

АКАДЕМИЯ НАУК ЛАТВИЙСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОНИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
ТЕХНИКИ

М. П. СВИЛАНС

**ЭЛЕМЕНТЫ
ТЕОРИИ
ИНФОРМАЦИИ**

**(ПРИМЕНИТЕЛЬНО
К АВТОМАТИЗИРОВАННЫМ СИСТЕМАМ
УПРАВЛЕНИЯ)**

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗИНАТНЕ»
РИГА 1973

6S0.1
C246
УДК 621.391

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ (применительно к автоматизированным системам управления). М. П. С в и л а н с. Рига, «Зинатне», 1973.

В книге рассматриваются количественное определение информации, кодирование сообщений, способы аналитического выражения электрических сигналов, модуляция сигналов, пропускная способность каналов передачи информации, вопросы помехоустойчивости передачи и приема, принципы многоканальной электросвязи и искажения сигналов в каналах связи. По всем разделам приводятся основные расчетные формулы. В приложении даются примеры решения практических задач по рассмотренным вопросам. Табл. 36, илл. 84, библи. 51 назв.

3-3-14-002
С $\frac{3-3-14-002}{M811(11)-73}$ 12-73

ПРЕДИСЛОВИЕ

Общая теория передачи сообщений по каналам связи появилась в последние десятилетия; в настоящее время она уже выделась в самостоятельное направление. Непрерывно растущий поток информации требует дальнейшего совершенствования систем связи. Это совершенствование идет по двум направлениям — увеличения скорости передачи сообщения и повышения его достоверности.

Имеющуюся литературу по теории связи можно условно разделить на две группы. К первой относятся фундаментальные теоретические работы, рассчитанные в основном на научных работников. Ко второй группе можно отнести научно-популярные сочинения, в которых вскрывается физическая сущность науки, но почти не затрагиваются количественные соотношения.

Предлагаемая вниманию читателей работа занимает среднее положение между двумя этими группами и рассчитана на инженеров, которые, не являясь специалистами по теории информации, вынуждены или желают овладеть ее основными поло-

жениями и методами количественных расчетов. Книга может быть также полезна студентам соответствующих специальностей.

После изложения основного теоретического материала автор приводит ряд численных задач и примеров, которые, безусловно, будут способствовать овладению приемами количественных расчетов.

Профессор, д-р техн. наук Н. Т. ПЕТРОВИЧ

ВВЕДЕНИЕ

1.1. КРАТКАЯ ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Проблема передачи информации существует с тех пор, как появилось человеческое общество. Качественный скачок в развитии способов передачи сообщений произошел тогда, когда для этой цели стали использовать электромагнитные явления. Здесь мы попытаемся выделить только самые основные узловые моменты на пути развития систем передачи информации, основанных на использовании электромагнитных явлений.

Исторически первой из рассматриваемых систем является телеграф. Первый электромагнитный телеграф, созданный П. Шиллингом в 1832 году, не нашел практического применения, однако послужил основой для дальнейших поисков. В 1833 году в Геттингене К. Ф. Гауссом и В. Э. Вебером был построен электромагнитный иголочный телеграф, а в 1837 году американским инженером С. Морзе был предложен самопишущий телеграф, получивший с 1844 года в Америке практическое применение. Поворотными моментами в развитии телеграфии явились создание в 1855 году Д. Юзом буквопечатающего телеграфного аппарата, прокладка в 1866 году (после нескольких неудачных попыток) трансатлантической телеграфной линии американским предпринимателем С. Филдом, усовершенствование телеграфного аппарата Э. Бодо в 1874 году, открывшее возможность лучшего использования проводов, осуществление машинной телеграфной передачи с перфоленты в 1910 году и реализация многократной телеграфии в 1927 году.

Следующей по времени возникновения системой передачи информации является телефон. Отметим основные вехи его развития. В 1861 году свою конструкцию

предложил Ф. Рейс, в 1876 году появилась сохранившаяся в основных чертах до настоящего времени конструкция А. Г. Белла. Первая телефонная станция начала действовать в Хартфорде (США) в 1878 году, а первая междугородная телефонная линия была построена между Нью-Йорком и Филадельфией в 1884 году. Решающий поворот в развитии телефонии наметился с появлением номеронабирателя, предложенного американцем А. Б. Строуджером в 1889 году. Это изобретение явилось основой для создания автоматических телефонных станций. Первая такая станция была построена в Ла-Порте (США) в 1892 году.

Длинный путь до своего практического осуществления прошло и радиовещание. Этот путь был начат Д. К. Максвеллом, предсказавшим существование электромагнитных волн и в 1867 году развившим теорию их распространения. Г. Герц в 1887 году доказал существование электромагнитных волн, а А. С. Попов, впервые применив антенну, в 1895 году осуществил радиоприем. В 1902 году Г. Маркони принял первую радиопередачу с противоположного берега Атлантического океана. Важный вклад в развитие радио внесло открытие электронных ламп — диода в 1904 году Д. А. Флемингом и триода в 1906 году Л. Форестом. Плановые радиовещательные передачи начались в 1923 году.

Система передачи изображений практически развивается с 1904 года, когда А. Корну удалось передать неподвижное изображение из Мюнхена в Нюрнберг, а в 1923 году — из Рима в Бар-Харбор (США). В 1924 году А. Каролус использовал открытый в 1875 году эффект Дж. Керра (закрывающийся в преобразовании колебаний электрического напряжения в колебания освещенности) в системе передачи изображения. В 1926 году в Англии произошла первая телепередача по системе Бэрда, а в 1950 году в Америке была осуществлена первая цветная телевизионная передача.

Представленный здесь перечень основных событий из истории развития четырех систем передачи информации далеко не полон. Кроме того что целый ряд существенных открытий обойден молчанием, в обзоре не учтены взаимные связи рассмотренных систем. Большое значение имело применение радио для целей телеграфии и телефонии. Радиотелеграф и радиотелефон для передачи сообщений на

большие расстояния начали применять значительно раньше, чем для этой цели смогли быть использованы не только радиовещание, но и классическая телефония. В настоящее время большинство телеграфных и телефонных сообщений на дальних линиях связи передаются с помощью радиоволн. Уже с 1927 года существует регулярное радиотелефонное сообщение через Атлантический океан, а первый телефонный кабель с усилителями был проложен по дну Атлантики только в 1956 году. Рост заказов на телефонные разговоры через Атлантический океан с 11750 в 1927 году до 12,3 миллиона разговоров в 1967 году заставил искать новые возможности передачи сообщений. Последним словом в этом отношении является система телекоммуникационных спутников, успешно развивающаяся с 1962 года, когда, после неудачи с пассивным (отражающим) спутником «Эхо» в 1960 году, был запущен первый гражданский телекоммуникационный спутник «Тельстар». Опыты с ним показали целесообразность создания системы коммерческих спутников.

За первым спутником этой системы — «Эрли Берд», запущенным в 1965 году (весом 38 кг, с пропускной способностью 240 телефонных каналов), быстро последовали другие, так что к середине 1965 года международный консорциум «Интелсат» располагал уже шестью «стационарными» спутниками (вращающимися синхронно с Землей) — тремя над Атлантическим и тремя над Тихим океаном, а также 22 наземными станциями, расположенными в 14 государствах. Одновременно рос вес спутников и увеличивалось количество обслуживаемых каналов. Все спутники размещены на высоте порядка 35,8 тыс. км.

Создаваемая в Советском Союзе с 1965 года для внутригосударственных нужд система «Орбита» к середине того же 1965 года состояла из восьми «подвижных» спутников «Молния», движущихся по эллиптическим орбитам, с перигеем 500 км и апогеем 40 тыс. км.

Долговечность трансатлантических кабельных линий и спутников «Интелсата» оценивается соответственно в 20 и 5 лет, так что в ближайшем будущем предполагается их сосуществование в целях обеспечения все развивающейся связи. Соотношение количества телефонных разговоров, передаваемых через океан по кабелям, и количества разговоров, передаваемых посредством упомянутых спутников, будет равняться примерно 1 : 2.

1.2. ОБЩАЯ СХЕМА СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ, ИЛИ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ СВЯЗИ

Теория информации, или математическая теория связи, основанная К. Шенноном в 1948 году, возникла на грани техники связи и теории вероятностей, точнее, теории случайных процессов. Возникновение этой гибридной науки обусловлено необходимостью учета помех при дальнейшем развитии систем передачи информации. Таким образом, помехи из неоспоримо существующего, однако часто игнорировавшегося и малоисследованного фактора превратились в один из элементов, определяющих организацию системы передачи информации. Такая постановка вопроса обусловила системный подход к видам и средствам передачи информации, до сих пор изучаемым разрозненно.

Начиная рассмотрение систем передачи информации, целесообразно условиться относительно точной трактовки ряда близких по смыслу понятий. Так, информацией будем называть совокупность сведений, получение которых уменьшает ранее существовавшую неопределенность в наших знаниях или в понимании какого-либо процесса. Эти сведения могут храниться, передаваться и подвергаться преобразованиям. Сообщением называется информация, воплощенная в материальную форму. Информация может облекаться в форму речи, изображения, печатного текста, совокупности цифровых данных и т. п. Сигнал в широком смысле является видоизменением сообщения, пригодным для передачи на расстояние. В настоящей работе сигналами именуется только сообщения, которым придан вид электрических или электромагнитных величин.

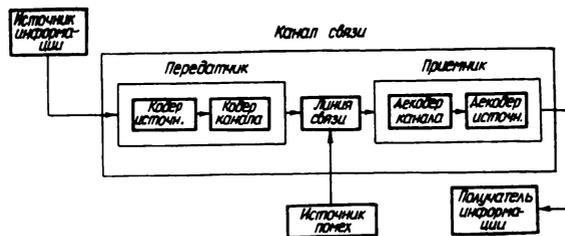


Рис. 1.1. Общая схема системы связи.

Первым элементом общей схемы, или модели, системы связи (рис. 1.1) является источник информации, т. е. человек или прибор, «генерирующий» сообщения. Далее любое сообщение приводится к форме электрического сигнала. Это приведение называется кодированием и может быть двухступенчатым. На первом этапе, т. е. в кодере источника (микрофон, телевизионная передающая трубка), сообщение преобразуется в дискретный или непрерывный электрический сигнал. На следующем этапе этот сигнал доводится канальным кодером (модулятором) до вида, в котором он (сигнал) способен преодолеть расстояние. Так заготовленный сигнал поступает в линию связи, соединяющую передатчик с приемником. Линия связи может представлять собой пару проводов, коаксиальный кабель, волновод или просто пространство, в котором распространяются электромагнитные волны.

К линии связи на схеме подключен источник помех. Математически это явно некорректно, так как помехи (шумы) действуют на сигнал во всех элементах канала связи. (Каналом связи принято называть всю совокупность технических средств, служащих для передачи сообщения от источника информации до ее получателя, или адресата.) Смысл такого подключения состоит в том, что из всех помех, действующих в канале, именно помехи, возникающие в линии, менее всего управляемы и, следовательно, наиболее опасны для всей системы связи.

На другом конце линии расположены декодеры канала и источника, в которых сигнал преобразуется (демодулируется) в вид, соответствующий его виду на входе канального кодера и дальше — в вид, в котором сообщение поступает в кодер источника.

В книге поэтапно рассматриваются все узлы описанной модели системы связи. Последний раздел книги посвящен многоканальным системам, т. е. системам, линии связи которых одновременно используются для обслуживания многих каналов связи, т. е. для передачи сигналов между многими парами абонентов.

1.3. ПОМЕХИ РАДИОСВЯЗИ

В данном рассмотрении систем связи на первый план выдвигается проблема их помехозащищенности. Поэтому целесообразно сразу указать причины, порождающие

помехи. Сделаем это на примере радиосвязи, так как из всех видов связи она наиболее помехоуязвима.

Помехами называются посторонние электромагнитные возмущения, накладывающиеся на передаваемые сигналы и препятствующие их правильному приему.

По форме напряжения помехи бывают синусоидальные, импульсные и хаотические.

Синусоидальные помехи порождаются генераторами синусоидальных сигналов, используемых в различных отраслях народного хозяйства. Источником таких помех, например, может быть медицинская аппаратура, используемая для диатермии, индуктотермии и УВЧ-терапии, промышленная аппаратура для плавки металла, сушки древесины и подогрева пресс-порошка и т. д.

Импульсные помехи порождаются электрическими искрами, особенно образующимися при действии систем зажигания двигателей внутреннего сгорания, при электро-сварке, на токосъемниках электропоездов, троллейбусов и трамваев.

Хаотические помехи порождаются повышенной температурой элементов схемы, в которых тепло вызывает усиленное хаотическое движение электрических зарядов, т. е. вносит определенные изменения в падение напряжения.

По виду мешающего воздействия помехи делят на аддитивные, т. е. складывающиеся с сигналом, и мультипликативные, т. е. изменяющие коэффициент передачи канала. Последнее эквивалентно изменению множителя сигнала.

По происхождению (источникам) аддитивные помехи можно подразделить на нижеследующие группы.

Помехи от соседних радиоканалов. Причиной помех может быть некоторое взаимное перекрытие частотных спектров, излучаемых радиостанциями, несущие частоты которых расположены в непосредственной близости друг от друга. Кроме того, «наложение» программ (спектров) может возникнуть при перекрытии спектра воспринимаемой станции второй гармоникой спектра другой станции, несущая частота которой приблизительно в два раза ниже несущей частоты принимаемой передачи. К той же группе помех относится так называемая «зеркальная» помеха, свойственная исключительно супергетеродинным радиоприемникам. Мешающее действие в этом случае может создать станция, несущая частота которой выше

частоты принимаемого сигнала примерно на значение удвоенной промежуточной частоты радиоприемника. Только супергетеродинным приемникам свойственна также помеха от передатчика, несущая частота которого совпадает с промежуточной частотой приемника.

Существуют следующие основные способы борьбы с помехами от соседних радиоканалов: раздвижение несущих частот передатчиков не менее чем на две полуполосы спектров, излучаемых передатчиками; осуществляемая на передающей стороне фильтрация всех составляющих спектра, выходящих за пределы отведенной передатчику полосы; фильтрация гармоник излучаемого передатчиком сигнала, которые могут появиться из-за нелинейности отдельных ступеней передатчика; строгое соблюдение расписания работы передатчиков; подавление в приемнике зеркального сигнала и сигнала, несущая частота которого соответствует промежуточной частоте приемника; применение в радиоприемниках антенн направленного действия, что резко понижает на входе приемника уровень всех сигналов, поступающих из других, нежели принимаемый сигнал, направлений.

Промышленные помехи. Они возникают от электромагнитных излучений при образовании электрических искр, которые, например, имеют место при электросварке, при действии систем зажигания двигателей внутреннего сгорания, на токоъемниках электротранспортных средств. Эти помехи проявляются в виде беспорядочных щелчков и треска. Наряду с ними следует отметить помехи от источников, генерирующих колебания промышленного и медицинского назначения. Последние вызывают упорядоченное шипение или треск, а также вуаль на экранах телевизоров. Промышленные помехи особенно ощутимы в приемниках, установленных на подвижных объектах, где источник помех находится в самом объекте.

Борьба с промышленными помехами сводится к предотвращению или уменьшению искрообразования (где это допустимо); закорачиванию высокочастотных колебаний, возникающих при искрении; экранированию радиоаппаратуры, особенно расположенной в средствах транспорта, и применению антенн направленного действия.

Атмосферные помехи. Их причиной являются электромагнитные излучения, порождаемые грозовыми разрядами и другими электрическими атмосферными явлениями. Эти

помехи проявляются в основном на длинных и средних волнах в виде сильного нерегулярного треска.

Во избежание атмосферных помех расширяется использование диапазона ультракоротких волн (УКВ), где передачи ведутся с частотной модуляцией. Прием на УКВ свободен от мешающего воздействия атмосферных помех.

Некоторое улучшение условий приема дают также антенны направленного действия.

Космические помехи. Их источник — излучения Галактики и Солнца, создающие помехи только на метровых и дециметровых волнах, так как для более длинных волн непрозрачной является ионосфера, а для более коротких — тропосфера (рис. 1.2). Эти помехи опасны в основном для аппаратуры с большим усилением, антенны которой направлены на Солнце или в центр Галактики. Космические помехи являются основным фактором, ограничивающим усиливающее действие приемника в указанном диапазоне частот.

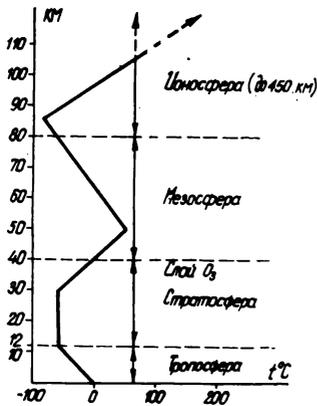


Рис. 1.2. Структура и температура земной атмосферы.

