\,19\cdot10^{-1}x_5-0{,}713\,436\,38\cdot10^{-1};\\
&x_3=-0{,}568\,122\,04\cdot10^{-1}x_1+0{,}483\,955\,81\cdot10^{-1}x_2-\\
&\quad-0{,}131\,509\,73\cdot10^{-1}x_4+0{,}236\,717\,52\cdot10^{-1}x_5+0{,}110\,468\,17\cdot10^{0};\\
&x_4=-0{,}105\cdot10^{0}x_1+0{,}2\cdot10^{-2}x_2-0{,}1\cdot10^{0}x_3-0{,}7\cdot10^{-1}x_5-0{,}1\cdot10^{-1};\\
&x_5=0{,}373\,134\,33\cdot10^{-1}x_1-0{,}721\,393\,04\cdot10^{-1}x_2+0{,}113\,184\,08\cdot10^{0}x_3+\\
&\quad+0{,}497\,512\,44\cdot10^{-2}x_4-0{,}130\,597\,01\cdot10^{0}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

3) За нулевое приближение решения берем свободные члены из системы уравнений (2). Затем, подставляя их в первое уравнение, мы получаем значение x_1. Подставляя приближенные значения во все остальные уравнения, мы используем вновь полученные значения и так продолжаем до тех пор, пока два последовательных значения каждого неизвестного будут совпадать с точностью до единицы младшего разряда.

n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$x_3^{(n)}$
0	$0{,}805\,739\,51\cdot10^{0}$	$-0{,}713\,436\,38\cdot10^{-1}$	$0{,}110\,468\,17\cdot10^{0}$
1	$0{,}800\,327\,56\cdot10^{0}$	$-0{,}337\,388\,80\cdot10^{-1}$	$0{,}604\,070\,32\cdot10^{-1}$
2	$0{,}791\,821\,26\cdot10^{0}$	$-0{,}464\,090\,21\cdot10^{-1}$	$0{,}622\,580\,07\cdot10^{-1}$
3	$0{,}792\,116\,78\cdot10^{0}$	$-0{,}466\,474\,77\cdot10^{-1}$	$0{,}622\,751\,53\cdot10^{-1}$
4	$0{,}792\,117\,40\cdot10^{0}$	$-0{,}466\,593\,31\cdot10^{-1}$	$0{,}622\,764\,18\cdot10^{-1}$
5	$0{,}792\,117\,64\cdot10^{0}$	$-0{,}466\,596\,23\cdot10^{-1}$	$0{,}622\,764\,47\cdot10^{-1}$
6	$0{,}792\,117\,64\cdot10^{0}$	$-0{,}466\,596\,36\cdot10^{-1}$	$0{,}622\,764\,48\cdot10^{-1}$
7	$0{,}792\,117\,64\cdot10^{0}$	$-0{,}466\,596\,37\cdot10^{-1}$	$0{,}622\,764\,48\cdot10^{-1}$

Продолжение

n	$x_4^{(n)}$	$x_5^{(n)}$
0	$-0{,}100\,000\,00\cdot10^{-1}$	$-0{,}130\,597\,01\cdot10^{0}$
1	$-0{,}910\,007\,84\cdot10^{-1}$	$-0{,}919\,157\,67\cdot10^{-1}$
2	$-0{,}930\,257\,47\cdot10^{-1}$	$-0{,}911\,197\,24\cdot10^{-1}$
3	$-0{,}931\,146\,91\cdot10^{-1}$	$-0{,}910\,899\,98\cdot10^{-1}$
4	$-0{,}931\,169\,88\cdot10^{-1}$	$-0{,}910\,889\,88\cdot10^{-1}$
5	$-0{,}931\,170\,87\cdot10^{-1}$	$-0{,}910\,889\,57\cdot10^{-1}$
6	$-0{,}931\,170\,89\cdot10^{-1}$	$-0{,}910\,889\,56\cdot10^{-1}$
7	$-0{,}931\,170\,89\cdot10^{-1}$	$-0{,}910\,889\,56\cdot10^{-1}$

$$x_i^{(6)}=x_i^{(7)} \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5). \tag{3}$$

Следовательно,

$$x_1=0{,}79211764\cdot10^{0};$$
$$x_2=-0{,}46659637\cdot10^{-1};$$
$$x_3=0{,}62276448\cdot10^{-1};$$
$$x_4=-0{,}93117089\cdot10^{-1};$$
$$x_5=-0{,}91088956\cdot10^{-1}.$$

Упражнения

Решить системы уравнений методом исключения (методом Гаусса) и методом итераций (методом Зейделя) с тремя значащими цифрами:

1. $$\begin{aligned}
8{,}03x_1-0{,}43x_2+0{,}32x_3+0{,}58x_4+0{,}3x_5&=7{,}3;\\
0{,}43x_1+8{,}95x_2+0{,}41x_3-0{,}50x_4+0{,}14x_5&=-2{,}6;\\
0{,}81x_1+0{,}29x_2+13{,}10x_3+0{,}25x_4+0{,}54x_5&=-1{,}20;\\
1{,}05x_1+0{,}02x_2+1{,}00x_3+9{,}50x_4+0{,}7x_5&=0{,}15;\\
0{,}30x_1+0{,}85x_2+0{,}19x_3+0{,}40x_4+9{,}75x_5&=1{,}55.
\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}
7{,}94x_1+0{,}34x_2-0{,}23x_3+0{,}58x_4+0{,}40x_5&=-0{,}68;\\
0{,}34x_1+8{,}58x_2+0{,}14x_3+0{,}70x_4+0{,}14x_5&=-0{,}63;\\
0{,}18x_1-0{,}92x_2+10{,}30x_3-0{,}54x_4+0{,}45x_5&=2{,}15;\\
0{,}85x_1+0{,}32x_2+1{,}60x_3+9{,}12x_4-0{,}69x_5&=-0{,}14;\\
0{,}30x_1+0{,}85x_2+0{,}91x_3+0{,}40x_4+7{,}68x_5&=-0{,}45.
\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}
8{,}16x_1-0{,}34x_2+0{,}02x_3+1{,}02x_4+0{,}50x_5&=-7{,}20;\\
0{,}34x_1-8{,}41x_2+0{,}14x_3+1{,}02x_4+0{,}75x_5&=0{,}60;\\
0{,}18x_1-0{,}92x_2+9{,}10x_3+0{,}25x_4-0{,}40x_5&=-2{,}19;\\
1{,}05x_1+0{,}02x_2+1{,}00x_3+10{,}09x_4+0{,}70x_5&=0{,}10;\\
0{,}33x_1+0{,}85x_2-0{,}91x_3+0{,}04x_4-8{,}04x_5&=-1{,}05.
\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}
9{,}91x_1 - 0{,}43x_2 + 1{,}02x_3 + 0{,}58x_4 + 0{,}38x_5 &= 0{,}68;\\
0{,}14x_1 + 8{,}75x_2 + 0{,}14x_3 - 0{,}67x_4 + 0{,}15x_5 &= -8{,}04;\\
0{,}18x_1 - 0{,}92x_2 + 14{,}30x_3 + 0{,}24x_4 + 0{,}97x_5 &= -2{,}54;\\
0{,}58x_1 + 0{,}32x_2 - 0{,}59x_3 + 9{,}04x_4 + 0{,}29x_5 &= 0{,}24;\\
0{,}30x_1 + 0{,}58x_2 + 0{,}19x_3 - 0{,}48x_4 + 10{,}00x_5 &= 0{,}54.
\end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned}
6{,}99x_1 + 0{,}34x_2 - 0{,}81x_3 + 0{,}48x_4 + 0{,}24x_5 &= -0{,}86;\\
0{,}14x_1 - 7{,}05x_2 + 0{,}14x_3 + 0{,}67x_4 - 0{,}51x_5 &= -8{,}04;\\
0{,}81x_1 + 0{,}92x_2 + 10{,}80x_3 - 0{,}42x_4 - 0{,}79x_5 &= -0{,}25;\\
0{,}58x_1 + 0{,}32x_2 + 0{,}61x_3 + 10{,}81x_4 + 0{,}93x_5 &= -0{,}37;\\
0{,}43x_1 + 0{,}48x_2 + 0{,}29x_3 - 0{,}51x_4 + 12{,}04x_5 &= -0{,}31.
\end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned}
7{,}33x_1 + 0{,}43x_2 - 0{,}23x_3 + 0{,}58x_4 + 0{,}30x_5 &= 6{,}8;\\
0{,}43x_1 + 8{,}95x_2 + 0{,}41x_3 + 0{,}5x_4 + 0{,}41x_5 &= -6{,}2;\\
0{,}81x_1 - 0{,}92x_2 + 10{,}30x_3 + 0{,}25x_4 - 0{,}51x_5 &= 2{,}10;\\
1{,}05x_1 + 0{,}22x_2 - 1{,}04x_3 + 8{,}07x_4 + 0{,}69x_5 &= 0{,}51;\\
0{,}3x_1 + 0{,}58x_2 + 0{,}91x_3 - 0{,}4x_4 + 7{,}95x_5 &= 0{,}20.
\end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned}
7{,}09x_1 - 0{,}15x_2 + 1{,}42x_3 + 0{,}5x_4 - 0{,}14x_5 &= 8{,}11;\\
-0{,}11x_1 + 8{,}1x_2 - 2{,}4x_3 - 0{,}0124x_4 - 0{,}171x_5 &= -0{,}58;\\
-1{,}2x_1 + 0{,}2x_2 + 7{,}99x_3 + 0{,}0034x_4 + 0x_5 &= 1{,}23;\\
0x_1 + 0{,}47x_2 + 0{,}078x_3 + 2{,}34x_4 - 0{,}55x_5 &= 2{,}3;\\
0{,}0275x_1 - 2{,}105x_2 - 0{,}0014x_3 + 1{,}7x_4 + 10{,}81x_5 &= 0{,}14.
\end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned}
6{,}09x_1 + 0{,}15x_2 - 1{,}42x_3 - 0{,}5x_4 - 0{,}14x_5 &= 8{,}11;\\
-0{,}11x_1 + 8{,}1x_2 - 2{,}4x_3 - 0{,}0124x_4 - 0{,}171x_5 &= -0{,}58;\\
-1{,}2x_1 + 0{,}2x_2 + 7{,}99x_3 + 0{,}0034x_4 + 0x_5 &= 1{,}23;\\
0x_1 + 0{,}47x_2 + 0{,}078x_3 + 12{,}34x_4 - 0{,}55x_5 &= 2{,}3;\\
0{,}0275x_1 - 2{,}105x_2 - 0{,}0014x_3 + 1{,}7x_4 + 10{,}81x_5 &= 0{,}14.
\end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned}
&+10{,}30x_1+0{,}43x_2-0{,}20x_3-1{,}20x_4+0{,}30x_5=-7{,}3;\\
&+0{,}43x_1-8{,}59x_2-0{,}41x_3+0{,}5x_4-0{,}41x_5=-6{,}2;\\
&+0{,}81x_1+0{,}29x_2+15{,}01x_3-0{,}25x_4+0{,}45x_5=2{,}10\\
&1{,}05x_1-0{,}02x_2-1{,}00x_3+10{,}50x_4-0{,}7x_5=0{,}1;\\
&0{,}3x_1+0{,}85x_2+0{,}19x_3+0{,}4x_4-9{,}50x_5=1{,}05
\end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned}
&11{,}40x_1+0{,}34x_2-0{,}32x_3+1{,}20x_4+0{,}34x_5=7{,}40;\\
&0{,}34x_1+5{,}98x_2+0{,}14x_3+0{,}7x_4+0{,}14x_5=-6{,}10;\\
&0{,}18x_1+0{,}92x_2+13{,}20x_3-0{,}25x_4-0{,}54x_5=-2{,}10;\\
&1{,}06x_1+0{,}22x_2-1{,}00x_3+9{,}49x_4+0{,}4x_5=0{,}10;\\
&0{,}30x_1+0{,}58x_2+0{,}91x_3-0{,}3x_4-9{,}49x_5=1{,}50.
\end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned}
&9{,}06x_1+0{,}34x_2-0{,}02x_3-1{,}02x_4-0{,}5x_5=7{,}3;\\
&0{,}34x_1-8{,}41x_2+0{,}14x_3+1{,}05x_4-0{,}3x_5=0{,}6;\\
&1{,}08x_1-0{,}92x_2+19{,}01x_3+0{,}25x_4-0{,}45x_5=2{,}10;\\
&1{,}05x_1-0{,}02x_2+1{,}00x_3+10{,}00x_4+0{,}7x_5=-0{,}1;\\
&0{,}30x_1-0{,}58x_2+0{,}91x_3+0{,}04x_4-8{,}04x_5=1{,}05.
\end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned}
&-9{,}48x_1+0{,}43x_2-0{,}23x_3+1{,}20x_4-0{,}43x_5=-4{,}70;\\
&0{,}34x_1+6{,}89x_2+0{,}41x_3+0{,}14x_4+0{,}20x_5=6{,}19;\\
&0{,}18x_1+0{,}92x_2+10{,}02x_3+0{,}25x_4+0{,}45x_5=2{,}91;\\
&1{,}06x_1-0{,}22x_2-1{,}00x_3+9{,}94x_4-0{,}41x_5=-0{,}1;\\
&0{,}3x_1+0{,}85x_2-0{,}91x_3+0{,}43x_4+8{,}94x_5=1{,}50.
\end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned}
&19{,}04x_1+0{,}43x_2-1{,}02x_3+0{,}85x_4+0{,}38x_5=0{,}86;\\
&0{,}14x_1+7{,}85x_2+0{,}41x_3+0{,}70x_4+0{,}14x_5=6{,}3;\\
&0{,}18x_1+0{,}29x_2+10{,}34x_3+0{,}45x_4+0{,}54x_5=2{,}05;\\
&0{,}58x_1-0{,}23x_2+0{,}96x_3+9{,}02x_4-0{,}69x_5=0{,}14;\\
&0{,}3x_1-0{,}78x_2+0{,}19x_3-0{,}48x_4+8{,}00x_5=0{,}54.
\end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned}
&9{,}04x_1-0{,}34x_2+0{,}23x_3+0{,}85x_4+0{,}38x_5=-0{,}86;\\
&0{,}14x_1+7{,}85x_2+0{,}41x_3+0{,}70x_4+0{,}14x_5=0{,}36;\\
&0{,}18x_1+0{,}92x_2-10{,}30x_3+0{,}54x_4-0{,}45x_5=-2{,}15;\\
&0{,}85x_1+0{,}23x_2+1{,}06x_3-9{,}02x_4+0{,}96x_5=0{,}41;\\
&0{,}3x_1+0{,}85x_2+0{,}19x_3-0{,}42x_4+8{,}06x_5=0{,}54.
\end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned}
&6{,}18x_1 - 0{,}34x_2 + 0{,}02x_3 + 1{,}02x_4 + 0{,}50x_5 = 1{,}20;\\
&0{,}34x_1 - 8{,}14x_2 + 0{,}14x_3 + 1{,}22x_4 - 0{,}75x_5 = 0{,}60;\\
&0{,}18x_1 - 0{,}92x_2 + 9{,}11x_3 + 0{,}25x_4 + 0{,}40x_5 = -2{,}10;\\
&1{,}00x_1 + 0{,}12x_2 + 1{,}02x_3 + 10{,}10x_4 + 0{,}78x_5 = 0{,}10;\\
&0{,}33x_1 + 0{,}85x_2 - 0{,}91x_3 + 0{,}04x_4 - 8{,}04x_5 = 1{,}05.
\end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned}
&-11{,}8342x_1 + 0x_2 + 0{,}4242x_3 - 0{,}4199x_4 - 1{,}2424x_5 = 2{,}3113;\\
&0{,}8113x_1 + 10{,}5x_2 - 0{,}0383x_3 + 1{,}213x_4 + 0{,}1541x_5 = 0{,}8113;\\
&2{,}0005x_1 - 1{,}8115x_2 - 15{,}3x_3 - 0{,}8181x_4 - 0{,}0004x_5 = -2{,}3118;\\
&-0{,}8117x_1 + 1{,}1342x_2 - 0{,}8713x_3 + 13{,}599x_4 + 0{,}005x_5 = 0{,}9311;\\
&2{,}0381x_1 - 0{,}0078x_2 + 0{,}1314x_3 - 0{,}0057x_4 + 11{,}2195x_5 = -0{,}05.
\end{aligned}$$