Флуктуационные помехи, или внутренние шумы. Это последовательность очень коротких импульсов случайной величины и случайного времени следования, которые обусловлены дискретной природой электричества. Они имеют широкий равномерный спектр. Для обозначения этих помех существует ряд терминов. Например, помеху, представляющую собой случайный процесс с равномерным спектром, называют белым шумом. Хаотическое тепловое движение свободных электронов называют тепловым шумом. Флуктуации тока питания анодной цепи первой лампы приемника являются причиной дробового эффекта.

Мультипликативные помехи выражаются в замирании сигнала, обусловленном интерференцией при многолучевом его распространении. Указанное явление носит нестационарный характер, т. е. зависит от времени. Мультипликативная помеха возникает всегда, когда параметры

системы передачи претерпевают случайные изменения во времени, например в результате суточных и сезонных изменений условий распространения коротких радиоволн.

Борьба с замиранием сигналов ведется путем образования нескольких каналов с независимыми параметрами. Тогда можно складывать принятые сигналы или автоматически подключаться к той антенне, в которую поступает более сильный сигнал. Наряду с этим практикуется прием на нескольких частотах, а также используется система автоматической регулировки усиления (АРУ). Последняя эффективна только при условии наличия запаса усиления в приемнике.

Однако рассмотренные методы борьбы с помехами не дают принципиального решения проблемы. Радикальным способом устранения помех является использование нового вида переносчика информации — широкополосного шумоподобного сигнала. Он может быть «свернут» в узкий импульс, длительность которого обратно пропорциональна используемой ширине полосы частот. Выбирая такую полосу, чтобы длительность свернутого импульса была меньше времени запаздывания лучей, можно осуществить отдельный прием одного или ряда запаздывающих лучей, а суммируя их энергию, повысить помехоустойчивость приема шумоподобных сигналов.

Характер мешающего воздействия помех зависит как от самих помех, так и от особенностей радиоканала (вида модуляции, метода приема, параметров приемника).

КОЛИЧЕСТВЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ

2.1. ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ И ИНФОРМАТИВНОСТИ

Любое передаваемое сообщение содержит в себе определенное количество информации о каком-то событии. «Событие» при этом должно пониматься в самом широком смысле этого слова. Количество переданной или полученной информации принято увязывать со степенью неожиданности события, о котором говорится в сообщении. Чем неожиданнее событие, тем больше информации в сообщении о нем.

При такой постановке вопроса для придания понятию «количество информации» четкого математического смысла требуется прежде всего дать четкое численное выражение «степени неожиданности» сообщения. Эта задача решается методами теории вероятностей.

Если по каналу связи передается сообщение о событии, вероятность которого до передачи (априорная) была P_1 , а после приема сообщения стала (апостериорно) равной P_2 , то прирост количества информации, связанный с приемом сообщения, определяется соотношением этих вероятностей, и полученное количество информации определяется формулой

$$I = \log \frac{P_2}{P_1} = \log P_2 - \log P_1. \quad (2.1)$$

Применение логарифмической функции для количественной оценки прироста информации дает существенные преимущества: так, полная информация, содержащаяся в со-

общении, состоящем из нескольких элементов, может быть получена сложением количеств информации, содержащихся в этих элементах. Кроме того, если канал связи идеален, т. е. в нем отсутствуют помехи и искажения и, следовательно, принятое сообщение вполне достоверно, то приведенное выражение упрощается, так как вероятность

$$P_2=1 \quad (\log P_2=0)$$

и

$$I = -\log P_1. \quad (2.2)$$

Поскольку первоначальная вероятность всегда находится в пределах между нулем и единицей, количество информации всегда положительно.

Численная величина количества информации зависит от выбора основания логарифма. Учитывая, что технические средства передачи и счета дискретной информации чаще всего могут принимать только два различных состояния, выгодно пользоваться логарифмом с основанием 2. Тогда единица количества информации соответствует сообщению о том, что произошло одно из двух равновероятных событий. Она называется двоичной единицей информации, или битом.

Пользуясь логарифмом с основанием 10, получаем количество информации в других единицах — дитах, а пользуясь натуральным логарифмом с основанием e

$$\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \approx 2,71828\right), \text{ — в нитах.}$$

Изложенное иллюстрирует следующий пример. Если по каналу связи равномерным кодом передается сообщение о совершившемся одном из восьми равновероятных событий, кодовые обозначения и вероятности которых приведены (табл. 2.1), то представляется возможным вычислить количество информации, доставляемое каждым последующим символом передаваемой кодовой группы. Для этого в первую очередь определяются вероятности поступления отдельных сообщений после передачи каждого символа кодовой группы (как это сделано в табл. 2.1), а затем рассчитывается количество информации, перенесенное каждым символом.

Таблица 2.1

Номер сообщения	Код сообщения	Вероятность сообщения	Вероятности после передачи		
			0	1	0
1	000	1/4	1/3	0	0
2	001	1/4	1/3	0	0
3	010	1/8	1/6	1/2	1
4	011	1/8	1/6	1/2	0
5	100	1/16	0	0	0
6	101	1/16	0	0	0
7	110	1/16	0	0	0
8	111	1/16	0	0	0

При передаче сообщения 3 в первом символе содержится информация*

$$I(3,0) = \log_2 \frac{1}{6} - \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 \frac{4}{3} =$$

$$= 2 - 1,585 = 0,415 \text{ [бит]},$$

во втором символе

$$I(3,1/0) = \log_2 \frac{1}{2} - \log_2 \frac{1}{6} = \log_2 3 = 1,585 \text{ [бит]},$$

в третьем символе

$$I(3,0/10) = \log_2 1 - \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2 = 1,000 \text{ [бит]}.$$

Суммарная информация равна логарифму от величины обратной априорной вероятности сообщения 3.

Наряду с абсолютным количеством информации, содержащимся в сообщении, употребляется понятие удельной информативности, или энтропии, сообщения. Под этим подразумевается среднее количество информации, приходящееся на один символ передачи:

$$H = I_1 = \frac{I_n}{n} \frac{\text{бит}}{\text{символ}}. \quad (2.3)$$

Энтропия характеризует сообщение с точки зрения его

* Для логарифмирования по основанию 2 учитывается, что $\log_2 A = \log_{10} A : \log_{10} 2 = 3,32 \log_{10} A$.

насыщенности информацией. Чем больше энтропия сообщения, тем больше информации воспринимается за единицу времени.

2.2. ЭНТРОПИЯ ДИСКРЕТНЫХ СООБЩЕНИЙ

Дискретными называются сообщения, передача которых происходит в виде отдельных символов. Наиболее распространенные символы — буквы алфавита и цифры арабской системы счисления. Обозначая количество всех возможных в конкретной системе символов через m , а количество переданных символов через n , можем установить количество различных сообщений, образуемых n символами из m символов. Придерживаясь математической терминологии, можно сказать, что оно будет равно количеству размещений с повторениями (см. приложение П1, стр. 179), т. е. m^n .

При равной вероятности отдельных сообщений вероятность каждого из них

$$P_1 = \frac{1}{m^n}, \quad (2.4)$$

и, следовательно, количество информации в одном сообщении равно

$$I = -\log_2 \frac{1}{m^n} = n \log_2 m \text{ бит}. \quad (2.5)$$

Энтропия такого сообщения исчисляется следующим образом:

$$H = \frac{I}{n} = \log_2 m \frac{\text{бит}}{\text{символ}}. \quad (2.6)$$

Из формул (2.5) и (2.6) следует, что при передаче равновероятных сообщений количество информации в сообщениях пропорционально переданному числу символов и логарифму числа возможных символов (букв алфавита). Энтропия в этом случае зависит только от числа возможных символов (букв алфавита).

При разной вероятности возможных сообщений количество передаваемой информации определяется с учетом

вероятностей отдельных символов алфавита источника сообщений, приведенного в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Символ (буква алфавита)	Число символов в тексте	Вероятность символа
А	n_1	$p_1 = n_1 : N$
Б	n_2	$p_2 = n_2 : N$
В	n_3	$p_3 = n_3 : N$
Г	n_4	$p_4 = n_4 : N$
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
Я	n_m	$p_m = n_m : N$
	$\sum_{k=1}^m n_k = N$	$\sum_{k=1}^m p_k = 1$

Количество информации во всем передаваемом тексте
 $I_N = -(n_1 \log_2 p_1 + n_2 \log_2 p_2 + \dots + n_m \log_2 p_m)$ бит. (2.7)

Энтропия такого сообщения исчисляется по формуле

$$H = \frac{I_N}{N} = - \sum_{k=1}^m \frac{n_k}{N} \log_2 p_k = - \sum_{k=1}^m p_k \log_2 p_k \frac{\text{бит}}{\text{символ}}. \quad (2.8)$$

Как следует из формулы (2.8), энтропия и в этом случае является вещественной, ограниченной и неотрицательной величиной, так как каждый суммант общего выражения энтропии может принимать значения, ограниченные возможными пределами вероятности

$$0 \leq p_k \leq 1. \quad (2.9)$$

При $p_k = 0$ значение $-p_k \log_2 p_k$ представляет собой неопределенность, раскрываемую по правилу Лопиталья, т. е.

$$\lim_{p_k \rightarrow 0} (-p_k \log_2 p_k) = \lim_{p_k \rightarrow 0} \frac{\log_2 \left(\frac{1}{p_k} \right)}{\frac{1}{p_k}} = \frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\alpha)} = \frac{\infty}{\infty};$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} f(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\varphi'(\alpha)}{\psi'(\alpha)} = \frac{\frac{1}{\infty} \log_2 e}{1} = 0.$$

При $p_k=1$ значение $-p_k \log_2 p_k$ тоже превращается в нуль.

Оба эти крайних случая могут быть оценены также чисто интуитивно. Вероятности 0 и 1 соответственно обозначают невозможное и полностью достоверное событие. Таким образом, любая информация о них излишня, так как события заранее известны.

Поведение каждого сумманта $-p_k \log_2 p_k$ между крайними значениями вероятности p_k может быть установлено поиском его экстремума. Для этого находим первую производную сумманта и приравниваем ее нулю:

$$\frac{d}{dp_k} (-p_k \log_2 p_k) = -p_k \frac{1}{p_k} \log_2 e - \log_2 p_k = 0. \quad (2.10)$$

Отсюда

$$p_k = \frac{1}{e} \approx 0,368.$$

Максимальная величина одного слагаемого получается равной

$$(-p_k \log_2 p_k)_{\max} = \frac{1}{e} \log_2 e \approx 0,531, \quad (2.11)$$

а поведение этого сумманта на протяжении всего участка его существования приведено на рис. 2.1.

Полученный для одного сумманта энтропии результат не решает вопроса о максимуме энтропии сообщения, содержащего равновероятные символы, так как все сумманты формулы (2.8) не могут одновременно принимать значение, определенное выражением (2.11). Это невозможно, так как

$$\sum_{k=1}^m p_k = 1. \quad (2.12)$$

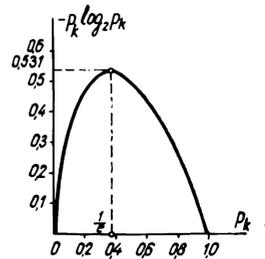


Рис. 2.1. Зависимость $-p_k \log_2 p_k$ от вероятности состояния p_k .

Для выявления максимума энтропии дискретного сообщения следует отыскать ее условный экстремум — учитывая условие (2.12). Это можно сделать, применяя метод множителей Лагранжа, т. е. производя поиск экстремума новой функции, образованной в виде суммы выражения, для которого требуется определить условный максимум, и дополнительного условия, предварительно умноженного на неопределенный (первоначально) множитель Лагранжа:

$$\begin{aligned}
 F &= - \sum_{k=1}^m p_k \log_2 p_k - \lambda \sum_{k=1}^m p_k = \\
 &= - \sum_{k=1}^m (p_k \log_2 p_k + \lambda p_k) = \sum_{k=1}^m F^*_k;
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F^*_k}{\partial p_k} = - \log_2 p_k - \log_2 e - \lambda = 0 \rightarrow \log_2 p_k = - \log_2 e - \lambda.$$

На этом этапе следовало бы приступить к определению множителя λ , однако в данном случае это излишне, так как и без того видно, что искомая величина p_k не зависит от k , значит, все p_k равны между собой. В результате

$$H_{\text{макс}} = - \sum_{k=1}^m \frac{1}{m} \log_2 \frac{1}{m} = \log_2 m. \quad (2.13)$$

Полученное выражение совпадает с равенством (2.6), выведенным ранее для случая, когда элементы сообщения равновероятны. Таким образом, энтропия сообщения, содержащего равновероятные символы, всегда меньше энтропии сообщения, состоящего из равновероятных символов. Энтропия бинарного сообщения ($m=2$) всегда находится в пределах между 0 и 1.

Практически дискретные сообщения (печатный текст, человеческая речь) обыкновенно имеют сильно заниженную энтропию, так как ее, кроме неравной вероятности символов, снижают также связи (корреляция) между отдельными символами (буквами, звуками). Всегда существует большая вероятность того, что вслед за одной определенной буквой последует другая определенная буква. В таких случаях получаемая от этой буквы информация

будет ничтожной. Указанное обстоятельство учитывается понятием избыточности, численное значение которого определяется по формуле

$$R = 1 - \frac{H}{H_{\max}}. \quad (2.14)$$

Любая избыточность дополнительно загружает каналы передачи, являясь одновременно своеобразным защитником сообщения от помех. Речь без избыточности можно было бы пользоваться только в акустической камере.

2.3. ЭНТРОПИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СООБЩЕНИЙ

Использованные до сих пор рассуждения о количестве информации явно не подходят для случая, когда сообщение содержится не в дискретных посылках, а в непрерывном множестве состояний, т. е. когда сообщение и соответствующий ему сигнал являются непрерывными функциями времени.

Опираясь ранее установленными закономерностями, мы в нашем случае получаем бесконечное количество информации при конечной длительности сигнала (из-за бесконечно большого количества возможных его значений, порождающего нулевую вероятность каждого из них). Для преодоления указанной математической трудности предполагается замена непрерывного сообщения дискретным, т. е. передача дискретной последовательности мгновенных значений в моменты времени, отделенные определенными интервалами. Величина этих интервалов обозначается Δt , а ее количественное значение будет определено в дальнейшей теореме отсчетов (Котельникова). Мгновенные значения функции в реальных системах с помехами также не должны иметь бесконечного количества возможностей. Достаточно передавать эти значения функции с точностью до эффективного значения помехи, т. е. вводя конечное количество разрешенных значений (уровней), расстояние между которыми определяется уровнем помех в канале.

С целью приспособления формулы (2.7) для случая непрерывного сообщения понятие вероятности выражается через функцию плотности вероятности данного распределения состояний, т. е. рассматриваются вероятности того, что значения случайных величин оказываются в пределах

заранее намеченных интервалов (совокупностей чисел) (см. П2, стр. 180). Тогда выражение энтропии сообщения с непрерывным распределением элементов можно написать, модифицируя формулу (2.8) для случая дискретного распределения:

$$H = - \sum_{k=1}^m p_k \log_2 p_k = - \sum_{k=1}^m \varphi(x_k) \Delta x \log_2 [\varphi(x_k) \Delta x];$$

$$H = - \sum_{k=1}^m \varphi(x_k) \Delta x \log_2 \varphi(x_k) - \sum_{k=1}^m \varphi(x_k) \Delta x \log_2 \Delta x. \quad (2.15)$$

При уменьшении Δx (увеличении m) первая сумма в пределе стремится к интегралу:

$$H^*(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \log_2 \varphi(x) dx. \quad (2.16)$$

Полученная величина называется приведенной энтропией.

Поскольку $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$, вторая сумма равна $\log_2 \Delta x$. Таким образом, энтропия непрерывного сообщения определяется по формуле

$$H(x) = H^*(x) - \log_2 \Delta x. \quad (2.17)$$

Информативность сообщения до нашего вмешательства полностью обусловлена приведенной энтропией, отражающей статистику состояний элементов сообщения. Величина $\log_2 \Delta x$ зависит только от избранного интервала квантования Δx , определяющего точность квантования состояний, и при постоянном Δx является постоянной величиной.

Для выявления максимума энтропии непрерывного сообщения следует отыскать ее условный экстремум, учитывая дополнительные условия, накладываемые на свойства сообщения. Первое из них известно уже со случая дискретного сообщения и сводится к выражению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1; \quad (2.18)$$

второе относится к практической возможности реализации непрерывного сигнала и утверждает, что дисперсия (см. П2, стр. 181) состояний элементов сообщения — постоянная величина:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x) dx = \text{const.} \quad (2.19)$$

Применяем тот же метод множителей Лагранжа и, исходя из уравнений (2.16), (2.18) и (2.19), вводим обозначения

$$F_1(x) = -\varphi(x) \log_2 \varphi(x); \quad (2.20)$$

$$F_2(x) = \varphi(x); \quad (2.21)$$

$$F_3(x) = x^2 \varphi(x) \quad (2.22)$$

и составляем уравнение Эйлера

$$F^*(x) = F_1(x) + \lambda_1 F_2(x) + \lambda_2 F_3(x). \quad (2.23)$$

Определяя частную производную этого выражения по $\varphi(x)$ и приравнявая ее нулю, осуществляем поиск той плотности вероятностей, которой соответствует максимальная энтропия непрерывного сообщения:

$$\frac{\partial F^*(x)}{\partial \varphi(x)} = \frac{\partial}{\partial \varphi(x)} \{-\varphi(x) \log_2 \varphi(x) + \lambda_1 \varphi(x) + \lambda_2 x^2 \varphi(x)\} = 0;$$

$$\log_2 e + \log_2 \varphi(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x^2.$$

Так как $\log_2 A = \frac{\ln A}{\ln 2}$, то

$$\ln \varphi(x) = \lambda_1 \ln 2 + \lambda_2 x^2 \ln 2 - 1,$$

или

$$\varphi(x) = e^{\lambda_1 \ln 2 - 1} e^{\lambda_2 x^2 \ln 2}. \quad (2.24)$$

Постоянные множители определяем, подставляя полученное значение $\varphi(x)$ в выражения дополнительных условий

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_1 \ln 2 - 1} e^{\lambda_2 x^2 \ln 2} dx = 1 \rightarrow e^{\lambda_1 \ln 2 - 1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_2 x^2 \ln 2} dx = 1; \quad (2.25)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{\lambda_1 \ln 2 - 1} e^{\lambda_2 x^2 \ln 2} dx = \sigma^2 \rightarrow e^{\lambda_1 \ln 2 - 1} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{\lambda_2 x^2 \ln 2} dx = \sigma^2. \quad (2.26)$$

Согласно таблицам интегралов [17]

$$\int_0^{\infty} e^{ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-a}}, \quad \int_0^{\infty} e^{ax^2} x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4(\sqrt{-a})^3}.$$

Следовательно, уравнения (2.25) и (2.26) можно переписать в виде

$$e^{\lambda_1 \ln 2 - 1} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-\lambda_2 \ln 2}} = 1; \quad (2.27)$$

$$e^{\lambda_1 \ln 2 - 1} \frac{\sqrt{\pi}}{2(\sqrt{-\lambda_2 \ln 2})^3} = \sigma^2 \quad (2.28)$$

и, разделив (2.27) на (2.28), установить, что

$$\{\lambda_2 \ln 2 = -\frac{1}{2\sigma^2}. \quad (2.29)$$

Подставляя полученное значение в формулу (2.27), имеем

$$e^{\lambda_1 \ln 2 - 1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma}.$$

Подставляя последний результат в выражение (2.24), записываем

$$x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.30)$$

Последнее выражение представляет собой то значение функции плотности вероятностей распределения состояний, при котором энтропия сообщений с ограниченной дисперсией максимальна. Полученная плотность вероятностей совпадает с нормальным симметричным (гауссовым) распределением вероятностей.

Следовательно, если задана дисперсия состояний элементов, то сообщение обладает наибольшей информатив-

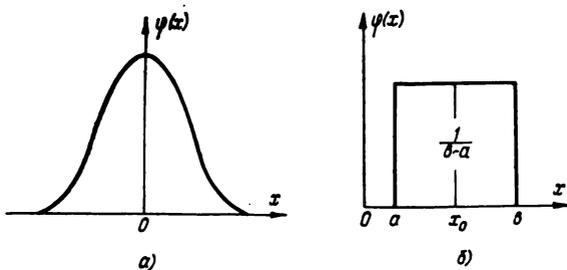


Рис. 2.2. Функции плотности вероятностей, обеспечивающие максимальную энтропию сообщений:
 а — при заданной дисперсии состояний; б — при произвольной дисперсии.

ностью (максимальной энтропией) в том случае, когда состояния элементов распределены по нормальному закону (рис. 2.2, а). Если задана средняя мощность помехи, то последняя является наиболее эффективной (энтропия помехи максимальна), когда состояния составляющих помеху элементов распределены по нормальному закону. Именно этому закону подчиняются амплитуды флуктуационных шумов, а следовательно, эти шумы — наиболее мешающие из всех возможных помех, так как наиболее информативны.

Подставляя полученный результат в выражение (2.16), получаем

$$H^*_H(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_H(x) \log_2 \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right] dx;$$

$$H^*_H(x) = \log_2(\sigma \sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_H(x) dx +$$

$$+ \frac{\log_2 e}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi_H(x) dx.$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_H(x) dx = 1, \tag{2.18}$$

а

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi_H(x) dx = \sigma^2, \quad (2.19)$$

то

$$H^*_{\text{H}}(x) = \log_2(\sigma \sqrt{2\pi}) + \frac{\log_2 e}{2\sigma^2} \sigma^2 = \log_2(\sigma \sqrt{2\pi e}), \quad (2.31)$$

а полная энтропия

$$H_{\text{H}}(x) = \log_2\left(\frac{\sigma}{\Delta x} \sqrt{2\pi e}\right). \quad (2.32)$$

Функцию плотности вероятностей, которой соответствует максимальная энтропия — без учета второго ограничения (постоянства дисперсии), — легко получить, приравнявая второй коэффициент Лагранжа λ_2 нулю. Для такого случая выражение (2.24) может быть переписано в виде

$$\varphi(x) = e^{\lambda_1 \ln 2 - 1}. \quad (2.33)$$

В этом случае функция плотности вероятностей не зависит от x ; значит, она постоянна во всем интервале существования случайной величины и может быть записана

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{b-a}. \quad (2.34)$$

Следовательно, если дисперсия состояний элементов не ограничена, то сообщение обладает наибольшей информативностью (максимальной энтропией), когда состояния элементов распределены по равномерному закону (рис. 2.2, б).

Подставляя выражение (2.34) в выражение (2.16), получаем

$$H^*_{\text{p}}(x) = - \int_a^b \frac{1}{b-a} \log_2 \frac{1}{b-a} dx = \log_2(b-a). \quad (2.35)$$

Полная энтропия равна

$$H_{\text{p}}(x) = \log_2 \frac{b-a}{\Delta x}. \quad (2.36)$$

Сравнивая оба случая в предположении, что количество энтропии в сообщениях с нормальным и равномерным распределениями вероятностей одинаково, можем вычислить дисперсию, свойственную каждому из этих распределений. Обозначая дисперсии, соответствующие нормальному и равномерному распределениям, индексами «н» и «р», получаем

$$\sigma_n \sqrt{2\pi e} = b - a. \quad (2.37)$$

Учитывая, что дисперсия для равномерного закона распределения (см. П2, стр. 183)

$$\sigma_p^2 = \left(\frac{b - a}{2\sqrt{3}} \right)^2, \quad (2.38)$$

получаем

$$\sigma_n \sqrt{2\pi e} = 2\sqrt{3} \sigma_p,$$

или

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{6}{\pi e}} \sigma_p, \quad (2.39)$$

а сравнивая дисперсии, запишем

$$\sigma_p^2 = \frac{\pi e}{6} \sigma_n^2 \approx 1,42 \sigma_n^2. \quad (2.40)$$

Значит, если сообщения представлены амплитудно-модулированными сигналами, то при одинаковой их информативности сигнал с равномерным распределением амплитуд должен быть на 42% мощнее.

2.4. ИНФОРМАЦИОННАЯ ЕМКОСТЬ И ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ ИСТОЧНИКА

Информационной емкостью источника сигнала принято называть то максимальное количество информации, которое источник сигнала способен создать за единицу времени, т. е. информационная емкость соответствует максимальной скорости создания сообщения.

Наиболее распространенный дискретный сигнал имеет вид совокупности импульсов и пауз. Если принять избыточность источника равной нулю, то на один символ приходится одна двоичная единица информации, и поэтому,

обозначая длительность импульса (и паузы) через τ , а число импульсов (и пауз) через n , для полной длительности сигнала получаем выражение

$$T = n\tau. \quad (2.41)$$

Созданное за это время количество информации соответствует n бит.

Так как импульсу длительностью τ соответствует полоса частот

$$\Delta f = k \frac{1}{\tau}, \quad (2.42)$$

где k — близкий единице коэффициент, зависящий от формы импульса, то количество информации в сигнале длительностью T не превысит

$$I_n = n = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{k} T \Delta f \text{ бит}. \quad (2.43)$$

Если $k=1$, то информационная емкость сигнала

$$C = \frac{I_n}{T} = \Delta f \frac{\text{бит}}{\text{сек}}. \quad (2.44)$$

Таким образом, информационная емкость дискретного сигнала при двоичном коде равна полосе частот сигнала.

В случае количества дискретных состояний $m > 2$ получаем

$$C_m = \Delta f \log_2 m \frac{\text{бит}}{\text{сек}}. \quad (2.45)$$

Наряду с информационной емкостью сигнала распространено понятие производительности источника сообщений. При передаче дискретных сигналов производительность источника сообщений определяется количеством создаваемой им информации в среднем за единицу времени:

$$H_t = \frac{I_n}{T} = \frac{I_n}{n\tau} = \frac{H}{\tau} \frac{\text{бит}}{\text{сек}}. \quad (2.46)$$

При передаче непрерывных сигналов эта величина зависит от точности, с какой источник воспроизводит заданный непрерывный сигнал, т. е. от шага квантования.

КОДИРОВАНИЕ СООБЩЕНИЙ

3.1. КОДИРОВАНИЕ ПРИ ОТСУТСТВИИ ПОМЕХ

Кодом называют систему соответствий между дискретными элементами — символами сообщений и сигналами, при помощи которых эти элементы могут быть зафиксированы или переданы по каналу связи. Таким образом, кодирование заключается в представлении передаваемого сообщения последовательностью относительно простых электрических сигналов.

Каждому символу (букве алфавита) может быть присвоена своя величина электрического сигнала, и тогда передаваемый текст будет состоять из m таких величин. Количество букв алфавита будет совпадать с количеством возможных значений сигналов m — основанием кода. Такой способ кодирования при наличии помех энергетически невыгоден, так как при его использовании максимальный импульс должен по напряжению превышать помеху в $2m$ раз, или по энергии — в $4m^2$ раз. Поэтому выгоднее использовать коды, основание m которых значительно меньше количества букв алфавита. В этом случае каждая буква алфавита передается целой кодовой группой. В результате количество передаваемых сигналов n увеличивается, но уменьшается общее количество их значений. Особенно выгоден в этом отношении двоичный код ($m=2$), основанный на двоичной системе счисления, в которой любое число A представляется в виде суммы степеней числа 2:

$$A = a_k 2^k + a_{k-1} 2^{k-1} + \dots + a_1 2 + a_0. \quad (3.1)$$

Коэффициенты a_k здесь принимают значения исключительно 0 или 1. Такие коэффициенты называются двоичными знаками. Переход от десятичной системы счисления на двоичную осуществляется следующим образом:

выраженное в десятичной системе число многократно делится на 2, и получаемые при каждом делении остатки записываются справа налево. Например: $121_{10} = 1111001_2$.

Непрерывные сообщения предварительно дискретизируются по времени и квантуются по значениям информативного параметра, а затем передаются кодово-импульсной модуляцией (особенно в телеметрии, управлении, связи).

При отсутствии помех представляется целесообразным образовать такой код, который в среднем будет иметь наиболее короткие кодовые группы и одновременно полностью исключит любую многозначность. Такое кодирование называется оптимальным. В результате его осуществления могут быть получены равномерные и неравномерные коды. Равномерным называется код, все комбинации которого содержат одинаковое количество знаков; неравномерным — такой, комбинации которого различаются по своей длине.

Примером оптимального кода является код Фэно. Для кодирования этим кодом все элементы сообщения делятся на две группы, обозначаемые соответственно 1 и 0, затем каждая из этих групп снова делится на две подгруппы и так далее до тех пор, пока все подгруппы не будут содержать по одному элементу сообщения. Деление на подгруппы должно производиться так, чтобы суммарные вероятности подгрупп были по возможности одинаковыми. Например, группа из шести букв должна кодироваться, как показано в табл. 3.1.

Ошибки из-за неоднозначности невозможны, так как ни одна длинная кодовая группа не совпадает в своем начале с короткой.

Таблица 3.1

Кодируемые элементы	Вероятность их появления	Постепенно образующиеся кодовые комбинации				
		1	10	110	1110	11110
А	0,25	1	10			10
Б	0,15	1	11	110		110
В	0,20	0	00			00
Г	0,05	1	11	111	1110	1110
Д	0,05	1	11	111	1111	1111
Е	0,30	0	01			01
	1,00					

Экономичность составленного кода характеризуется средним количеством разрядов ($n_{\text{ср}}$) на кодируемый элемент и рассчитывается по формуле

$$n_{\text{ср}} = \sum_{k=1}^N p_k n_k, \quad (3.2)$$

где p_k — вероятность появления кодируемого элемента;
 n_k — количество знаков в кодовой комбинации элемента;

N — количество кодируемых элементов.

Рассчитанная величина $n_{\text{ср}}$, в случае двоичного кода, в своем пределе стремится к энтропии совокупности кодируемых элементов, рассчитываемой по формуле

$$H = - \sum_{k=1}^m p_k \log_2 p_k. \quad (3.3)$$

Среднее число разрядов на кодируемый элемент достигнет значения энтропии, если в процессе кодирования разбиение элементов на группы будет произведено с точным соблюдением равенства вероятностей этих групп. При любом отступлении от этого закона $n_{\text{ср}}$ становится больше H , т. е.

$$n_{\text{ср}} > H. \quad (3.4)$$

В случае, приведенном в табл. 3.1, получаем

$$n_{\text{ср}} = 0,25 \times 2 + 0,15 \times 3 + 0,20 \times 2 + 0,05 \times 4 + 0,05 \times 4 + 0,30 \times 2 = 2,35 \left[\frac{\text{бит}}{\text{элемент}} \right];$$

$$H = - (0,25 \times \log_2 0,25 + 0,15 \times \log_2 0,15 + 0,20 \times \log_2 0,20 + 2 \times 0,05 \times \log_2 0,05 + 0,30 \times \log_2 0,30) = 2,32 \left[\frac{\text{бит}}{\text{элемент}} \right].$$

Небольшая разница обоих значений вызвана неточным совпадением вероятностей образованных подгрупп, а именно на втором этапе разбиения возникли подгруппы, образованные из элементов с вероятностью 0,2 («В») и с

вероятностью 0,3 («Е»), а на третьем этапе вероятности подгрупп оказались равными 0,15 и 0,10.

В случае равновероятности кодируемых элементов правило разбиения на подгруппы упрощается: в подгруппы объединяется по возможности одинаковое количество элементов. Упрощаются также формулы (3.2) и (3.3), которые принимают вид

$$n'_{\text{ср}} = \frac{\sum_{k=1}^N n_k}{N} \quad (3.5)$$

и

$$H' = \log_2 N. \quad (3.6)$$

Чем больше совокупность кодируемых элементов, тем легче осуществить приближение среднего числа разрядов на кодируемый элемент к значению энтропии. Поэтому для повышения экономичности кода часто прибегают к искусственному увеличению числа кодируемых элементов, объединяя их в блоки и определяя для каждого блока свою кодовую группу.

Например, в случае двух кодируемых элементов — А и Б с вероятностями соответственно 0,8 и 0,2, присваивая этим элементам соответственно символы 1 и 0, получаем $n_{\text{ср}} = 1 \frac{\text{бит}}{\text{элемент}}$ при энтропии совокупности кодируемых элементов $H = 0,722 \frac{\text{бит}}{\text{элемент}}$. Производя объединение элементов попарно, получаем случай, отображенный в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Кодируемые пары	Вероятность их появления	Постепенно образующиеся кодовые комбинации			
		1	01	001	000
АА	$0,8 \times 0,8 = 0,64$	1			1
АБ	$0,8 \times 0,2 = 0,16$	0	01		01
БА	$0,2 \times 0,8 = 0,16$	0	00	001	001
ББ	$0,2 \times 0,2 = 0,04$	0	00	000	000
	1,00				

$$\text{В итоге } 2n_{\text{ср}} = \sum_{k=1}^N p_k n_k = 0,64 \times 1 + 0,16 \times 2 + 0,16 \times 3 + 0,04 \times 4 \\ \times 3 = 1,56 \left[\frac{\text{бит}}{2 \text{ элем.}} \right], \text{ или } n_{\text{ср}} = 0,78 \left[\frac{\text{бит}}{\text{элем.}} \right].$$

Отображенные в табл. 3.2 действия называются кодированием по методу n -грамм. Достигаемый таким способом эффект формулируется основной теоремой кодирования. Она гласит, что при кодировании сообщения, разбитого на блоки по N_1 элементов в каждом, можно, выбрав N_1 достаточно большим, добиться того, чтобы среднее число двоичных элементов сигналов (битов) на один элемент исходного сообщения было сколь угодно близким к энтропии совокупности кодируемых элементов.