Ответы.

1. $x_1 = 0{,}896$; $x_2 = -0{,}334$; $x_3 = -0{,}145$; $x_4 = -0{,}0796$; $x_5 = 0{,}167$.

2. $x_1 = -0{,}0703$; $x_2 = -0{,}0698$; $x_3 = 0{,}205$; $x_4 = -0{,}0360$; $x_5 = -0{,}0760$.

6. $x_1 = 0{,}975$; $x_2 = -0{,}742$; $x_3 = 0{,}0635$; $x_4 = -0{,}0381$; $x_5 = 0{,}0333$.

7. $x_1 = 1{,}015$; $x_2 = 0{,}031$; $x_3 = 0{,}305$; $x_4 = 0{,}936$; $x_5 = -0{,}1307$.

11. $x_1 = 0{,}792$; $x_2 = -0{,}0467$; $x_3 = 0{,}0623$; $x_4 = -0{,}0931$; $x_5 = -0{,}0911$.

12. $x_1 = 0{,}523$; $x_2 = 0{,}859$; $x_3 = 0{,}199$; $x_4 = -0{,}0231$; $x_5 = 0{,}0899$.

§ 48. РЕШЕНИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ

Найти методом итераций с пятью значащими цифрами корни уравнения:

$$\cos x - 2x = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) представим в виде

$$x = F(x),$$

т. е.

$$x = \frac{\cos x}{2}.$$

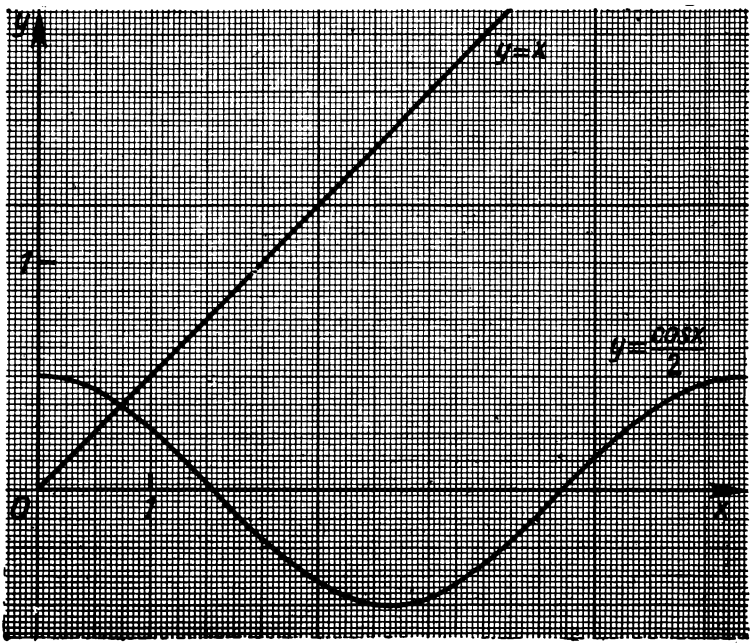


Рис. 3

Из графика (рис. 3) видно, что заданное уравнение (1) имеет один корень, находящийся в интервале:

$$0 < x < 1. \qquad (2)$$

Вычисление корня методом итераций производится по формуле:

$$x_{n+1} = F(x_n).$$

На отрезке, где находится корень,

$$|F'(x)| < 1.$$

Следовательно, процесс итераций сходится.

Пусть $x_0 = 0{,}4$, тогда

n	$F(x_{n-1}) = \frac{\cos x_{n-1}}{2}$
0	0,4
1	0,46053
2	0,44791
3	0,45068
4	0,45009
5	0,45020
6	0,45018
7	0,45018

$x_6 = x_7$. Следовательно, $x = 0{,}45018$.

Упражнения

Вычислить методом итераций один действительный корень следующих уравнений (с тремя значащими цифрами).

Замечание. Разрешить данные уравнения относительно x в первой степени. Положить $x_0 = 0$.

1. $x^3 - 0{,}0266x^2 + 4{,}3048x + 0{,}9533 = 0$.
2. $x^3 + 2x^2 - 13x - 7 = 0$.
3. $x^3 + 3x^2 + 12x + 5 = 0$.
4. $x^3 - 7x - 7 = 0$.
5. $2x^4 + 16x^3 - x^2 - 74x + 36 = 0$.
6. $x^4 + 4x - 2 = 0$.
7. $x^4 - 2x^3 - x^2 - 9x + 1 = 0$.
8. $x^{\sqrt{2}} + 5\sqrt{2}\,x = 2{,}5$.
9. $4x + \sin x - \frac{1}{3}x^3 + 0{,}9 = 0$.
10. $\sin x - 4x + 1 = 0$.
11. $7\sqrt{2x} + 35x - 14 \sin x - 2 = 0$.
12. $\cos x - 5x + 0{,}1 = 0$.
13. $x - 0{,}5 \sin x + 0{,}3 = 0$.
14. $3x - \cos x - 1 = 0$.
15. $3x + 0{,}1 \ln(x + 2) - 0{,}8 = 0$.

Ответы.

1. $x = -0{,}219$.
2. $x = -0{,}509$.
3. $x = -0{,}462$.
4. $x = -1{,}357$.
5. $x = 0{,}514$.
6. $x = 0{,}486$.
7. $x = 0{,}1095$.
8. $x = 0{,}325$.
9. $x = -0{,}1806$.
10. $x = 0{,}331$.
11. $x = 0{,}0233$.
12. $x = 0{,}215$.
13. $x = -0{,}570$.
14. $x = 0{,}607$.
15. $x = 0{,}240$.

§ 49. РЕШЕНИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КАСАТЕЛЬНЫХ (МЕТОД НЬЮТОНА)

По методу Ньютона вычислить действительные корни уравнения

$$x^3 - x - 4 = 0 \qquad (1)$$

с пятью значащими цифрами.

Как видно из графика (рис. 4), уравнение (1) имеет один действительный корень, лежащий в интервале:

$$1 < x < 2.$$

Уточним это значение до требуемой точности по итерационной формуле Ньютона:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},$$

положив $x_0 = 2$.