Кроме кода Фэнно, оптимального в условиях отсутствия помех, практически распространен целый ряд так называемых первичных, или простых, кодов. Общей чертой при их создании являлось стремление к минимальной избыточности с учетом технических особенностей использования кодов. Наиболее древним является континентальный код Морзе (1891 г.). Это неравномерный код, с помощью которого отдельные элементы сообщения кодируются последовательностью точек, пауз и тире. Длительности этих элементов относятся друг к другу, как 1:1:3. Комбинации отделяются одна от другой интервалом с длительностью тире, а слова — интервалами, равными пяти точкам. При составлении континентального кода Морзе статистика русского языка не учитывалась — наиболее короткие комбинации были выделены для букв, часто встречающихся в европейских языках латинской письменности. Построение кода Морзе для русского языка позволило бы сократить среднюю длину кодовых комбинаций с 8,65 до 7,68 элементов (на 11%).

Разработка конструкций буквопечатающих телеграфных аппаратов повлекла за собой развитие равномерных кодов, т. е. кодов, в которых все буквы передаются одинаковым количеством посылок. После введения многократных телеграфных аппаратов Бодо господствующее положение завоевал пятизначный телеграфный код Бодо, который с незначительными изменениями был принят в 1931 году Международным консультативным комитетом по

телеграфии (МККТ)* в виде единого кода для телеграфии. В следующем, 1932 году был принят стандартный код № 2. Он содержит все основные символы, считавшиеся МККТ необходимыми для обеспечения телеграфного обмена.

С 1 января 1968 года вступил в силу новый стандарт СССР на единый первичный код для передачи и обработки телеграфной информации и данных. Новый международный код должен постепенно заменить существующий стандартный первичный код — международный телеграфный код № 2. В отличие от кода № 2 новый код семизначный. Основные трудности его международного внедрения были связаны с различием алфавитов, в частности различным количеством букв в алфавитах: 31 — в русском и 26 — в латинском.

3.2. ИЗБЫТОЧНЫЕ КОДЫ

Для эффективной борьбы с помехами применяются избыточные коды. Они позволяют обнаружить и исправить ошибки, возникающие при передаче и порождаемые влиянием помех. Развитие этих кодов началось в 1950 году.

Ошибки, возникающие при передаче кодированного сигнала, сводятся к тому, что некоторые из переданных символов превращаются в другие. Ошибочность кодовой комбинации оценивается кратностью ошибки q , под которой подразумевается количество искаженных в пределах одной кодовой комбинации символов. Идея обнаружения ошибки сводится к использованию при передаче не всех возможных кодовых комбинаций, т. е.

$$N_0 = m^n, \quad (3.7)$$

где m — основание кода;

n — значность кода (количество символов в кодовой комбинации) —

а только некоторой их части:

$$N < N_0. \quad (3.8)$$

* Сейчас — МККТТ; т. е. Международный консультативный комитет по телеграфии и телефонии.

Используемые в данном коде комбинации называются разрешенными, неиспользуемые — запрещенными. Превращение разрешенной комбинации в запрещенную в результате воздействия помехи обнаруживает существование ошибки. Однако если одна разрешенная комбинация превращается в другую разрешенную комбинацию, то ошибка обнаружена не будет. Таким образом, всякий код, удовлетворяющий условию (3.8), способен обнаружить $N(N_0 - N)$ ошибок из их возможного количества $N(N_0 - 1)$. Отношение обнаруживаемых кодом ошибочных комбинаций ко всем возможным ошибкам составляет

$$\frac{N_0 - N}{N_0 - 1}. \quad (3.9)$$

Аналогично дело обстоит с исправлением ошибок. Для использования кода в качестве исправляющего нужно произвести разбиение множества запрещенных кодовых комбинаций $N_0 - N$ на N непересекающихся подмножеств M_i (рис. 3.1). Каждое из этих подмножеств приписывается своей разрешенной кодовой комбинации. Исправление состоит в том, что определенную запрещенную комбинацию всегда принимают за ту разрешенную комбинацию, к которой данная запрещенная комбинация приписана. Таким образом, отношение исправляемых ошибок ко всем возможным ошибкам составляет

$$\frac{N_0 - N}{N(N_0 - 1)}, \quad (3.10)$$

а ко всем обнаруживаемым ошибкам

$$\frac{N_0 - N}{N(N_0 - N)} = \frac{1}{N}. \quad (3.11)$$

Всякий код, выполняющий условие (3.8), может применяться в качестве исправляющего. Использование потенциальной

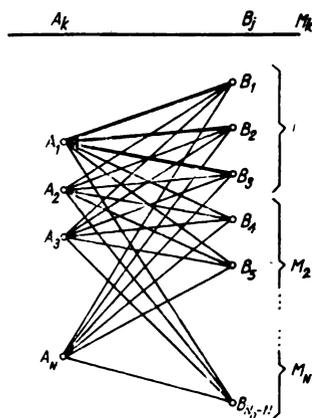


Рис. 3.1. Возможное распределение запрещенных кодовых комбинаций по разрешенным.

исправляющей способности кода зависит от способа разбиения множества запрещенных комбинаций и установления связи полученных таким образом подмножеств с разрешенными комбинациями. Последнее производится исходя из условий, существующих в каналах передачи.

Т а б л и ц а 3.3

Вектор ошибки	Разрешенные комбинации			
	0001	0101	1110	1111
	Принятые комбинации			
0001	0000	0100	<u>1111</u>	<u>1110</u>
0010	0011	0111	<u>1100</u>	<u>1101</u>
0100	<u>0101</u>	<u>0001</u>	1010	1011
1000	<u>1001</u>	<u>1101</u>	0110	0111
0011	0010	0110	1101	1100
0101	0100	0000	1011	1010
1001	1000	1100	0111	0110
0110	0111	0011	1000	1001
1010	1011	<u>1111</u>	0100	<u>0101</u>
1100	1101	1001	0010	0011
0111	0110	0010	1001	1000
1011	1010	<u>1110</u>	<u>0101</u>	0100
1101	1100	1000	0011	0010
1110	<u>1111</u>	1011	0000	<u>0001</u>
1111	<u>1110</u>	1010	<u>0001</u>	0000

Изложенное иллюстрирует табл. 3.3. В ней показано воздействие всех возможных ошибок на случайно избранные разрешенные комбинации четырехзначного кода. Введенный вектор ошибки следует понимать так: 0 — ошибки нет; 1 — ошибка есть. Принятая комбинация получается путем сложения передачи и ошибки. Правила сложения:

$$\begin{aligned}
 0+0 &= 0 \\
 0+1 &= 1 \\
 1+0 &= 1 \\
 1+1 &= 0
 \end{aligned}$$

В рассмотренном примере:

количество возможных комбинаций $N_0 = m^n = 2^4 = 16$;

количество векторов ошибок $N_{\text{ош}} = m^n - 1 = 2^4 - 1 = 15$;

количество возможных ошибок $N(N_0 - 1) = 4(16 - 1) = 60$;

количество обнаруживаемых ошибок $N(N_0 - N) = 4(16 - 4) = 48(80\%)$;

количество необнаруживаемых ошибок (комбинации, подчеркнутые в таблице) $N(N_0 - 1) - N(N_0 - N) = 60 - 48 = 12(20\%)$;

количество исправимых ошибок $N_0 - N = 16 - 4 = 12(20\%)$;

количество неисправимых ошибок $N(N_0 - 1) - (N_0 - N) = 60 - 12 = 48(80\%)$.

Способ исправления ошибок должен обеспечить минимум их средней вероятности. Поэтому разбиение запрещенных кодовых комбинаций (исправимых ошибок) на подгруппы производится в зависимости от статистики ошибок. В случае, если в канале связи действуют преимущественно взаимонезависимые ошибки, их вероятность убывает с ростом кратности ошибки q . При таком положении в первую очередь следует исправлять ошибки низшей кратности. Для примера, приведенного в табл. 3.3, это сводится к распределению, показанному в табл. 3.4, в которой к разрешенным комбинациям прежде всего приписаны ошибки с кратностью $q = 1$, затем $q = 2$ и т. д.

Приписываемые разрешенным кодовым комбинациям множества запрещенных кодовых комбинаций не должны быть взаимно пересекающимися. Поэтому в случае попадания одной запрещенной комбинации в два множества ее оставляют только в одном из них, произвольно выбранном.

Таблица 3.4

<i>Разрешенные комбинации</i>			
0001	0101	1110	1111
<i>Приписанные запрещенные комбинации</i>			
0000	0100	1100	1101
0011	0111	1010	1011
1001	1101	0110	0111
0010		1000	
1000		0010	

Если в канале связи действуют преимущественно пакетные ошибки, т. е. ошибки высокой кратности, разбиение запрещенных комбинаций по разрешенным производится с соблюдением закономерности, противоположной ранее описанной (табл. 3.5).

Таблица 3.5

<i>Разрешенные комбинации</i>			
<i>0001</i>	<i>0101</i>	<i>1110</i>	<i>1111</i>
<i>Приписанные запрещенные комбинации</i>			
	<i>1010</i>		<i>0000</i>
<i>1100</i>	<i>1011</i>	<i>0011</i>	<i>0010</i>
<i>0110</i>	<i>1000</i>	<i>1001</i>	<i>0100</i>
	<i>0010</i>		<i>1000</i>
<i>1101</i>		<i>0111</i>	
<i>0111</i>		<i>1101</i>	

Сравнение таблиц 3.4 и 3.5 показывает, что исправление пакетных ошибок требует меньшей избыточности кода, чем исправление взаимонезависимых ошибок. Исправление ошибок в приведенном примере явно не оптимально, так как в обоих случаях (табл. 3.4 и 3.5) отсутствовала полная однозначность при распределении тех запрещенных комбинаций, которые следует исправить в первую очередь. Положение может быть улучшено, если при выборе разрешенных комбинаций соблюдать определенную закономерность. Последняя связана с расстояниями кодовых комбинаций. Под таким расстоянием подразумевается число знаков, которыми одна комбинация отличается от другой. Полное представление о расстояниях между разрешенными комбинациями одного кода дает матрица расстояний. В приводимой здесь матрице (и в подобных матрицах, даваемых ниже) расстояния записаны на пересечениях строк и столбцов, соответствующих указанным номерам кодовых комбинаций.

	1	2	3	4
1	0	1	4	3
2		0	3	2
3			0	1
4				0

Однозначность исправлений растет с уменьшением дисперсии величин, записанных в матрицу расстояний. Наименьшее из записанных в матрицу значений называется кодовым, или хемминговым, расстоянием (ρ) и определяет обнаруживающие и исправляющие возможности кода.

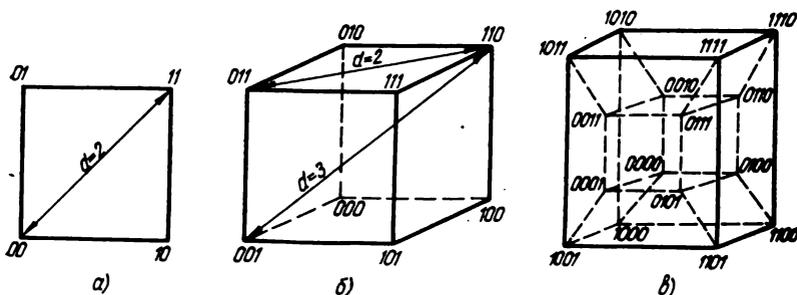


Рис. 3.2. Геометрическая интерпретация двоичного кода: а — двухзначного; б — трехзначного; в — четырехзначного.

Рассматривая двоичный код с геометрической точки зрения (откуда и взят термин «расстояние»), каждую кодовую комбинацию мы можем представить себе как одну из вершин куба, существующего в n -мерном пространстве, где n соответствует значности кода. Если исходить из такого предположения, то кодовое расстояние двоичного кода будет равно наименьшему числу ребер единичного куба, отделяющих одну кодовую комбинацию от другой (рис. 3.2). Выбор состава множеств запрещенных комбинаций, приписываемых к разрешенным, сводится к выбору собственных областей в пространстве сигналов.

Из понятия кодового расстояния ρ следует, что для обнаружения всех единичных ошибок (т. е. ошибок с $q=1$) необходимо и достаточно, чтобы $\rho \geq 2$, а для обнаружения всех ошибок кратности q_d величина ρ должна соответствовать неравенству

$$\rho \geq q_d + 1. \quad (3.12)$$

Однозначное исправление ошибки осуществимо, если содержащая ошибку (запрещенная) кодовая комбинация

находится ближе к той разрешенной комбинации, искажение которой породило полученную запрещенную. Из этого следует, что для однозначного исправления ошибки с кратностью q_c необходимо и достаточно, чтобы

$$\rho \geq 2q_c + 1. \quad (3.13)$$

Чтобы код мог исправлять все ошибки с кратностью $\leq q_c$ и одновременно обнаруживать все ошибки с кратностью $\leq q_d$, достаточно, чтобы кодовое расстояние выполняло условие

$$\rho \geq q_c + q_d + 1. \quad (3.14)$$

При использовании кодов, исправляющих ошибки, вероятность ошибки после декодирования уменьшается, если вероятность искажения отдельных символов не слишком велика. В каналах с большим уровнем помех избыточные коды становятся малоэффективными.

Несмотря на большое количество разработанных кодов, их практическое применение в системах передачи информации существенно ограничено из-за сложности реализации декодирующих устройств.

Наряду с применением исправляющих кодов определенное распространение получили так называемые дешифраторы (каналы) со стиранием (*erasure channel*). Особенность этих дешифраторов в том, что их решающее устройство имеет область неопределенности, в которую попадают все сомнительные сигналы. Кроме символов двоичного кода 0 и 1 на выходе такого устройства может появиться также символ неопределенности, или стирания, θ . Смысл изложенного в том, что восстановить стертые знаки, при полной надежности остальных, легче, чем исправить ошибочные. При заданном кодовом расстоянии ρ наибольшая кратность восстанавливаемых стираний t равна кратности обнаруживаемых ошибок, т. е.

$$\rho \geq t + 1. \quad (3.15)$$

Чтобы код мог одновременно исправить q_c ошибок и восстановить t стертых символов, достаточно, чтобы кодовое расстояние выполняло условие

$$\rho \geq q_c + t + 1. \quad (3.16)$$

Все исправляющие коды делятся на два класса — блочные и непрерывные. В блочных кодах каждому переда-

ваемому элементу сообщения соответствует своя кодовая комбинация. В случае равномерного блочного кода все эти комбинации состоят из одинакового количества (n) символов. В неравномерном коде длина комбинаций разная.

Непрерывные, или рекуррентные, коды образуются в виде непрерывной последовательности символов, не подразделенной на блоки. Непрерывный исправляющий код осуществляется путем предварительного кодирования сообщения оптимальным, то есть неизбыточным кодом, а затем между символами этого кода (после каждого символа, каждого второго, третьего или какого-либо иного) вставляются контрольные (проверочные) символы. Суть непрерывности в том, что вставление контрольных символов производится без учета границ комбинаций оптимального кода. Для непрерывных кодов применяется обозначение (k/n) , в котором k обозначает количество информационных символов, приходящихся на непрерывную последовательность n символов.

К самым распространенным блочным кодам относятся систематические и циклические коды. Понятие «систематический код» здесь применено в самом узком его смысле. Оба эти кода делимы, т. е. символы, входящие в их кодовые комбинации, делятся на основные, или информационные, и контрольные, или проверочные. Каждая из этих групп символов во всех кодовых комбинациях (векторах) занимает одни и те же позиции. Делимые коды обычно обозначаются, как (n, k) -коды, где n — значность кода, k — число информационных символов в кодовой комбинации.

Каждый равномерный избыточный блочный код составляется исходя из количества кодируемых элементов N и требований, предъявляемых к исправляющей способности кода, которые определяют кодовое расстояние ρ (формулы (3.13), (3.14)).

Из выражения

$$N = 2^k \quad (3.17)$$

можно определить количество информационных символов кодовой комбинации. Естественно, что k всегда округляется до ближайшего большего целого числа. В дальнейшем определяется значность кода. Хотя общее решение этой задачи неизвестно, некоторые частные результаты показаны в табл. 3.6.

Таблица 3.6

ρ	N
1	$\leq 2^n$
2	$\leq 2^{n-1}$
3	$\leq \frac{2^n}{1+n}$
4	$\leq \frac{2^{n-1}}{n}$
5	$\leq \frac{2^{n+1}}{2+n+n^2}$

$2j+1$	$\leq \frac{2^n}{1+C_n^1+C_n^2+\dots+C_n^j}$

Соблюдение закономерностей составления блочных кодов обеспечивает достижение минимальной дисперсии в матрице кодовых расстояний и позволяет производить декодирование более простым способом, нежели путем прямого сравнения принятой кодовой комбинации с полной кодовой таблицей.

3.3. СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ КОДЫ (В УЗКОМ ПОНИМАНИИ)

Исходными данными для составления систематического кода являются: количество кодируемых элементов N ; кодовое расстояние ρ , определяемое по формулам (3.12)—(3.16); количество информационных символов кодовой комбинации k , определяемое по формуле (3.17); значность кода n , определяемая по табл. 3.6.

Построение кода заключается в определении всех кодовых комбинаций, проверке того, как составленным набором кодовых комбинаций выполняются требования, предъявляемые к коду, и формулировке закономерностей, необходимых для осуществления эффективного декодирования, т. е. использования исправляющих и обнаруживающих ошибки свойств кода.

В состав кодовых комбинаций систематического кода первым включается нулевой вектор, т. е. кодовая комбинация, состоящая исключительно из нулей. Далее составляется так называемая производящая матрица G , которая содержит k ненулевых, линейно-независимых векторов. Правило ее составления сводится к первоначальной записи диагональной матрицы (k — строк, k — столбцов), строки которой дополняются контрольными символами в количестве $n-k$ каждая. Контрольные символы дописываются так, чтобы количество единиц в каждой строке было не меньше заданного кодового расстояния. Кодовое расстояние должно быть выдержано также между всеми векторами производящей матрицы. Остальные $N-k-1$ кодовые векторы получаются как линейные комбинации векторов, входящих в производящую матрицу. Возможны случаи, когда составление кода по предварительно полученному значению n оказывается невозможным. Тогда n следует увеличить на одну единицу.

В качестве примера ниже определяются все кодовые комбинации для кода с $N=8$, $\rho=2$ и показателями кода (5,3). Следуя ранее изложенному порядку действий, получаем

нулевой вектор 0 0 0 0 0;

$$\text{производящую матрицу } G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

остальные кодовые векторы, обозначая строки производящей матрицы соответственно через v_2 , v_3 и v_4 , получаем в виде

$$v_2 + v_3 = 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1$$

$$v_2 + v_4 = 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0$$

$$v_3 + v_4 = 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1$$

$$v_2 + v_3 + v_4 = 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0$$

Проверка требований, предъявляемых коду, производится составлением матрицы расстояний. Для приведенного примера матрица расстояний имеет следующий вид

(кодовые комбинации обозначены порядковыми номерами, в порядке их получения):

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	2	2	3	4	3	3	3
2		0	4	3	2	3	3	3
3			0	3	2	3	3	3
4				0	3	2	2	4
5					0	3	3	3
6						0	4	2
7							0	2
8								0

Здесь, как видим, кодовое расстояние, т. е. наименьшее из записанных в матрицу расстояний, равно 2. Значит, составленный код удовлетворяет предъявляемым ему требованиям.

Для осуществления эффективного декодирования необходимо знание проверочной (контрольной) матрицы H . Она содержит $n - k$ строк, которые, являясь линейно-независимыми, должны удовлетворять равенству

$$vu = \sum_{i=1}^n a_i b_i = 0, \quad (3.18)$$

где v — вектор производящей матрицы;

u — вектор контрольной матрицы;

a_i и b_i — символы кодовых комбинаций соответственно производящей и контрольной матриц.

Для составления контрольной матрицы предварительно по формуле (3.18) записываются условия, которым должны отвечать ее векторы, а затем составляется сама матрица. В случае рассматриваемого примера из формулы (3.18) следуют условия

$$b_1 + b_5 = 0;$$

$$b_2 + b_4 = 0;$$

$$b_3 + b_4 + b_5 = 0.$$

По этим условиям, исключая нулевой вектор, может быть составлено несколько вариантов контрольных матриц. Например:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и т. д.}$$

Контрольная матрица является основой для составления таблицы, по которой осуществляется проверка принятых кодовых комбинаций на четность. В этой таблице отмечаются символы, правильность которых проверяется в каждой из очередных проверок. Проверка сводится к суммированию отмеченных в таблице символов принятой кодовой комбинации. Проверку считаем выполняющейся, если указанная сумма равна нулю или является четным числом. Количество проверок соответствует количеству строк контрольной матрицы. Таблица является видоизменением контрольной матрицы, в которой подлежащие проверке символы обозначены крестиками. Приводим таблицу проверок для контрольной матрицы H_2 нашего примера (табл. 3.7).

Таблица 3.7

Номер проверки	Номер символа				
	1	2	3	4	5
1		×	×	×	
2	×		×		×

В зависимости от выбранного кодового расстояния проверка на четность дает возможность исправить или только обнаружить имеющиеся ошибки. Если кодовая комбинация принята правильно, то все проверки на четность выполняются. Если принятая комбинация содержит ошибку, то одна или несколько проверок не выполняется. Сочетания выполняющихся и невыполняющихся проверок указывают на место нахождения ошибки.

В приведенном примере при наличии однократной ошибки в принятой комбинации имеются три возможности. Не выполняется ни одна из проверок — значит, ошибка в 3-м символе (так как только этот символ присутствует в обеих проверках). Первая проверка выполняется, вторая нет — значит, ошибка в 1-м или 5-м символе. Первая проверка не выполняется, вторая выполняется — значит, ошибка во 2-м или 4-м символе.

Кроме проверки на четность исправление принятых кодовых комбинаций возможно путем вычисления исправляющего вектора s . Его составляющие s_j — скалярные произведения принятого вектора v_x и строки контрольной

матрицы u_j . Так как любой принятый вектор является суммой переданной кодовой комбинации v_i и возможной ошибки e_i , то, учитывая формулу (3.18), имеем

$$c_j = v_x u_j = (v_i + e_i) u_j = e_i u_j. \quad (3.19)$$

Полный исправляющий вектор c представляется $(n-k)$ -значным, двоичным числом. При отсутствии ошибки он равняется нулю. В зависимости от избранного кодового расстояния каждому исправляющему вектору соответствует одна или несколько возможных ошибок. Для исправления ошибок каждому исправляющему вектору необходимо противопоставить одну определенную ошибку. Исправление состоит в суммировании принятой кодовой комбинации с этой ошибкой.

Для рассмотренного примера (по контрольной матрице H_2) определяем исправляющий вектор, соответствующий ошибке 0 0 0 0 1:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \times 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0) = 0+0+0+0+0=0 \\ c_2 &= (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \times 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1) = 0+0+0+0+1=1 \end{aligned} \right\} c = 01.$$

По такой же закономерности устанавливаем соответствие остальных исправляемых ошибок исправляющему вектору:

Ошибка e	Исправляющий вектор c
0 0 0 0 1	01
0 0 0 1 0	10
0 0 1 0 0	11

При приеме любой разрешенной кодовой комбинации получаем $c=00$. При приеме какой-либо комбинации с однократной ошибкой, например пятой комбинации с ошибкой в 3-м символе, получим

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \times 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0) = 0+1+1+1+0=1 \\ c_2 &= (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \times 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1) = 1+0+1+0+1=1 \end{aligned} \right\} c = 11.$$

Следует особо подчеркнуть, что исправление ошибок методом исправляющего вектора не может устранить ограничений, налагаемых на возможности кода его кодовым расстоянием. Полученная однозначность исправления мнимна, так как при недостаточной кодовой избыточности

один и тот же исправляющий вектор соответствует нескольким разным ошибкам. Это легко проверить, продолжая приведенную выше таблицу соответствий.

3.4. ЦИКЛИЧЕСКИЕ КОДЫ

Циклические коды были созданы в поисках более простой техники кодирования и декодирования. Для составления циклического кода необходимы те же исходные данные, что и для составления систематического кода. Отличие заключается лишь в том, что систематический код может быть составлен для любой комбинации (n, k) , в то время как количество возможных циклических кодов фиксированной значности существенно ограничено, т. е. такие коды осуществимы только для вполне определенных комбинаций (n, k) , которые сведены в таблицы [24]. Кроме того, количество кодовых комбинаций, реализуемых циклическим кодом, на одну меньше количества, реализуемого систематическим кодом, так как в циклическом коде не участвует нулевой вектор.

Основное свойство циклических кодов, определяющее их название, состоит в том, что любой вектор v' , который можно получить из принадлежащего циклическому коду V вектора v путем циклической перестановки элементов последнего, тоже может являться разрешенной комбинацией того же циклического кода V . Под циклической перестановкой при этом понимается последовательный перенос символов кодовой комбинации с ее конца на первое место.

В теории кодирования принято представлять векторы циклических кодов в форме полиномов, а именно

$$v(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}. \quad (3.20)$$

При такой форме представления, ограничиваемой формальным условием

$$x^n = 1, \quad (3.21)$$

циклическую перестановку понимают как умножение приведенного полинома на x .

Составление циклического кода начинается определением производящего полинома $g(x)$ степени $n-k$. Этот

полином обыкновенно берется из таблиц, в которых производящие полиномы циклических кодов приведены для тех комбинаций (n, k) , для которых они существуют. Данный полином должен выполнять одно единственное условие: на него без остатка должен делиться двучлен $1+x^n$. (Действия над векторами выполняются по правилам арифметики по модулю 2, в которой вычитание равносильно сложению.)

По производящему полиному строится производящая матрица. Она содержит k строк. Первую строку образуют записанные слева направо коэффициенты членов производящего полинома в порядке роста показателей их степеней. Строка дополняется нулями из расчета, чтобы она содержала n символов. Дальнейшие строки матрицы получаются путем циклической перестановки символов. Остальные $N-k-1$ кодовые векторы получаются как линейные комбинации векторов, входящих в производящую матрицу.

Примером определения кодовых комбинаций может служить код с $N=8$, $\rho=3$ и показателями кода $(7,4)$. Ему соответствует производящий, или генераторный, полином: $g(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + \dots + g_{n-k}x^{n-k} = 1 + x^2 + x^3$. Производящая матрица тогда имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Остальные кодовые векторы получаем как линейные комбинации векторов, входящих в производящую матрицу. Обозначая последние соответственно через v_1, v_2, v_3 и v_4 , можем записать:

$$v_1 + v_2 = 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0$$

$$v_1 + v_3 = 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0$$

$$v_1 + v_4 = 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1$$

$$v_2 + v_3 = 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0$$

Проверка требований, предъявляемых коду, как и в случае систематического кода, производится составлением

матрицы расстояний. Для приведенного примера она имеет следующий вид:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	4	4	4	3	3	3	3
2		0	4	4	3	3	7	3
3			0	4	3	3	3	3
4				0	7	3	3	3
5					0	4	4	4
6						0	4	4
7							0	4
8								0

Расстояния между кодовыми комбинациями во всех случаях равны или больше 3. Значит, составленный код удовлетворяет предъявляемым ему требованиям.

Для осуществления эффективного кодирования и декодирования необходимо знание проверочного полинома $h(x)$, который получается делением (по правилам арифметики по модулю 2) двучлена $1+x^n$ на генераторный полином:

$$h(x) = \frac{1+x^n}{g(x)} = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \dots + h_k x^k. \quad (3.22)$$

Для приведенного примера получаем: $h(x) = \frac{1+x^7}{1+x^2+x^3} = 1+x^2+x^3+x^4$.

В случае циклических кодов можно при передаче пользоваться укороченными кодовыми комбинациями — состоящими исключительно из информативных символов. Проверочные символы добавляются к этим комбинациям кодирующим устройством, образующим векторы данного избыточного кода. Информационными символами принято считать последние k символов записанных кодовых комбинаций, причем при вводе в кодирующее устройство комбинации считываются справа налево.

Кодирующее устройство строится из сдвигающих регистров в форме триггерных цепочек с теми или иными обратными связями. Основными элементами схем являются триггерные и суммирующие по модулю 2 ячейки. На всех схемах триггерная ячейка обозначается квадратиком, а суммирующая — кружком со знаком «+» внутри. Действие триггерной ячейки сводится к тому, что при дискретном воздействии на ее вход она меняет свое состояние.

Каждое такое воздействие называется шагом. Под состоянием подразумевается символ, содержащийся внутри ячейки. После каждого шага символы продвигаются по цепочке триггерных ячеек.

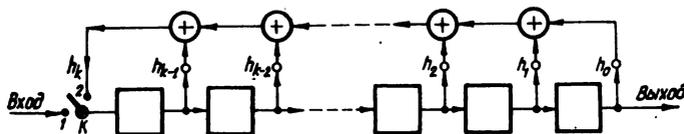


Рис. 3.3. Кодировующее устройство — k -ступенный регистр.

Кодирующее устройство может осуществляться в виде k -ступенного регистра (рис. 3.3). Согласно названию, оно содержит k триггерных ячеек с обратными связями через суммирующие ячейки. Наличие связей определяется с помощью проверочного полинома. Реально существуют только связи, соответствующие коэффициентам проверочного полинома, равным единице; для нулевых коэффициентов связи отсутствуют.

Действие схемы сводится к следующему. Ключ K первоначально находится в положении 1, и на протяжении k последовательных шагов ячейки регистра заполняются последовательностью информационных символов (считываемых справа налево). Затем ключ переводится в положение 2, и на протяжении $n-k$ шагов производится вывод из схемы $n-k$ кодовых символов с одновременным образованием в триггерных ячейках $n-k$ контрольных символов. После этого ключ переводится обратно в положение 1, и в течение k шагов из регистра выводятся остальные символы первой кодовой комбинации и вводится k символов следующей кодовой комбинации, и т. д.

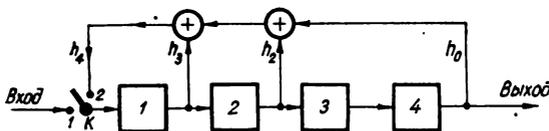


Рис. 3.4. k -Ступенный регистр для полинома $h(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4$.

Для приведенного примера схема k -ступенного регистра (рис. 3.4) при подаче на нее информационных символов, например последнего, 8-го, кодового вектора, заполняется в порядке, показанном в табл. 3.8.

Таблица 3.8

После шага	Ячейки регистра				Выход
	1	2	3	4	
$k = 4$	1	0	1	0	—
$k + 1 = 5$	1	1	0	1	0
$k + 2 = 6$	1	1	1	0	1
$k + 3 = 7$	0	1	1	1	0

Кодирование может производиться также $(n-k)$ -ступенным регистром (рис. 3.5). В нем $n-k$ ячеек; наличие обратных связей определяется генераторным полиномом.

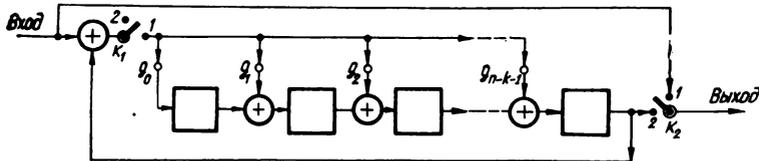


Рис. 3.5. Кодировующее устройство — $(n-k)$ -ступенный регистр.

Действие схемы сводится к следующему. Оба ключа первоначально находятся в положении 1, и на протяжении k последовательных шагов все информационные символы одновременно подаются непосредственно на выход и в кодирующее устройство для образования проверочных символов. Затем оба ключа переводятся в положение 2, и на протяжении $n-k$ шагов производится вывод из схемы $n-k$ контрольных символов. Затем ключи переводятся обратно в положение 1, и т. д.

Для приведенного примера схема $(n-k)$ -ступенного регистра (рис. 3.6) при подаче на нее информационных

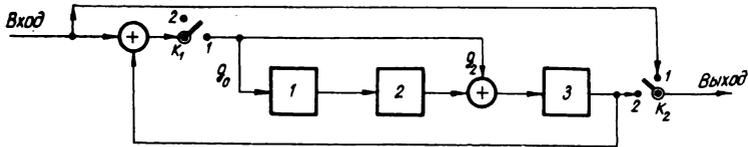


Рис. 3.6. $(n-k)$ -Ступенный регистр для полинома $g(x) = 1 + x^2 + x^3$.

символов того же последнего, 8-го, кодового вектора за-
полняется в порядке, показанном в табл. 3.9.

Таблица 3.9

После шага	Ячейки регистра		
	1	2	3
1	0	—	0
2	1	0	1
3	1	1	1
4	0	1	1

В практических реализациях предпочтение отдается бо-
лее простому варианту, т. е. в случае рассмотренного при-
мера $(n-k)$ -ступенному кодирующему устройству.

Декодирующее устройство призвано обнаруживать и
устранять ошибки. Для исправления однократных ошибок
оно реализуется по схеме, аналогичной кодирующему
устройству. Единственное отличие состоит в том, что связи
от g_1 до g_{n-k-1} осуществляются не с входной, а с выходной
цепи (рис. 3.7). Принимаемый вектор вводится в декоди-
рующую схему последовательными шагами. При отсутст-
вии ошибки после окончания приема кодовой группы ре-

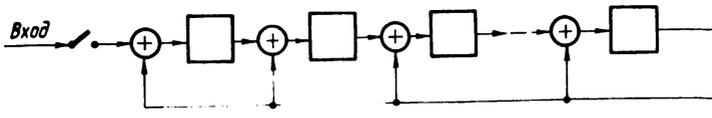


Рис. 3.7. Декодирующее устройство для исправления однократных
ошибок.