В нашем случае

$$f(x) = x^3 - x - 4, \quad f'(x) = 3x^2 - 1.$$

x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
2	2	11
1,81881	0,19794	8,92421
1,79663	0,00267	8,68364
1,79632	0,00001	8,68030
1,79632	0,00000	

$x_3 = x_4$. Следовательно, $x = 1{,}79632$.

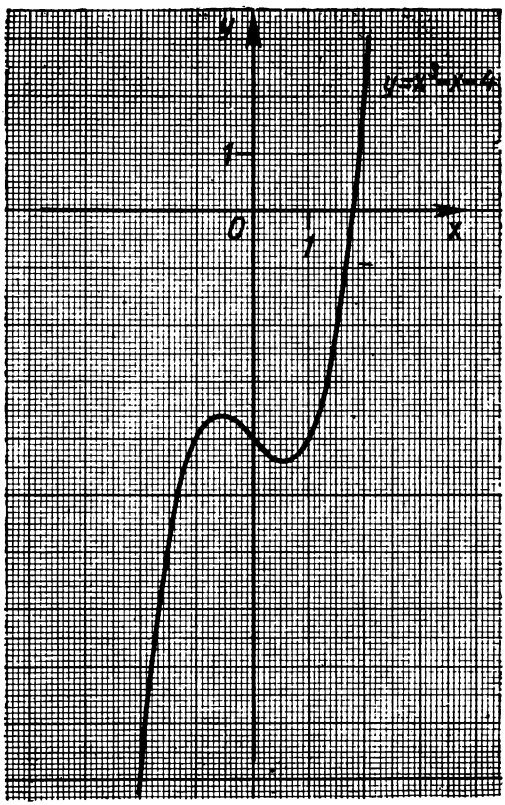


Рис. 4

Упражнения

Вычислить методом Ньютона два наименьших положительных корня следующих уравнений (с тремя значащими цифрами):

1. $\operatorname{tg} x = -x$.
2. $\operatorname{tg} x = x$.
3. $x \operatorname{tg} x = 1$.
4. $\operatorname{tg} x = 2x$.
5. $x \operatorname{tg} x = 2$.
6. $e^x - 3x = 0$.
7. $2^x - 4x = 0$.
8. $\frac{x}{3} - \ln x = 0$.
9. $x^{1,8632} - 5,2171x + 2,1167 = 0$.
10. $x^4 - 0,5x^2 - 6x + 0,5 = 0$.
11. $x^4 - 6x^3 - 113x^2 + 504x + 243 = 0$.
12. $x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 14x + 4 = 0$.
13. $x^4 + 16x^3 + 11x^2 - 224x + 105 = 0$.
14. $x^4 + 2x^3 - 9,5x^2 - 6x + 1 = 0$.
15. $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 3x + 4 = 0$.

Ответы.

1. $x_1=2{,}03$;	$x_2=4{,}91$.	9. $x_1=0{,}449$;	$x_2=6{,}27$.
2. $x_1=4{,}49$;	$x_2=7{,}72$.	10. $x_1=0{,}0828$;	$x_2=1{,}883$.
3. $x_1=0{,}860$;	$x_2=3{,}43$.	11. $x_1=4{,}66$;	$x_2=11{,}81$.
4. $x_1=1{,}166$;	$x_2=4{,}60$.	12. $x_1=0{,}264$;	$x_2=3{,}89$.
5. $x_1=1{,}077$;	$x_2=3{,}64$.	13. $x_1=0{,}489$;	$x_2=2{,}87$.
6. $x_1=0{,}619$;	$x_2=1{,}51$.	14. $x_1=0{,}1376$;	$x_2=2{,}56$.
7. $x_1=0{,}310$;	$x_2=4{,}00$.	15. $x_1=1{,}388$;	$x_2=3{,}21$.
8. $x_1=1{,}857$;	$x_2=4{,}54$.		

§ 50. РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКИХ СТЕПЕНЕЙ МЕТОДОМ ЛОБАЧЕВСКОГО (СЛУЧАЙ РАЗЛИЧНЫХ ПО МОДУЛЮ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ КОРНЕЙ)

Метод Лобачевского нахождения корней алгебраических уравнений высокого порядка (случай различных по модулю действительных корней) заключается в том, что по заданному уравнению

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0 \qquad (1)$$

строится новое уравнение:

$$\begin{gathered}a_0^2y^n+(a_1^2-2a_0a_2)\,y^{n-1}+(a_2^2-2a_1a_3+2a_0a_4)\,y^{n-2}+\\+(a_3^2-2a_2a_4+2a_1a_5-2a_0a_6)\,y^{n-3}+\ldots+(a_k^2-2a_{k-1}a_{k+1}+\\+2a_{k-2}a_{k+2}-2a_{k-3}a_{k+3}+\ldots)\,y^{n-k}+\ldots+a_n^2=0, \qquad (2)\end{gathered}$$

корни которого являются квадратами корней уравнения (1). Коэффициенты нового уравнения вычисляются с числом значащих цифр на одну-две больше количества значащих цифр, с которыми требуется определить искомые корни.

Аналогично по уравнению (2) строится третье уравнение, корни которого являются четвертыми степенями корней уравнения (1). Так процесс продолжается до тех пор, пока все коэффициенты следующего уравнения практически будут квадратами коэффициентов предыдущего, т. е. все удвоенные произведения коэффициентов полученного уравнения окажутся за пределами рассматриваемого числа значащих цифр. После этого находим модули корней уравнения по формулам:

$$|x_1| \approx A_1^{\frac{1}{m}}, \quad |x_2| \approx \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\frac{1}{m}}, \ldots, |x_n| = \left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad (3)$$

где $m = 2^k$, k — число преобразований уравнения, а A_l — коэффициент при l-й степени преобразованного уравнения. Знаки корней определяются проверкой путем подстановки их в исходное уравнение (1).

Найти с тремя значащими цифрами корни уравнения:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0. \quad (4)$$

Преобразование данного уравнения проведем по следующей схеме:

№ преобразования	Коэффиц. при x^3	Коэффициент при x^2	Коэффициент при x	Свободный член
0	1	-2	-5	6
1	1	$(-2)^2 - 2\cdot 1\cdot(-5) = 14$	$(-5)^2 - 2(-2)\times 6 = 49$	$6^2 = 36$
2	1	$14^2 - 2\cdot 1\cdot 49 = 98$	$49^2 - 2\cdot 14\cdot 36 = 1393$	$36^2 = 1296$
3	1	$98^2 - 2\cdot 1\cdot 1393 = 6818$	$1393^2 - 2\cdot 6818\times 1296 = 0{,}16864\times 10^7$	$1296^2 = 0{,}16796\times 10^7$
4	1	$6818^2 - 2\cdot 1\times 0{,}16864\cdot 10^7 = 0{,}43112\cdot 10^8$	$(0{,}16864\cdot 10^7)^2 - 2\cdot 6818\cdot 0{,}16796\times 10^7 = 0{,}28211\cdot 10^{13}$	$(0{,}16796\cdot 10^7)^2 = 0{,}28211\cdot 10^{13}$
5	1	$(0{,}43112\cdot 10^8)^2 - 2\cdot 1\cdot 0{,}28211\times 10^{13} = 0{,}18530\times 10^{16}$	$(0{,}28211\cdot 10^{13})^2 - 2\cdot 0{,}43112\cdot 10^8\times 0{,}28211\cdot 10^{13} = 0{,}79586\cdot 10^{25}$	$(0{,}28211\cdot 10^{13})^2 = 0{,}79587\cdot 10^{25}$
6	1	$(0{,}18530\cdot 10^{16})^2 - 2\cdot 1\cdot 0{,}79586\times 10^{25} = 0{,}34337\times 10^{31}$	$(0{,}79586\cdot 10^{25})^2 - 2\cdot 0{,}18530\cdot 10^{16}\times 0{,}79587\cdot 10^{25} = 0{,}63339\cdot 10^{50}$	$(0{,}78587\cdot 10^{25})^2 = 0{,}63341\cdot 10^{50}$
7	1	$(0{,}34337\cdot 10^{31})^2 - 2\cdot 1\cdot 0{,}63339\times 10^5 = 0{,}11790\cdot 10^{62}$	$(0{,}63339\cdot 10^{50})^2 - 2\cdot 0{,}34337\cdot 10^{31}\times 0{,}63341\cdot 10^{50} = 0{,}40118\cdot 10^{100}$	$(0{,}63341\cdot 10^{50})^2 = 0{,}40121\cdot 10^{100}$