гистр декодирующего устройства заполнен нулями. Если хотя бы одна ячейка содержит единицу, это указывает на наличие ошибки в принятой кодовой комбинации. Для установления места однократной ошибки декодирующее устройство следует отключить от приемного аппарата, так чтобы оно продолжало работать «на себя». Номер шага, на котором в первой триггерной ячейке появится единица, а во всех остальных — нули, будет соответствовать номеру искаженного символа (считываемого справа налево).

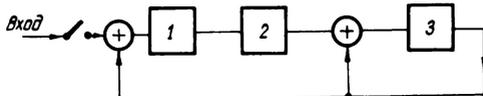


Рис. 3.8. Декодирующее устройство для полинома $g(x) = 1 + x^2 + x^3$.

Заполнение схемы декодирующего регистра (рис. 3.8) при подаче на нее последней, 8-й, кодовой комбинации показано в табл. 3.10.

Таблица 3.10

После шага	Ячейки регистра		
	1	2	3
1	0	—	—
2	1	0	—
3	0	1	0
4	1	0	1
5	0	1	1
6	0	0	0
7	0	0	0

В случае искажения пятого символа той же комбинации получаем следующую картину, показанную в табл. 3.11.

Определенные видоизменения циклических кодов широко используются также для обнаружения пакетных ошибок.

Таблица 3.11

После шага	Ячейки регистра		
	1	2	3
4	1	0	1
5	1	1	1
6	0	1	0
7	0	0	1

При работе «на себя»

1	1	0	1
2	1	1	1
3	1	1	0
4	0	1	1
5	1	0	0

3.5. НЕПРЕРЫВНЫЕ КОДЫ

При использовании непрерывных кодов кодирование и декодирование совершается непрерывно над последовательностью символов. Простейшим из этих кодов является код Хагелбаргера, или код $(1/2)$. Это обозначение отражает тот факт, что в коде за каждым информационным символом следует один контрольный. Код Хагелбаргера способен исправлять пакетные (серийные) ошибки с длиной пакетов, равной или меньшей b , при условии, что две соседние пакетные ошибки разделены промежутком правильно воспринятых символов длиной, равной или большей $3b+1$. Длина пакета b кратна n (в нашем случае 2). Выбранная кратность определяет вид кодирующего и деко-

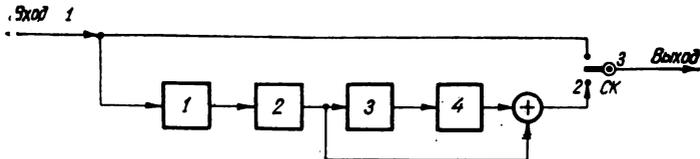


Рис. 3.9. Кодирующее устройство непрерывного кода $(1/2)$ для $b=4$.

дирующего устройств. Кодирующее устройство кода (1/2) в случае, если $b=4$, представляет собой сдвигающий регистр из 4 ступеней со «связью вперед», на выходе которого расположен синхронный коммутатор СК (рис. 3.9). На вход I этого устройства подается последовательность информационных импульсов, а с его выхода $З$ снимается последовательность чередующихся информационных и контрольных импульсов.

В качестве примера рассмотрим кодирование последовательности информационных импульсов (читаемых справа налево) ... 1 0 1 1 0 1 1 1 0 0 1. Вводя эту последовательность в кодирующее устройство, на выходе 2 сдвигающего регистра получаем последовательность контрольных импульсов, порождаемую информационными импульсами. Порядок этого порождения показан в табл. 3.12.

Таблица 3.12

После шага	Ячейки регистра				Выход 2
	1	2	3	4	
1	1	—	—	—	0
2	0	1	—	—	0
3	0	0	1	—	1
4	1	0	0	1	0
5	1	1	0	0	1
6	1	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	1	1	0
9	1	1	0	1	1
10	0	1	1	0	0
11	1	0	1	1	1

На выходе кодирующего устройства, в свою очередь, получаем последовательность информационных символов, закодированную рекуррентным кодом (1/2): ... 1 1 0 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 1 1 0 0 0 0 1.

Декодирующее устройство (рис. 3.10) состоит из двух частей. Первая из них вырабатывает исправляющую последовательность импульсов, а вторая производит само исправление. Расположенный на входе декодирующего устройства синхронный коммутатор разделяет принимаемую последовательность на информационные и контрольные символы. Информационные символы направляются на

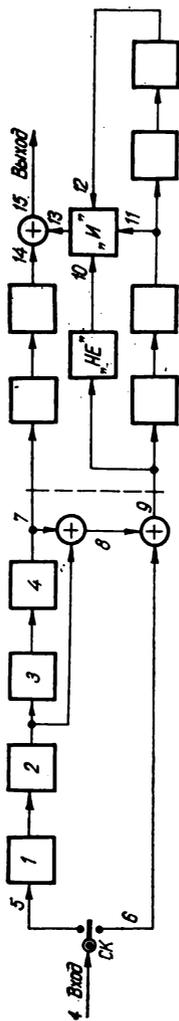


Рис. 3.10. Декодирующее устройство непрерывного кода (1/2) для $b=4$.

вход 5, контрольные — на вход 6. В итоге на верхнем выходе 7 первой части декодирующего устройства получаем сдвинутую на четыре регистра последовательность информационных импульсов, а на нижнем выходе 9 — исправляющую последовательность символов. Если принятая последовательность не содержит ошибок, то исправляющая состоит из одних нулей, так как первая часть декодирующего устройства, по сути дела, повторяет кодирующее устройство. При наличии ошибок в принятой последовательности исправляющая последовательность будет содержать единицы на местах ошибок в последовательности проверочных символов и единицы, сдвинутые на $\frac{b}{2}$

и b символов по сравнению с местами ошибок в последовательности информационных символов.

Часть схемы, осуществляющая исправление, содержит, по сравнению с предыдущими схемами, два новых элемента. Это ячейка отрицания «Не», в которой происходит замена кодового символа на противоположный, и ячейка «И», которая, имея три входа 10, 11, 12, выдает на выход 13 единицу только в том случае, если единицы поступают на все три ее входа. Обе эти ячейки, так же как и суммирующая ячейка, — чисто операционные, и накопления («сдвига») символов в них не происходит.

Рассматривая действия описанного декодирующего устройства на нашем примере, в котором будем полагать

Таблица 3.13

После шага	Ячейки регистра				Выход 8	Выход 9
	1	2	3	4		
1	1	—	—	—	0	0
2	1	1	—	—	0	0
3	1	1	1	—	1	1
4	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	0	1
6	1	1	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0	1
8	1	0	1	1	0	0
9	1	1	0	1	1	0
10	0	1	1	0	0	0
11	1	0	1	1	1	0

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ

4.1. КЛАССИФИКАЦИЯ СИГНАЛОВ

Для анализа процессов, проходящих в системах связи, необходимо уметь описывать сигналы математически. В зависимости от существующих возможностей такого описания сигналы подразделяются на детерминированные (регулярные) и случайные (нерегулярные).

Детерминированные сигналы — это такие сигналы, которые могут быть представлены однозначной функцией времени. Функции времени, в свою очередь, подразделяются на периодические и непериодические. Самым простым видом периодического сигнала является гармоническое колебание, определяемое выражением

$$f(t) = A \cos(\Omega t + \psi), \quad \text{при } -\infty < t < +\infty. \quad (4.1)$$

Строго гармоническое колебание называется монохроматическим: его спектр состоит из одной спектральной линии. Таких колебаний в природе не существует. Реальные сигналы имеют свое начало и конец, и поэтому их спектр неизбежно «размывается». Любой сложный периодический сигнал может быть представлен в виде суммы гармонических колебаний с частотами, кратными его основной частоте. Основной характеристикой сложного периодического сигнала является его спектральная функция, содержащая информацию об амплитудах и фазах отдельных гармоник, составляющих сложное колебание.

Непериодический детерминированный сигнал отличается тем, что для него не существует конечного отрезка времени T , для которого

$$f(t) = f(t + T). \quad (4.2)$$

Непериодический сигнал ограничен во времени. Его основной характеристикой также является спектральная

функция. По сравнению с периодическим сигналом структура спектра непериодического сигнала имеет некоторые особенности.

Случайные сигналы принимают значения, которые точно предсказать невозможно. Колебания, вырабатываемые некоторым конкретным источником, могут быть детерминированными для одного наблюдателя (знающего закон их образования) и случайными для другого. Все сигналы, посредством которых передается информация, с точки зрения их получателя, являются случайными, так как сообщение о заранее известном событии явно не содержит никакой информации.

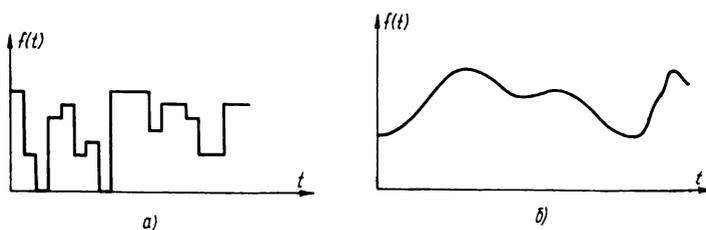


Рис. 4.1. Случайные сигналы:
а — дискретные; б — непрерывные.

По своему строению случайные сигналы могут быть дискретными или непрерывными. Дискретным сигналом именуется такой, который может принимать только конечное, вполне определенное, дискретное количество значений. Случайным является здесь принятие сигналом того или иного из возможных значений. Его дискретность заключается в ограниченности количества этих значений. Непрерывный случайный сигнал в отличие от дискретного может принимать бесконечное количество разных значений (рис. 4.1).

4.2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ

Из определения периодичности следует, что каждый сигнал (функция), подходящий под это определение, относится к группе детерминированных сигналов. Если эта функция, кроме того, удовлетворяет в пределах одного

периода так называемым условием Дирихле, т. е., во-первых, всюду однозначна, конечна и кусочно-непрерывна и, во-вторых, имеет ограниченное число максимумов и минимумов, то ее можно представить в виде бесконечной суммы ортогональных функций, т. е. ортогонального ряда, имеющего вид

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n q_n(t), \quad (4.3)$$

в котором q_n, q_{n+1}, \dots является множеством линейно-независимых функций, т. е. таких функций, ни одна из которых не может быть выражена линейной комбинацией остальных функций.

Для математически корректного осуществления разложения коэффициенты r_n должны выбираться так, чтобы выполнялся критерий сходимости в среднем или среднем квадратическом, т. е.

$$\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f(t) - \sum_{n=1}^{\infty} r_n q_n(t) \right]^2 dt = 0. \quad (4.4)$$

Это требование для систем ортогональных или ортонормированных функций выполняется сравнительно просто. Ортогональными именуется функции, выполняющие в интересующем нас промежутке от t_1 до t_2 (на протяжении одного периода) условие

$$\int_{t_1}^{t_2} q_n(t) q_m(t) v(t) dt = 0, \quad (4.5)$$

где $n \neq m$. Включенная в выражение (4.5) функция $v(t)$ называется базовой или весовой. Ортонормированными именуется те функции, которые, кроме условия (4.5), выполняют также условие

$$\int_{t_1}^{t_2} q_n^2(t) v(t) dt = 1. \quad (4.6)$$

Легко убедиться, что основная тригонометрическая система функций $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$ ортогональна с весовой функцией, равной единице, но не ортонормированна.

Расчет коэффициентов r_n сводится к следующему. Обе стороны исходного уравнения (4.3) умножаются на $q_n(t)$ и $v(t)$ и интегрируются в промежутке от t_1 до t_2 , т. е.

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) q_n(t) v(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} q_n(t) v(t) \sum_{n=1}^{\infty} r_n q_n(t) dt.$$

В силу ортогональности функций получаем

$$r_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) q_n(t) v(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} q_n^2(t) v(t) dt}. \quad (4.7)$$

Если система функций ортонормированна, то знаменатель формулы (4.7) равняется единице.

Одним из наиболее распространенных способов представления детерминированных сигналов является ряд Фурье:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \Omega t + b_n \sin n \Omega t). \quad (4.8)$$

В этом выражении A_0 , a_n и b_n — независимые от времени коэффициенты, которые следует понимать как A_0 — среднее значение постоянной составляющей сигнала (функции), а a_n и b_n — амплитуды членов разложения, или гармоник. Перечисленные коэффициенты вычисляются по формулам

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) dt; \quad (4.9)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cos n \Omega t dt; \quad (4.10)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \sin n \Omega t dt. \quad (4.11)$$

Приведенные выражения получены путем умножения обеих сторон уравнения ряда Фурье (4.8) на одну и ту же тригонометрическую функцию ($\sin n\Omega t$, $\cos n\Omega t$) и интеграции их в пределах периода.

Если рассматриваемая функция $f(t)$ четная, т. е. $f(t) = f(-t)$, то b_n обращаются в нуль; если нечетная, т. е. $f(t) = -f(-t)$, то a_n обращаются в нуль.

Представление функции в виде ряда Фурье является ее спектральным выражением, так как раскрывает частотный состав рассматриваемого сигнала. Спектр периодической функции называется линейчатым, или дискретным, так как состоит из отдельных линий, соответствующих дискретным частотам.

Кроме приведенной формы записи ряда Фурье (4.8) распространена также тригонометрическая форма, имеющая перед ранее рассмотренной некоторые формально-математические преимущества. Она имеет вид

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t - \psi_n). \quad (4.12)$$

Ее коэффициенты выражаются через ранее вычисленные [см. выражения (4.9) — (4.11)] путем несложных преобразований. Учитывая, что

$$\cos(n\Omega t - \psi_n) = \cos n\Omega t \cos \psi_n + \sin n\Omega t \sin \psi_n,$$

получаем

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \psi_n \cos n\Omega t + A_n \sin \psi_n \sin n\Omega t),$$

следовательно,

$$a_n = A_n \cos \psi_n, \quad b_n = A_n \sin \psi_n,$$

или

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad (4.13)$$

$$\psi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}. \quad (4.14)$$

В случае такого представления сигнала коэффициент A_n именуется модулем амплитуды, а ψ_n — фазой соответствующей гармонике.

В ряде случаев выгодно пользоваться комплексной модификацией приведенного ряда (4.8). Ее получают, используя преобразования формулы Эйлера, т. е. выражения

$$\cos n\Omega t = \frac{e^{jn\Omega t} + e^{-jn\Omega t}}{2} \quad (4.15)$$

и

$$\sin n\Omega t = \frac{e^{jn\Omega t} - e^{-jn\Omega t}}{2j}. \quad (4.16)$$

Подставляя эти выражения в формулу (4.8), получаем

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2} (e^{jn\Omega t} + e^{-jn\Omega t}) + \frac{b_n}{2j} (e^{jn\Omega t} - e^{-jn\Omega t}) \right],$$

или

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\Omega t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\Omega t} \right]. \quad (4.17)$$

Исходя из того, что, согласно выражениям (4.10) и (4.11),

$$\frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cos n\Omega t dt - \frac{j}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \sin n\Omega t dt,$$

и учитывая равенства (4.15) и (4.16), это выражение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{2T} & \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) (e^{jn\Omega t} + e^{-jn\Omega t}) dt - \right. \\ & \left. - \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) (e^{jn\Omega t} - e^{-jn\Omega t}) dt \right] = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$\frac{a_n + jb_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{jn\Omega t} dt.$$

А так как в соответствии с выражением (4.9)

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^0 dt,$$

то представляется возможным формулу (4.17) записать в виде

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\Omega t}, \quad (4.18)$$

где

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt \quad (4.19)$$

является комплексной амплитудой n -й гармоники для $n = -\infty \div +\infty$.

Формулы (4.18) и (4.19) именуется парой преобразований Фурье. Вторая из них позволяет найти спектр, т. е. совокупность гармонических составляющих, образующих в сумме исходную функцию $f(t)$. Первая дает возможность вычислить функцию, если известны ее гармонические составляющие.

Комплексная амплитуда C_n связана с ранее введенными коэффициентами следующим образом:

$$C_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{A_n e^{-j\psi_n}}{2}. \quad (4.20)$$

Выраженный формулой (4.18) спектр распространяется на значения n от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. как на положитель-

ные, так и на отрицательные частоты. Конечно, отрицательные частоты в природе не существуют. В полученном выражении они имеют чисто формальный, математический характер, обусловленный применением комплексной формы записи для представления реальной функции времени.