Как видно из схемы, коэффициенты 7-го уравнения являются с требуемой точностью квадратами коэффициен-

тов 6-го уравнения. Следовательно, $m = 2^7 = 128$. Далее определяем абсолютные величины корней по формулам (3). Для нашего случая:

$$A_1 = 0{,}11790 \cdot 10^{62}; \qquad A_2 = 0{,}40118 \cdot 10^{100};$$
$$|x_1| = (0{,}11790 \cdot 10^{62})^{1/128}; \qquad |x_2| = (0{,}34027 \cdot 10^{39})^{1/128};$$
$$\lg|x_1| = 0{,}47712; \qquad \lg|x_2| = 0{,}30103;$$
$$|x_1| \approx 3. \qquad |x_2| \approx 2.$$

$$A_3 = 0{,}40121 \cdot 10^{100};$$
$$|x_3| = (0{,}10000 \cdot 10^{1})^{1/128};$$
$$\lg|x_3| = 0;$$
$$|x_3| \approx 1.$$

Путем подстановки их в уравнение (4) определяем знаки корней и получаем ответ:

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 1.$$

Упражнения

Методом Лобачевского найти корни уравнений (с тремя значащими цифрами):

1. $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0.$
2. $x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 26x - 24 = 0.$
3. $x^4 + 0{,}9x^3 - 2{,}12x^2 + 0{,}18x + 0{,}04 = 0.$
4. $x^4 - 0{,}9x^3 - 2{,}12x^2 - 0{,}18x + 0{,}04 = 0.$
5. $x^4 + 3{,}2x^3 + 2{,}52x^2 + 0{,}16x - 0{,}16 = 0.$
6. $x^4 + 1{,}5x^3 - 10{,}5x^2 + x + 12 = 0.$
7. $x^4 - 0{,}5x^3 - 7{,}66x^2 + 8{,}84x + 0{,}96 = 0.$
8. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0.$
9. $x^3 + 1{,}5x^2 - 1{,}5x - 1 = 0.$
10. $x^3 - 13x + 12 = 0.$
11. $x^3 - 0{,}7x^2 - 2{,}3x - 0{,}6 = 0.$
12. $x^3 - 2{,}1x^2 - 2{,}8x + 0{,}3 = 0.$
13. $x^3 + 3{,}5x^2 - 5x - 12 = 0.$
14. $x^3 + 4{,}4x^2 + 5{,}03x + 0{,}46 = 0.$
15. $x^3 + 1{,}7x^2 + 0{,}82x + 0{,}12 = 0.$

Ответы.

1. $x_1 \approx 1$;	$x_2 \approx 3$;	$x_3 \approx -4$;	$x_4 \approx -2$.
3. $x_1 \approx 1$;	$x_2 \approx -0{,}1$;	$x_3 \approx 0{,}2$;	$x_4 \approx -2$.
4. $x_1 \approx -0{,}2$;	$x_2 \approx 0{,}1$;	$x_3 \approx -1$;	$x_4 \approx 2$.
5. $x_1 \approx -1$;	$x_2 \approx -0{,}4$;	$x_3 \approx 0{,}2$;	$x_4 \approx -2$.
6. $x_1 \approx 1{,}5$;	$x_2 \approx 2$;	$x_3 \approx -4$;	$x_4 \approx -1$.
7. $x_1 \approx 1{,}6$;	$x_2 \approx -0{,}1$;	$x_3 \approx 2$;	$x_4 \approx -3$.

§ 51. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ПО ФОРМУЛАМ ТРАПЕЦИЙ И СИМПСОНА

Формула трапеций для вычисления определенного интеграла имеет вид:

$$\int_{x_0}^{x_n} y dx \approx h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right). \qquad (1)$$

Вычислить по этой формуле интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

с шагом интегрирования $h = 0{,}05$ (с четырьмя значащими цифрами).

Вычисления проводим с двумя запасными знаками по следующей схеме:

x_n	$y_n = \frac{1}{1+x_n^2}$	x_n	$y_n = \frac{1}{1+x_n^2}$
0	1	0,55	0,767754
0,05	0,997506	0,60	0,735294
0,10	0,990099	0,65	0,702988
0,15	0,977995	0,70	0,671141
0,20	0,961538	0,75	0,640000
0,25	0,941176	0,80	0,609756
0,30	0,917431	0,85	0,580552
0,35	0,890869	0,90	0,552486
0,40	0,862069	0,95	0,525624
0,45	0,831601	1,00	0,500000
0,50	0,800000		

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0{,}785\,294.$$

Вычислим тот же интеграл с шагом, в два раза меньшим:

$$h_1 = \frac{h}{2} = 0{,}025.$$

x_n	$y_n = \frac{1}{1+x_n^2}$	x_n	$y_n = \frac{1}{1+x_n^2}$
0	1	0,525	0,783929
0,025	0,999375	0,550	0,767754
0,050	0,997506	0,575	0,751527
0,075	0,994406	0,600	0,735294
0,100	0,990099	0,625	0,719101
0,125	0,984615	0,650	0,702988
0,150	0,977995	0,675	0,686990
0,175	0,970285	0,700	0,671141
0,200	0,961538	0,725	0,655469
0,225	0,951814	0,750	0,640000
0,250	0,941176	0,775	0,624756
0,275	0,929692	0,800	0,609756
0,300	0,917431	0,825	0,595017
0,325	0,904466	0,850	0,580552
0,350	0,890869	0,875	0,566372
0,375	0,876712	0,900	0,552486
0,400	0,862069	0,925	0,538902
0,425	0,847009	0,950	0,525624
0,450	0,831601	0,975	0,512656
0,475	0,815910	1,000	0,500000
0,500	0,800000		

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0{,}785372.$$

Известно точное значение заданного интеграла с шестью знаками:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = 0{,}785398.$$

Сравнивая полученные нами по приближенной формуле значения интеграла с его точным значением, мы видим, что результат вычисления с меньшим шагом ближе к истинному значению интеграла.

Вышезаданный интеграл вычислим по формуле Симпсона с шагом $h = 0{,}025$:

$$\int_{x_0}^{x_n} y\,dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \\ + 2y_4 + \ldots + 4y_{2n-1} + y_{2n}). \qquad (2)$$

Воспользовавшись только что полученной таблицей значений подынтегральной функции и подставив эти значения в формулу (2), имеем:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0{,}785\,398.$$

Полученное по формуле Симпсона значение интеграла совпало с точным значением в пределах шести значащих цифр. Как известно, формула Симпсона для вычисления определенных интегралов является более точной.

Упражнения

По формулам трапеций и Симпсона вычислить с точностью до трех значащих цифр следующие интегралы (промежуточные вычисления проводить с пятью значащими цифрами):

h—шаг интегрирования.

1. $\int_0^2 x \sin x\, dx;\ h=0{,}2.$
2. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4};\ h=0{,}1.$
3. $\int_0^{1{,}2} \sqrt{1+x^3}\, dx;\ h=0{,}2.$
4. $\int_0^1 x^2 \sin 3x\, dx;\ h=0{,}1.$
5. $\int_1^3 \frac{dx}{x};\ h=0{,}5.$
6. $\int_0^2 \sqrt{4x-x^2}\, dx;\ h=0{,}2.$
7. $\int_0^4 e^{2x+1}\, dx;\ h=0{,}5.$
8. $\int_0^2 e^{-x^2}\, dx;\ h=0{,}1.$
9. $\int_1^3 x^2 \operatorname{sh} x\, dx;\ h=0{,}2.$
10. $\int_1^4 x\sqrt{3+4x}\, dx;\ h=0{,}2.$
11. $\int_0^4 \frac{dx}{(25-x^2)^{3/2}};\ h=0{,}5.$
12. $\int_3^7 x^2 \ln x\, dx;\ h=0{,}5.$
13. $\int_0^1 \frac{dx}{1+(x+3)^2};\ h=0{,}1.$
14. $\int_0^{0{,}8} \operatorname{ch} x^2\, dx;\ h=0{,}1.$
15. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\, dx;\ h=0{,}1.$
16. $\int_0^1 \ln(1+x^2)\, dx;\ h=0{,}1.$

17. $\int\limits_{0,2}^{1,2} \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}}$; $h=0,1$.

18. $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$; $h=0,1$.

19. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$; $h=0,2$.

20. $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{1-x^2}\,dx$; $h=0,2$.

21. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$; $h=0,2$.

22. $\int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{x(1+\cos x)}$; $h=0,2$.

23. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{e^{2x}-e^{x}}$; $h=0,1$.

24. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\cos x}{1+x}\,dx$; $h=0,1$.

Ответы.

Значения интегралов, вычисленных по формуле трапеций:

3. 1,422.	15. 0,271.
6. 3,10.	18. 0,802.
9. 48,8.	21. 0,411.
12. 178,0.	24. 0,601.

Ответы.

Значения интегралов, вычисленных по формуле Симпсона:

3. 1,417.	15. 0,272.
6. 3,13.	18. 0,802.
9. 48,4.	21. 0,409.
12. 177,5.	24. 0,601.

§ 52. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ЭЙЛЕРА И МЕТОДОМ ЭЙЛЕРА С ПЕРЕСЧЕТОМ

Составить таблицу решения уравнения

$$y' = f(x,y) = \frac{y-x}{y+x}$$

на отрезке [0; 0,2] при начальном условии $y|_{x=0}=1$ с шагом $h=0,02$ с четырьмя значащими цифрами. Вычисления проведем с двумя запасными знаками.

При интегрировании применим формулу Эйлера:

$$y_n = y_{n-1} + hy'_{n-1}$$

x_n	y_n	$y'_n = \frac{y_n - x_n}{y_n + x_n}$
0	1,000 000	1,000 000
0,02	1,020 000	0,961 538
0,04	1,039 231	0,925 873
0,06	1,057 748	0,892 641
0,08	1,075 601	0,861 544
0,10	1,092 832	0,832 332
0,12	1,109 479	0,804 795
0,14	1,125 575	0,778 754
0,16	1,141 150	0,754 064
0,18	1,156 231	0,730 586
0,20	1,170 843	0,708 209

Проинтегрируем вышезаданное дифференциальное уравнение по формуле Эйлера с пересчетом:

$$y_n = \bar{y}_{n-1} + h\bar{y}'_{n-1},$$

$$\bar{y}_n = \bar{y}_{n-1} + \frac{h}{2}(\bar{y}'_{n-1} + y'_n),$$

где

$$\bar{y}'_{n-1} = f(x_{n-1}, \bar{y}_{n-1}),$$

$$y'_n = f(x_n, y_n).$$

x_n	y_n	$\bar{y}_n$	y'_n	$\bar{y}'_n$
0		1,000000		1,000000
0,02 0,02	1,020000	1,019615	0,961538	0,961524
0,04 0,04	1,038845	1,038489	0,925847	0,925822
0,06 0,06	1,057005	1,056673	0,892570	0,892538
0,08 0,08	1,074524	1,074213	0,861415	0,861376

x_n	y_n	$\bar{y}_n$	y'_n	$\bar{y}'_n$
0,10 0,10	1,091441	1,091148	0,832136	0,832095
0,12 0,12	1,107790	1,107514	0,804527	0,804483
0,14 0,14	1,123604	1,123343	0,778411	0,778366
0,16 0,16	1,138910	1,138663	0,753640	0,753593
0,18 0,18	1,153734	1,153500	0,730081	0,730034
0,20 0,20	0,168101	1,167877	0,707624	

Упражнения

1. Применяя формулу Эйлера, составить таблицу решения для данных уравнений с шагом $h=0{,}1$ на отрезке [0; 1] с пятью значащими цифрами.

2. По формуле Эйлера с пересчетом уточнить решения этих уравнений:

1. $y'=x^2+\sqrt{2+y^2}$; $y|_{x=0}=0$.

2. $y'=x^3-\cos\frac{y}{2}$; $y|_{x=0}=0{,}2$.

3. $y'=\frac{x\sin y}{1+xy}$; $y|_{x=0}=1$.

4. $y'=\ln(x+2)+\frac{1}{y}$; $y|_{x=0}=1{,}5$.

5. $y'=e^x(1+y^2)$; $y|_{x=0}=2$.

6. $y'=\frac{\sqrt{1+y^2}}{1-x+2y}$; $y|_{x=0}=1$.

7. $y'=\frac{y^2+0{,}5}{xy-x^2+1}$; $y|_{x=0}=0$.

8. $y' = \frac{x^2 - 2y^2 + 0,3}{2xy + 1}$; $y|_{x=0} = 0$.

9. $y' = x\cos y - y^2 + 2x$; $y|_{x=0} = 0$.

10. $y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{1+x^2}$; $y|_{x=0} = 0$.

11. $y' = \frac{2y}{x+1} + (x+1)^2\sqrt{1+y}$; $y|_{x=0} = 1$.

12. $y' = \frac{1}{2}\sin(2x+y) - y\cos x$; $y|_{x=0} = 0,25$.

13. $y' = \frac{x + \sqrt{1+y^2}}{(1+x^2)^2}$; $y|_{x=0} = 0$.

14. $y' = 1 - \frac{(1-2x)y}{0,5+x^2}$; $y|_{x=0} = 0,5$.

15. $y' = \frac{1}{2}x^3e^x + 2y$; $y|_{x=0} = 1,5$.

§ 53. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РУНГЕ — КУТТА

Методом Рунге—Кутта получить решение дифференциального уравнения

$$y' = \sqrt{1-y^2}$$

на отрезке [0; 0,5] при начальном условии $y|_{x=0} = 0$ с шагом $h = 0,1$ с четырьмя значащими цифрами. Вычисления проведем с двумя запасными знаками.