Одним из важнейших свойств периодического сигнала является то, что полная мощность, выделяемая им на какой-либо нагрузке (ради упрощения расчета обыкновенно рассматривается мощность, выделяемая на сопротивлении в 1 ом), является суммой средних мощностей, выделяемых постоянной составляющей и каждой из гармоник сигнала в отдельности. Таким образом, по отгибающей гармоник можно судить о распределении мощности в спектре периодического сигнала. Доказать изложенное можно, основываясь на том, что разложение функции в ряд Фурье дает ряд ортогональных функций. Так,

$$\overline{f^2(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt. \quad (4.21)$$

где $\overline{f^2(t)}$ обозначает усредненное во времени значение. Сопротивление нагрузки принято равным 1 ом . Подставляя в выражение (4.21) вместо функции $f^2(t)$ ее разложение в ряд Фурье (4.8), получаем

$$\overline{f^2(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T \left[A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t) \right]^2 dt. \quad (4.22)$$

Следовательно, получаем сумму интегралов, содержащих следующие члены: 1) A_0^2 ; 2) $a_n^2 \cos^2 n\Omega t$; 3) $b_n^2 \sin^2 n\Omega t$; 4) произведения косинусов и синусов, имеющих аргументы неодинаковой кратности. Эти последние при интегрировании в пределах периода в силу условия ортогональности превращаются в нуль. Таким образом, выражение (4.22) принимает вид

$$\overline{f^2(t)} = \frac{1}{T} \left\{ A_0^2 T + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^T a_n^2 \frac{1}{2} (1 + \cos 2n\Omega t) dt + \int_0^T b_n^2 \frac{1}{2} (1 - \cos 2n\Omega t) dt \right] \right\},$$

или

$$\overline{f^2(t)} = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2. \quad (4.23)$$

4.3. НЕПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ

Любой физически реализуемый сигнал с конечной энергией обязательно ограничен во времени, или, иными словами, функция, изображающая такой сигнал, абсолютно интегрируема. В связи с этим непериодический сигнал может быть выражен соответственно модифицированной формулой периодического сигнала. Модификация, которую удобно осуществить в комплексной форме записи, заключается в приравнении периода колебания бесконечности и следующих из этого несложных математических преобразований.

Подставляя выражение (4.19) в формулу (4.18), получаем:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\Omega t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Omega t} dt \right] e^{jn\Omega t}$$

Так как

$$T = \frac{1}{F} = \frac{2\pi}{\Omega}, \quad (4.24)$$

то деление на бесконечно длинный период может быть заменено умножением на $d\Omega$, что, в свою очередь, превращает процесс суммирования в интегрирование и произведение величин $n\Omega$ — в текущую частоту Ω .

Следовательно,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt e^{j\Omega t} d\Omega. \quad (4.25)$$

Из этого выражения можно выделить величину

$$\Phi(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt, \quad (4.26)$$

которая играет роль огибающей амплитуд, составляющих спектр, и называется спектральной плотностью, спектральной функцией или спектральной характеристикой соответствующей непериодической функции. Она именуется также прямым преобразованием данной функции по Фурье. Выражение

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega, \quad (4.27)$$

представляющее зависимость непериодической функции от ее спектральной характеристики, называется обратным преобразованием Фурье.

Сличая комплексные формы записи периодического и непериодического сигналов, получаем

$$\Phi(\Omega) = C_n T = \frac{C_n}{F}. \quad (4.28)$$

Это значит, что спектральную плотность $\Phi(\Omega)$ можно получить, если комплексную амплитуду n -й гармоники разделить на полосу частот, отделяющую соседние линии дискретного спектра, т. е. $\Phi(\Omega)$ равна плотности амплитуд и обладает размерностью амплитуда на герц. Таким образом, огибающая сплошного спектра (модуль спектральной плотности) непериодической функции и огибающая линейчатого спектра периодической функции совпадают по форме и отличаются только масштабом. Спектральная плотность $\Phi(\Omega)$ обладает всеми основными свойствами комплексной амплитуды C_n .

Колебания, не удовлетворяющие условиям Дирихле, не могут быть представлены преобразованием Фурье, так как не существует соответствующих им спектральных функций. Например, $f(t) = E$ при $t \geq 0$ и $f(t) = 0$ при $t < 0$. Для этой функции

$$\begin{aligned} \Phi(\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_0^{\infty} E e^{-j\Omega t} dt = \\ &= E \frac{1}{-j\Omega} e^{-j\Omega t} \Big|_0^{\infty} = \frac{E}{j\Omega} (1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-j\Omega t}), \end{aligned}$$

однако $e^{-j\Omega t} = \cos \Omega t - j \sin \Omega t$ и при $t \rightarrow \infty$ не стремится

ни к какому пределу, следовательно, спектральная функция не определена. Причина в том, что это колебание не является абсолютно интегрируемым.

В таких случаях вместо преобразования Фурье выгодно пользоваться так называемым преобразованием Лапласа. Для этого преобразуемое колебание выражается так, чтобы при $t < 0$ $f(t) = 0$. Суть преобразования состоит во введении понятия комплексной частоты, дающем возможность преодолеть некоторые математические трудности. Комплексная частота обозначается через p и выражается как

$$p = c + j\Omega. \quad (4.29)$$

Символически преобразования Лапласа записываются в виде

$$L[f(t)] = \Phi(p) \quad (4.30)$$

и

$$L^{-1}[\Phi(p)] = f(t), \quad (4.31)$$

а спектральная функция $\Phi(p)$ называется отображением оригинала $f(t)$.

Исходя из вышеизложенного пара преобразований Лапласа для непериодического сигнала может быть записана следующим образом:

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (4.32)$$

и

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \Phi(p) e^{pt} dp. \quad (4.33)$$

Преобразование Лапласа дает возможность рассматривать и анализировать устройства в условиях более широкого класса колебаний, чем это позволяет преобразование Фурье. Заменяя в отображении $f(t)$ p на $j\Omega$, можем получить соответствующие спектральные функции.

Энергия, выделяемая непериодическим сигналом на одноомном сопротивлении, выражается формулой

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt. \quad (4.34)$$

Записывая ее значение через модуль спектральной плотности сигнала $\Phi(\Omega)$, можно определить распределение этой энергии по спектру непериодического колебания:

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \right] dt,$$

что, меняя порядок интегрирования, можно переписать в форме

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\Omega) d\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j\Omega t} dt$$

или

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\Omega) \Phi(-\Omega) d\Omega.$$

Так как произведение двух сопряженных чисел равно квадрату их модуля, то

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(\Omega)|^2 d\Omega$$

или

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\Phi(\Omega)|^2 d\Omega. \quad (4.35)$$

Последнее выражение известно под названием равенства Персеваля. Оно определяет полную энергию, выделяемую сигналом $f(t)$ за все время его существования. Средняя мощность для любой абсолютно интегрируемой функции, считая ее период бесконечным, равна нулю. Следовательно, $|\Phi(\Omega)|^2$ есть энергия сигнала, приходящаяся на 1 гц текущей частоты Ω , или спектральная плотность энергии сигнала.

Формула (4.35) используется для расчета необходимой полосы пропускания канала связи. Эта полоса обозначается $\Omega_{\text{макс}}$ и выбирается так, чтобы ее ограниченность не вызвала потерь энергии, превышающих допустимую

величину, например 10%. Для этого относительно $\Omega_{\text{макс}}$ решается уравнение

$$0,9 \int_0^{\infty} |\Phi(\Omega)|^2 d\Omega = \int_0^{\Omega_{\text{макс}}} |\Phi(\Omega)|^2 d\Omega. \quad (4.36)$$

Колебание или сигнал $f(t)$ всегда является действительной функцией времени, однако компактность комплексных соотношений привела к частому использованию комплексного представления негармонических колебаний. Чтобы такое представление было однозначным во всех отношениях, оно осуществляется аналитическими, или голоморфными, функциями. Они, являясь по форме функциями двух независимых переменных x и y , фактически зависят только от комбинации этих переменных $(x + jy)$, т. е. являются функцией одной независимой переменной z .

Аналитичность комплексной функции проверяется условиями Коши—Римана, согласно которым относительно функции $[P(x, y) + jQ(x, y)]$ всегда должны выполняться равенства

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Для достижения аналитичности комплексной функции, посредством которой желательно представить реальный

сигнал $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n q_n(t)$, последний записывается в форме

$$\psi(t) = f(t) + jg(t) \quad (4.37)$$

как функция комплексного времени $t + j\tau$.

При этом мнимую часть выражения (4.37) следует исчислять по формуле

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad (4.38)$$

и, следовательно,

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (4.39)$$

Соотношения (4.38) и (4.39) называются парой преобразований Гильберта. $f(t)$ и $g(t)$ именуется сопряженными колебаниями.

Для случая гармонического колебания $f(t) = A \cos \Omega t$ получаем

$$\psi(t) = A (\cos \Omega t + j \sin \Omega t),$$

а для случая гармонического колебания $f(t) = A \sin \Omega t$ имеем

$$\psi(t) = A (\sin \Omega t - j \cos \Omega t).$$

Таким образом, преобразование Гильберта для гармонического колебания сводится к его перемещению на $\frac{\pi}{2}$ в сторону запаздывания. Если колебание $f(t)$ состоит из суммы гармонических колебаний, то каждая гармоническая составляющая $g_n(t)$ будет квадратурна (повернута на $\frac{\pi}{2}$ в сторону отставания) соответствующей составляющей $f_n(t)$. Хотя формы $f(t)$ и $g(t)$ различны, однако представляемые ими колебания имеют одинаковый спектр амплитуд.

4.4. СЛУЧАЙНЫЕ СИГНАЛЫ

Появление сигнала на приемной стороне является случайным событием. Нам известны лишь совокупность возможных значений сигнала, вероятности этих значений, а также некоторые средние характеристики сигнала. Возможные значения сигнала называют выборочными значениями, а все множество этих значений — выборочным пространством. При двоичном кодировании выборочное пространство состоит из двух элементов — посылок и пауз. Объединяя в себе свойства функции времени и случайной величины, сигнал связи должен рассматриваться как случайный процесс.

Используемые в радиотехнике непрерывные случайные сигналы обычно представляют собой сумму большого количества гармонических колебаний, амплитуды и фазы которых либо совершенно независимы друг от друга, либо слабо связаны между собой. Распределение вероятностей таких сигналов независимо от законов распределения сла-

гаемых стремится к нормальному (гауссову) закону (см. П2, стр. 184).

Случайные процессы делятся на стационарные и нестационарные. Стационарными называются те случайные процессы, функции распределения которых не зависят от момента начала отсчета времени. И наоборот: если вероятностные характеристики случайного процесса не инвариантны по отношению к произвольному смещению момента начала отсчета времени, то процесс нестационарный. Из приведенного определения следует, что для стационарных случайных процессов среднее значение случайной величины и ее дисперсия — постоянные, не зависящие от времени величины. Автокорреляционная функция (см. П2, стр. 181) стационарного случайного процесса зависит не от абсолютных значений времени t_1 и t_2 , а только от их разности $\tau = t_2 - t_1$. Стационарный случайный процесс с равномерным частотным спектром называют белым шумом, по аналогии с белым цветом, в котором представлены все участки спектра.

Хотя во многих ситуациях допущение стационарности исследуемого случайного процесса можно считать достаточно точным, имеется большое число задач, при решении которых следует считаться с нестационарностью случайных процессов. Например, сумма стационарного и детерминированного процессов в общем является нестационарным процессом. Таким образом, в вероятностном смысле нестационарны и модулированные колебания, даже в предположении, что несущая частота модулируется стационарным случайным процессом.

Случайные процессы делятся также на эргодические и неэргодические. Процесс называется эргодическим, если любая его вероятностная характеристика, полученная усреднением по множеству возможных реализаций, с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, равна временному среднему, полученному усреднением за достаточно большой промежуток времени одной единственной реализации случайного процесса. Для эргодического процесса усреднение по множеству и усреднение по времени эквивалентны. Стационарность является необходимым (но не достаточным) условием эргодичности.

Кроме того, случайные процессы разделяются на независимые от своей предыстории и зависящие от нее. Независимые — это те, в которых вероятность нахождения

системы в некотором состоянии зависит лишь от того состояния, в котором система находилась в момент времени, бесконечно близкий к рассматриваемому, и не зависит от тех состояний, в которых система находилась в более ранние моменты времени. Процессы, не зависящие от предыстории, называются марковскими. Для марковских процессов дополнительное знание значений, которые наблюдались в предыдущие моменты времени, не меняет условной вероятности наступления некоторого события.

Случайные процессы характеризуются функциями времени (моментными функциями), автокорреляции и частоты (см. П2, стр. 179).

4.5. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

Степень взаимной зависимости случайных значений процесса в различные моменты времени характеризуется автокорреляционной функцией. Физическая сущность корреляционных функций следует из рассмотрения их значения для детерминированных сигналов.

Автокорреляционная функция для детерминированного сигнала имеет вид

$$B(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) f(t + \tau) dt, \quad (4.40)$$

где τ — величина временного сдвига сигнала.

При большой длительности реализации автокорреляционную функцию можно находить по формуле

$$B(\tau) = \sum_{\tau} x_t x_{t+\tau} P(x_t, x_{t+\tau}). \quad (4.41)$$

$B(\tau)$ характеризует степень связи сигнала со своей копией, сдвинутой на величину τ по оси времени. Функция достигает максимума при $\tau=0$, когда

$$B(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f^2(t) dt = \overline{f^2(t)}, \quad (4.42)$$

т. е. когда автокорреляционная функция вырождается

в среднюю мощность сигнала, выделяемую на одноомном сопротивлении.

Автокорреляционную функцию флуктуаций можно выразить как

$$B_{\Phi}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [f(t) - \overline{f(t)}] [f(t + \tau) - \overline{f(t)}] dt = \\ = B(\tau) - |\overline{f(t)}|^2. \quad (4.43)$$

При $\tau=0$ автокорреляционная функция флуктуаций определяет среднюю мощность процесса за вычетом постоянной составляющей, т. е. дисперсию

$$B_{\Phi}(0) = B(0) - |\overline{f(t)}|^2 = \sigma^2. \quad (4.44)$$

Из приведенных формул видно, что автокорреляционная функция стационарного процесса является четной функцией τ . Часто употребляется также понятие нормированной автокорреляционной функции, которая определяется соотношением

$$R(\tau) = \frac{B_{\Phi}(\tau)}{B_{\Phi}(0)} = \frac{B_{\Phi}(\tau)}{\sigma^2}. \quad (4.45)$$

Чем более плавно изменяется во времени $f(t)$, тем больше интервал τ , в пределах которого наблюдается статистическая связь между мгновенными значениями $f(t)$ и $f(t + \tau)$. Для периодического сигнала его автокорреляционная функция также периодическая, причем периоды сигнала и его автокорреляционной функции совпадают.

Входящее в формулы (4.40)—(4.43) время T при решении практических задач обыкновенно берут конечным, в

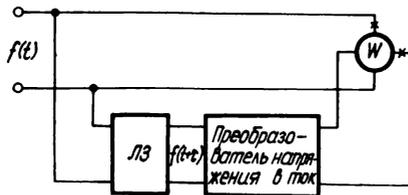


Рис. 4.2. Схема включения ваттметра, измеряющая автокорреляционную функцию.

5—10 раз превосходящим период самой низкочастотной составляющей, входящей в состав $f(t)$. В случае периодических функций возможно интегрирование по периоду.

Автокорреляционную функцию можно осмыслить как показания своеобразно включенного ваттметра (рис. 4.2). Усредняя произведение токов во времени, причем период усреднения значительно больше времени задержки τ , создаваемого линией задержки ЛЗ, ваттметр показывает величину, пропорциональную $B(\tau)$. В случае синусоидального сигнала $f(t) = A \sin(\Omega t + \psi)$ получаем

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} A^2 \sin(\Omega t + \psi) \sin(\Omega t + \Omega\tau + \psi) d\Omega t,$$

что, учитывая зависимость

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

дает

$$B(\tau) = \frac{A^2}{4\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{+\pi} \cos \Omega \tau d\Omega t - \int_{-\pi}^{+\pi} \cos [2(\Omega t + \psi) + \Omega\tau] d\Omega t \right\}$$

или

$$B(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \Omega\tau.$$

Для случайных процессов величина $B_{\Phi}(\tau)$ (а следовательно, и $R(\tau)$) уменьшается с увеличением τ и уже при сравнительно небольших τ становится достаточно малой. Интервал времени от $\tau=0$ до $\tau=\tau_0$, при котором $B_{\Phi}(\tau)$ становится пренебрежимо малой, называют интервалом автокорреляции.