Согласно методу Рунге—Кутта значение $y = y_1$ в точке $x_1 = x_0 + h$, являющееся решением дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y),$$

вычисляется с помощью следующих величин:

$$k_1 = f(x_0, y_0)\,h;$$
$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{k_1}{2}\right)h;$$
$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{k_2}{2}\right)h;$$
$$k_4 = f(x_0 + h,\ y_0 + k_3)\,h.$$

А именно при

$$x_1 = x_0 + h, \quad y_1 = y_0 + k,$$

где

$$k = \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4.$$

Вычисление значения y в следующей точке $x_2 = x_1 + h$ производится аналогичным образом и т. д. Интегрирование дифференциальных уравнений методом Рунге—Кутта сводится к вычислению по следующей схеме:

x	y	$y' = f(x, y)$	$k_i\ (i = 1, 2, 3, 4)$
1	2	3	4
x_0	y_0	$f(x_0, y_0)$	$k_1 = f(x_0, y_0)\,h$
$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_1}{2}$	$f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{k_1}{2}\right)$	$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{k_1}{2}\right)h$
$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_2}{2}$	$f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{k_2}{2}\right)$	$k_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{k_2}{2}\right)h$
$x_0 + h$	$y_0 + k_3$	$f(x_0 + h,\ y_0 + k_3)$	$k_4 = f(x_0 + h,\ y_0 + k_3)\,h$
$x_0 + h$	$y_0 + k$		

В данной схеме графа 4 обычно бывает не нужна, так как значение y_n в следующей точке $x_n = x_{n-1} + h$ на настольной вычислительной машине автоматически получают по величинам из графы 3. Так, при $x_1 = x_0 + h$

$$y_1 = y_0 + \left[\frac{1}{6}f(x_0, y_0) + \frac{1}{3}f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{k_1}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3}f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{k_2}{2}\right) + \frac{1}{6}f(x_0 + h,\ y_0 + k_3)\right]h.$$

Применим описанную выше схему вычисления к решению заданного примера.

x	y	$y' = \sqrt{1-y^2}$
0	0	1
0,05 0,05 0,10 0,10	0,050000 0,049937 0,998762 0,998334	0,998749 0,998752 0,995000 0,995004
0,15 0,15 0,20 0,20	0,149584 0,149271 0,198713 0,198669	0,988749 0,988796 0,980058 0,980067
0,25 0,25 0,30 0,30	0,247672 0,247111 0,295568 0,295520	0,968844 0,968987 0,955322 0,955337
0,35 0,35 0,40 0,40	0,343287 0,342482 0,389472 0,389418	0,939231 0,939524 0,921038 0,921061
0,45 0,45 0,50 0,50	0,435471 0,434428 0,479489 0,479425	0,900203 0,900706 0,877548

Упражнения

Применяя метод Рунге—Кутта, получить решение следующих дифференциальных уравнений с пятью значащими цифрами на отрезке [0; 1] с шагом $h = 0{,}2$:

1. $y' = x - y; \quad y|_{x=0} = 0.$
2. $y' = x + \cos\frac{y}{2}; \quad y|_{x=0} = 0{,}1.$
3. $y' = e^{x+y} + 3; \quad y|_{x=0} = 1.$

4. $y' = \sqrt{x+y} + 2x; \quad y|_{x=0} = 0{,}5.$

5. $y' = \sin\sqrt{x} + y; \quad y|_{x=0} = 0.$

6. $y' = \sqrt{x+y} + \cos x; \quad y|_{x=0} = 0{,}5.$

7. $y' = 1 - xy; \quad y|_{x=0} = 0.$

8. $y' = \ln(1+x) + y^2; \quad y|_{x=0} = 1.$

9. $y' = x^2 - y^2; \quad y|_{x=0} = 0.$

10. $y' = \frac{\sin x}{\sin^2 y + 1}; \quad y|_{x=0} = 0{,}5.$

11. $y' = \sqrt{1+xy}; \quad y|_{x=0} = 0.$

12. $y' = -0{,}1\frac{x}{y} + x^2 + y^2 - 1; \quad y|_{x=0} = 2.$

13. $y' = 1 - y^2; \quad y|_{x=0} = 0.$

14. $y' = \sqrt{x} + \sqrt{y} + 0{,}1; \quad y|_{x=0} = 0.$

15. $y' = \sqrt{1+y^3}; \quad y|_{x=0} = 0.$

ГЛАВА VIII

ПРОВЕРКА ПРАВИЛЬНОСТИ РАБОТЫ МАШИН

Перед началом работы каждую машину необходимо проверить на правильность счета. Ниже будут даны примеры для проверки правильности работы машин «Рейнметалл» и «Мерседес» при выполнении основных операций.

§ 54. ПРОВЕРКА МАШИНЫ «РЕЙНМЕТАЛЛ»

1. Проверка машины на холостых ходах

Установить машину в исходное положение (очистить основную и дополнительную клавиатуры, очистить счетчики результатов и оборотов, поставить каретку в крайнее левое положение), нажать на клавишу сложения (4) и сделать несколько ходов. При этом в счетчике результатов ничего не должно откладываться, а в счетчике оборотов получается количество оборотов.

2. Проверка передачи десятков в счетчике результатов и в счетчике оборотов

Установить единицу в младшем разряде клавиатуры и нажать клавишу (29). После чего нажать клавишу (5) и сделать один ход; во всех разрядах счетчика оборотов должны получиться девятки, а в счетчике результатов девятки получаются с 11-го по 1-й разряд. Затем нажать клавишу сложения (4) и сделать один ход. После этого во всех разрядах обоих счетчиков должны быть нули.

3. Проверка работы счетной части машины, а также работы машины на умножение и деление

Установить на основной клавиатуре множимое, а на дополнительной — множитель согласно прилагаемой таблице 4 и нажать клавишу умножения (6).

После окончания умножения в счетчике оборотов должен стоять множитель, установленный на дополнительной клавиатуре, а в счетчике результатов — произведение согласно таблице 4. После умножения, не гася счетчики оборотов и результатов и основной клавиатуры, отводим каретку в крайнее правое положение при помощи клавиши сдвига (32) и производим полуавтоматическое деление, в результате которого во всех разрядах счетчика результатов и оборотов получаем нули. Проверку надо произвести со всеми числами, указанными в таблице 4.

Таблица 4

Множитель	Множимое	Произведение
111 111 11	111 111 111	012 345 678 876 543 21
222 222 22	222 222 222	049 382 715 506 172 84
333 333 33	333 333 333	111 111 109 888 888 89
444 444 44	444 444 444	197 530 862 024 691 36
555 555 55	555 555 555	308 641 971 913 580 25
666 666 66	666 666 666	444 444 439 555 555 56
777 777 77	777 777 777	604 938 264 950 617 29
888 888 88	888 888 888	790 123 448 098 765 44
999 999 99	999 999 999	999 999 989 000 000 01

§ 55. ПРОВЕРКА МАШИНЫ «МЕРСЕДЕС»

1. Проверка машины на холостых ходах

Установить машину в исходное положение (очистить клавиатуру, очистить счетчики результатов и оборотов, накапливающий счетчик), перевести рычаг (21) на «М», нажать клавишу сложения (3) и сделать несколько ходов. При этом в счетчике результатов ничего не должно откладываться.

2. Проверка передачи десятков в счетчике результатов и в счетчике оборотов

Установить единицу в младшем разряде клавиатуры, поднять клавишу (22) до отказа, рычаг (21) перевести в положение «М», нажать клавишу вычитания (4) и сделать один ход. Во всех разрядах счетчика оборотов и счетчика результатов должны быть девятки. Затем нажать клавишу сложения (3) и сделать один ход. Во всех разрядах обоих счетчиков должны быть нули.

3. Проверка работы счетной части машины, а также работы машины на умножение и деление

Установить на цифровой клавиатуре множимое и множитель согласно прилагаемой таблице 5 и нажать клавишу умножения (5). После окончания умножения в счетчике оборотов должен стоять множитель, ранее установленный на цифровой клавиатуре, а в счетчике результатов — произведение согласно таблице 5. Затем, не гася счетчики и цифровую клавиатуру, следует перевести рычаг (26) в положение «минус» и нажать клавишу деления (6). После деления во всех разрядах обоих счетчиков должны быть нули. Проверку надо произвести на всех числах, указанных в таблице 5.

4. Проверка накапливающего счетчика

Для проверки накапливающего счетчика (17) необходимо установить машину в исходное положение. Во всех разрядах цифровой клавиатуры установить девятки и клавишей сложения (3) передать их в счетчик резуль-

татов. Далее нажать клавишу (18) и передать девятки из счетчика результатов в накапливающий счетчик. Затем нажатием клавиши (19) передать все девятки из накапливающего счетчика обратно в счетчик результатов, откуда переслать их снова в накапливающий счетчик. После этого в младшем разряде клавиатуры установить единицу, заслать ее в счетчик результатов, а из счетчика результатов в накапливающий счетчик. В результате этой пересылки в накапливающем счетчике должны стоять нули.

Таблица 5

Множитель	Множимое	Произведение
111 111 11	111 111 11	012 345 678 765 432 1
222 222 22	222 222 22	049 382 715 061 728 4
333 333 33	333 333 33	111 111 108 888 888 9
444 444 44	444 444 44	197 530 860 246 913 6
555 555 55	555 555 55	308 641 969 135 802 5
666 666 66	666 666 66	444 444 435 555 555 6
777 777 77	777 777 77	604 938 259 506 172 9
888 888 88	888 888 88	790 123 440 987 654 4
999 999 99	999 999 99	999 999 980 000 000 1

ПРИЛОЖЕНИЕ

Константы	Десятичное изображение	Восьмеричное изображение
π	3,141592653589793	3,110375524210264
$\frac{1}{\pi}$	0,318309886183790	0,242763015562344
π^2	9,869604401089358	11,675171446762136
π^3	31,006276680299820	37,003155311611660
$\frac{1}{\pi^2}$	0,101321183642337	0,063700573042130
$\frac{1}{\pi^3}$	0,032251534433199	0,020406427532135
$\sqrt{\pi}$	1,772453850905516	1,613376110664741
$\sqrt[3]{\pi}$	1,464591887561523	1,355675763461011
$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$	0,564189583547750	0,440672724041233
$\ln \pi$	1,144729885849400	1,112064044347503
$\lg \pi$	0,497149872694144	0,376424666306722
$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$	0,682784063255296	0,535453575536452
e	2,718281828459045	2,557605213050536
e^2	7,389056098930650	7,307144561523355
$\sqrt{e}$	1,648721270700128	1,514112307036015
$1:e$	0,367879441171442	0,274265306613167
$1:e^2$	0,135335283236613	0,105225252167740
$1:\sqrt{e}$	0,606530659712633	0,466426277067626
$\lg e$	0,434294481903251	0,336267542511562
$\ln 10$	2,302585092994045	2,232730673552524
$\sqrt{2}$	1,414213562373095	1,324047463177167
$\sqrt{3}$	1,732050807568877	1,566636564130231
$\sqrt[3]{2}$	1,259921049894873	1,205050574615345
1 *рад*	57°17′44″,806247096	71°21′54″,634630655
1 *рад*	57°,295779513082321	71°,227340646170175
1°	0,017453292519943 *рад*	0,010737215211224 *рад*

ПРИМЕРНЫЙ УЧЕБНЫЙ ПЛАН

Предмет «Методы счета на настольных вычислительных машинах «Мерседес» и «Рейнметалл»» можно разбить на две части. Первая часть рассматривается как самостоятельная, в которой предполагается ознакомить учащихся с настольными счетными машинами и выполнением основных действий на них (см. разделы I—III). Во второй части предполагается ознакомление учащихся с решением сложных математических задач на настольных счетных машинах. При этом имеется в виду, что с теоретической частью учащиеся знакомы из специального курса «Вычислительная математика». Ко второй части следует отнести раздел IV и прохождение производственной практики (раздел V).

Всего на предмет «Методы счета на настольных счетных машинах «Мерседес» и «Рейнметалл»» отводится 72 часа. Из них 28 часов выделяется на классные занятия (разделы I—IV) и 44 часа—на производственную практику.

Примерное распределение часов по разделам

Раздел I (2 часа). Общее ознакомление с настольными счетными машинами и учебным планом на текущий год.

Раздел II (10 часов). Приближенные и нормализованные числа. Правила определения порядков произведения и частного. Сложение и вычитание нормализованных чисел.

Контрольные работы.

Раздел III (12 часов). Методы вычислений суммы и разности произведений. Произведение нескольких чисел (клавиша «М»). Сумма и разность частных.

Контрольные работы.

Раздел IV (4 часа). Знакомство с математическими таблицами. Извлечение корней методом итераций. Интерполяция.

Контрольная работа за полугодие.

Раздел V (44 часа). Прохождение производственной практики.

Учащиеся проходят производственную практику в вычислительном бюро. Решают конкретные практические задачи, подготавливают задачи для решения на электронных вычислительных машинах. (В частности, могут быть ознакомлены с переводом чисел из десятичной системы счисления в двоичную, с действиями над многозначными числами и др.)

Для закрепления материала учащимся могут быть даны задачи, приведенные в приложении 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Брадис, Теория и практика вычислений, Учпедгиз, 1937.

2. В. Э. Милн, Численный анализ, ИИЛ, 1951.

3. И. С. Березин и Н. П. Жидков, Методы вычислений, т. I, Физматгиз, 1959.

4. И. Н. Бронштейн и К. А. Семендяев, Справочник по математике, ГИТТЛ, 1945.

5. «Руководство по эксплуатации счетной машины «Мерседес Эвклид», модель 38 MS.

6. Руководство по эксплуатации счетной машины «Рейнметалл (CAP)».

7. М. Дж. Сальвадори, Численные методы в технике, ИИЛ, 1955.

8. Г. Н. Положий, Н. А. Пахарева, И. З. Степаненко, П. С. Бондаренко, И. М. Великоиваненко, Математический практикум, Физматгиз, 1960.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава IV. **Выполнение основных действий на настольной счетной машине «Мерседес Эвклид», модель 38 MS**

Глава V. **Действия над многозначными числами на машине «Мерседес»**

Глава VI. **Перевод чисел из десятичной системы счисления в двоичную на настольной счетной машине «Мерседес Эвклид», модель 38 MS** 69

Глава VII. **Разное**

Елена Семеновна Богомолова,
Тамара Михайловна Копылова

РАБОТА НА КЛАВИШНЫХ МАШИНАХ

Редактор *Н. И. Никитина*
Художник *И. Г. Рутман*
Художественный редактор *В. С. Эрденко*
Технический редактор *Т. Н. Зыкина*
Корректор *Н. А. Мясникова*

* * *

Сдано в набор 29/VII-1963 г. Подписано к печати 18/III-1964 г. 84×108 1/32. Печ. л. 8 (6,56). Уч.-изд. л. 5,16. Тираж 4 тыс. экз.

* * *

Издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по печати, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в Ивановской областной типографии с матриц, изготовленных в Первой Образцовой типографии им. А. А. Жданова. Заказ 2219.

Цена 14 коп.

Цена 14 коп.