Этот интервал может определяться по-разному. Иногда его рассчитывают как время τ_{β} , при котором нормированная автокорреляционная функция $R(\tau)$ уменьшается до определенного значения β (рис. 4.3, а), т. е. решается уравнение

$$R(\tau_{\beta}) = \beta. \quad (4.46)$$

Другой способ расчета интервала автокорреляции τ_0 сводится к определению половины ширины прямоуголь-

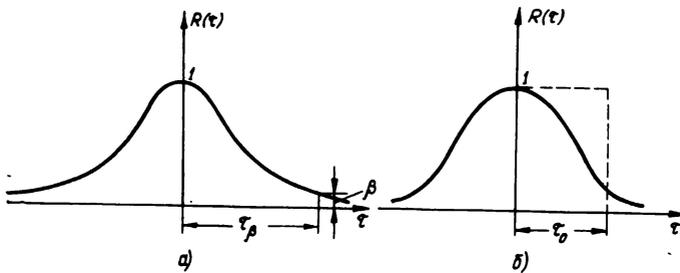


Рис. 4.3. Принцип определения интервала автокорреляции: а — исходя из доли $R(0)=1$; б — эквивалентным в смысле площади прямоугольником.

ника, площадь которого при высоте, равной единице, соответствует площади, ограниченной кривой коэффициента корреляции и осью координат (рис. 4.3, б), т. е. вычисляется интеграл

$$\tau_0 = \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau. \quad (4.47)$$

Взаимную зависимость двух разных случайных процессов оценивают функцией их взаимной корреляции, которая записывается:

$$B_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f_1(t) f_2(t + \tau) dt. \quad (4.48)$$

Эта функция не обязательно достигает максимума при $\tau=0$ и также не обязательно будет четной относительно τ . В отличие от автокорреляционной функции, которая не дает никакой информации о начальной фазе сигнала, функция взаимной корреляции двух гармонических колебаний зависит от разности фаз. Она остается неизменной при перемене чередования индексов и изменении знака аргумента, т. е.

$$B_{12}(\tau) = B_{21}(-\tau). \quad (4.49)$$

Для двух случайных процессов взаимная корреляционная функция характеризует степень их связи. Если процессы

независимы, т. е. некоррелированы, то $B_{12}(\tau) = 0$, однако это утверждение не имеет обратной силы.

Для автокорреляционной функции случайного процесса может быть введено понятие ее прямого преобразования по Фурье, аналогичного определению спектральной плотности детерминированного непериодического сигнала.

Принимая, что автокорреляционная функция $B_{\Phi}(\tau)$ вне пределов от $t = -T$ до $t = +T$ равна нулю, по аналогии с формулой (4.26) можно написать выражение спектральной плотности (интенсивности) этой функции, называемое также энергетическим спектром функции $B_{\Phi}(\tau)$:

$$\Phi_1(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\Phi}(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau. \quad (4.50)$$

Но так как

$$B_{\Phi}(\tau) e^{-j\Omega\tau} = B_{\Phi}(\tau) [\cos \Omega\tau - j \sin \Omega\tau], \quad (4.51)$$

функции $B_{\Phi}(\tau)$ и $\cos \Omega\tau$ четные, а $\sin \Omega\tau$ нечетная, то формула (4.50) может быть переписана в виде

$$\Phi_1(\Omega) = 2 \int_0^{+\infty} B_{\Phi}(\tau) \cos \Omega\tau d\tau. \quad (4.52)$$

Учитывая, что верхним пределом интегрирования, по существу, является интервал автокорреляции τ_0 , можно утверждать, что приведенная функция действительна и положительна при всех частотах, четна и не содержит информации о фазе. Последнее обозначает, что ей может соответствовать несколько различных функций времени, отличающихся своей начальной фазой.

Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье [как в формуле (4.27)], можно выразить зависимость автокорреляционной функции от ее спектральной плотности:

$$B_{\Phi}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\Omega) e^{j\Omega\tau} d\Omega. \quad (4.53)$$

Последнее выражение, учитывая свойство четности, можно преобразовать в равенство

$$B_{\Phi}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Phi_1(\Omega) \cos \tau\Omega d\Omega. \quad (4.54)$$

Формулы (4.50) и (4.53), а также, соответственно, формулы (4.52) и (4.54) были предложены А. Я. Хинчиным и Н. Винером. В литературе их называют формулами Винера—Хинчина. Из них следует, что чем шире энергетический спектр случайного процесса, тем меньше время корреляции и, наоборот, чем больше время корреляции, тем уже спектр процесса.

Положив $\tau=0$, получаем:

$$B_{\Phi}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\Omega) d\Omega = \sigma^2, \quad (4.55)$$

т. е. значение автокорреляционной функции при $\tau=0$ определяется через $\Phi_1(\Omega)$.

4.6. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Введенное для случайных процессов понятие спектральной плотности автокорреляционной функции, или энергетический спектр функции $B_{\Phi}(\tau)$, можно рассматривать как спектральную плотность дисперсии, являющейся, в свою очередь, средней мощностью, выделяемой на сопротивление в 1 ом. Эта мощность распределяется по частотам в некоторой полосе, зависящей от механизма образования случайного процесса и формы частотной характеристики цепи, через которую пропущен данный процесс. Таким образом, размерность энергетического спектра является отношением мощности к полосе частот.

Энергетический спектр случайного процесса можно найти по параметрам импульсов, которые его образуют. Определение сводится к суммированию средних квадратов отдельных гармонических составляющих (различных импульсов), т. е. энергетический спектр определяется квадратом модуля спектральной плотности элементарного импульса и средним числом этих импульсов за 1 сек.

Согласно формулам (4.34) и (4.35),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\Phi(\Omega)|^2 d\Omega. \quad (4.56)$$

Левая часть выражения — это формула энергии, выделяющейся на сопротивлении в 1 ом. Положим, что $f(t)$ является суммой двух функций, имеющих каждая свое изображение по Фурье. Тогда можно записать:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(t) + f_2(t)]^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\Phi_I(\Omega) + \Phi_{II}(\Omega)|^2 d\Omega.$$

Развертывая обе стороны выражения по формулам квадрата суммы и используя равенство удвоенных произведений слагаемых, получаем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi_I(\Omega) \Phi_{II}(\Omega) d\Omega.$$

Полагая далее, что $f_2(t) = f_1(t + \tau)$, записываем:

$$B_\Phi(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\Phi(\Omega)|^2 \cos \Omega\tau d\Omega, \quad (4.57)$$

а принимая $\tau = 0$, получаем:

$$B_\Phi(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\Phi(\Omega)|^2 d\Omega. \quad (4.58)$$

Формула (4.57) выражает автокорреляционную функцию $B_\Phi(\tau)$ через квадрат модуля спектральной плотности функции времени $f(t)$, а формула (4.58) описывает связь функции $B_\Phi(0)$ с энергией.

Сравнивая выражения (4.55) и (4.58), получаем:

$$\int_0^{\infty} \Phi_1(\Omega) d\Omega = \int_0^{\infty} |\Phi(\Omega)|^2 d\Omega. \quad (4.59)$$

Чем меньше длительность импульсов, образующих случайный процесс, тем шире энергетический спектр процесса. Если длительность импульсов стремится к нулю, то энергетический спектр процесса становится равномерным для всех частот. Такой стационарный процесс с равномерным энергетическим спектром называется белым шумом.

Рассмотренные зависимости подтверждают, что автокорреляционная функция содержит полную информацию о распределении энергии процесса по частотам, но не дает сведений о частотном распределении амплитуд и фаз спектральных составляющих реализации процесса.

Шириной энергетического спектра считают интервал частот, для которого значения $\Phi_1(\Omega)$ еще достаточно велики. Любые значения случайного процесса следует считать некоррелированными лишь в том случае, если процесс имеет бесконечно широкий спектр. Ограничение спектра сигнала всегда увеличивает корреляцию.

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И КВАНТОВАНИЕ

5.1. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ СИГНАЛА -- ТЕОРЕМА ОТСЧЕТОВ (КОТЕЛЬНИКОВА)

Дискретизация функции во времени заключается в замене данной непрерывной функции другой, решетчатой функцией, образованной путем прерывания исходной функции. Дискретизация допустима при условии, что новообразованная решетчатая функция дает возможность восстановить исходную функцию. Это условие выполняется соблюдением теоремы отсчетов, которая гласит, что всякий непрерывный сигнал, обладающий ограниченным спектром, полностью определяется своими дискретными значениями в моменты отсчетов, отстоящие друг от друга во времени на интервалы $\Delta t = \frac{1}{2F_{\max}}$, где F_{\max} — верхняя частота ограниченного спектра непрерывной функции.

Доказательство теоремы сводится к следующему.

Любой физически реализуемый, ограниченный во времени сигнал может рассматриваться как детерминированный и непериодический и тем самым допускает выражение его обратным преобразованием Фурье, т. е.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega, \quad (4.27)$$

где $\Phi(\Omega)$ — преобразование функции $f(t)$ по Фурье, т. е. спектральная плотность, или спектральная характеристика, функции $f(t)$, являющаяся огибающей амплитуд, составляющих спектр.

Так как непрерывный сигнал обладает ограниченным спектром (по формулировке теоремы), то $\Phi(\Omega)$ вне верх-

них частот, ограничивающих спектр, равна нулю, и выражение (4.27) принимает вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_{\max}}^{+\Omega_{\max}} \Phi(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega. \quad (5.1)$$

В моменты времени $t_n = \frac{n}{2F_{\max}} = n\Delta t$, где n — целые числа, а $F_{\max} = \frac{\Omega_{\max}}{2\pi}$, записанная функция принимает значения

$$f(t_n) = f\left(\frac{n\pi}{\Omega_{\max}}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_{\max}}^{+\Omega_{\max}} \Phi(\Omega) e^{j\Omega \frac{n\pi}{\Omega_{\max}}} d\Omega. \quad (5.2)$$

Спектральная плотность функции $\Phi(\Omega)$ — при условии, что эта функция периодически продолжена на всю ось Ω — в свою очередь может быть представлена рядом Фурье, т. е.

$$\Phi(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\Omega t}. \quad (5.3)$$

Так как разложению подлежит непрерывная функция частоты, то период вводится в выражение для времени, т. е.

$$t = \Delta t = \frac{\pi}{\Omega_{\max}}, \quad (5.4)$$

значит,

$$C_n = \frac{1}{2\Omega_{\max}} \int_{-\Omega_{\max}}^{+\Omega_{\max}} \Phi(\Omega) e^{-j\Omega \frac{n\pi}{\Omega_{\max}}} d\Omega. \quad (5.5)$$

Сравнивая выражения (5.2) и (5.5), видим, что

$$\int_{-\Omega_{\max}}^{+\Omega_{\max}} \Phi(\Omega) e^{-j\Omega \frac{n\pi}{\Omega_{\max}}} d\Omega = 2\pi f\left(\frac{-n\pi}{\Omega_{\max}}\right). \quad (5.6)$$

Подставляя полученный результат в формулу (5.5) и учитывая выражение (5.4), получаем:

$$C_n = \frac{\pi}{\Omega_{\max}} f\left(\frac{-n\pi}{\Omega_{\max}}\right) = \Delta t f(-n\Delta t). \quad (5.7)$$

Тогда спектральная функция запишется так:

$$\Phi(\Omega) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-n\Delta t) e^{jn\Omega\Delta t}, \quad (5.8)$$

а выражение начального колебания примет вид

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_{\text{макс}}}^{+\Omega_{\text{макс}}} \Delta t \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\Delta t) e^{-jn\Omega\Delta t} e^{j\Omega t} d\Omega = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta t}{2\pi} f(n\Delta t) \int_{-\Omega_{\text{макс}}}^{+\Omega_{\text{макс}}} e^{j\Omega(t-n\Delta t)} d\Omega. \end{aligned} \quad (5.9)$$

В результате интегрирования

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta t}{2\pi} f(n\Delta t) \left[\frac{e^{j\Omega_{\text{макс}}(t-n\Delta t)} - e^{-j\Omega_{\text{макс}}(t-n\Delta t)}}{j(t-n\Delta t)} \right]; \quad (5.10)$$

учитывая, что $\frac{\Delta t}{\pi} = \frac{1}{\Omega_{\text{макс}}}$, и применяя формулу Эйлера, получаем

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\Delta t) \frac{\sin \Omega_{\text{макс}}(t-n\Delta t)}{\Omega_{\text{макс}}(t-n\Delta t)}. \quad (5.11)$$

Последнее уравнение в аналитической форме выражает функцию $f(t)$ через ее дискретные значения, взятые в моменты времени t_n , т. е. с частотой $F_0 = 2F_{\text{макс}}$.

Теорема отсчетов представляет собой в основном некую математическую абстракцию, так как в ней говорится о сигнале с ограниченным спектром, в то время как любой ограниченный во времени непериодический сигнал обладает бесконечным спектром. Поэтому на практике частота дискретизации берется в 1,25—2,5 раза больше рассчитанной. Такой выбор является следствием компромисса между стремлением лучше воспроизвести исходный сигнал и условиями экономии ширины полосы при передаче информации.

Полученное выражение (5.11) представляет собой дискретизируемую функцию, которая выражена суммой всех отсчетов, произведенных через интервалы времени Δt и умноженных на соответствующую каждому из них функцию отсчетов, или интерполяционную функцию. Рассматривая графики функций отсчетов (рис. 5.1), видим, что в

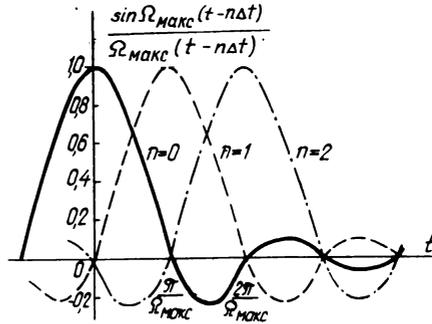


Рис. 5.1. График функций отсчетов.

моменты отсчетов все эти функции, кроме одной, имеют нулевые значения. Функция, для которой $t = n\Delta t$, имеет максимальное значение, т. е. равна единице. Таким образом, как легко предвидеть, значение функции в момент каждого отсчета определяется исключительно значением этого отсчета.

Для определения какого-либо значения функции в промежутках между отсчетами необходимо производить суммирование всех отсчетов, умноженных на соответствующие значения функций отсчетов, которые могут принимать значения от $-0,212$ до $+1$. Большим преимуществом ряда является простота определения его коэффициентов (отсчетов). Этот ряд впервые был применен в 1915 году Уиттакером.

Верхнюю частоту спектра непрерывной функции часто выбирают исходя из условия сохранения определенной доли энергии, содержащейся в передаваемых посылках.

5.2. КВАНТОВАНИЕ СИГНАЛА ПО УРОВНЮ

Поскольку любой сигнал приходит на приемник совместно с помехой, нет смысла передавать его точнее, чем это позволяет уровень помехи. Следовательно, целесообразно выбрать определенное конечное число уровней сигнала, подлежащих передаче. Представление величины сигнала в виде конечного числа разрешенных уровней называется квантованием по уровню. Оно сводится к тому, что вместо бесконечного количества возможных уровней

передается ближайший разрешенный, квантованный уровень, один из ограниченного количества m символов.

При квантовании область возможных значений сигнала делится на шаги квантования, которые могут быть равномерными (регулярными) или неравномерными (нерегулярными) в зависимости от примененной шкалы квантования, деления которой называются уровнями квантования (символами).

Оптимальным, в смысле точности воспроизведения квантованного сигнала, будет расположение уровня квантования в середине шага квантования. Возникающая при этом ошибка неустранима, так как является следствием квантования. Само квантование можно трактовать как прохождение сигнала через элемент системы, подверженный действию помехи, которую называют шумом квантования.

Внося помеху (шум) квантования, можно избавиться от всех других помех, если только при ретрансляции эти помехи не превышают половины шага квантования.

МОДУЛЯЦИЯ СИГНАЛОВ

6.1. АМПЛИТУДНАЯ МОДУЛЯЦИЯ

Модуляцией сигнала (несущей) называется изменение одного из его параметров другим сигналом, который является носителем информации. Модуляция производится с целью размещения сигнала — носителя информации — на высокочастотном сигнале — переносчике, который излучается антенной передатчика. Размещение одного сигнала на другом производится потому, что сигнал — носитель информации практически не в состоянии самостоятельно преодолевать расстояние. Модулируемый сигнал, или переносчик, как правило, имеет частоту, во много раз превышающую частоту модулирующего, информативного сигнала. Уровень модулируемого сигнала выше (больше) уровня модулирующего сигнала. В виде модулируемого сигнала используется либо синусоидальное (гармоническое) колебание, либо последовательность прямоугольных импульсов. В последнем случае говорят об импульсной модуляции.

Амплитудная модуляция гармонического высокочастотного сигнала происходит, если информативный сигнал меняет амплитуду высокочастотного переносчика. Для выявления спектра модулированного колебания будут рассмотрены случаи, когда модулирующий сигнал сам является гармоническим колебанием, и случай, когда модулирующий сигнал сложный, т. е. состоит из многих гармонических колебаний.

Если модулируемый сигнал записать в виде

$$a(t) = A_0 \cos \omega_0 t, \quad (6.1)$$

а модулирующий (гармонический) — в виде

$$s(t) = S_0 \cos (\Omega t + \gamma), \quad (6.2)$$

то модуляция будет сводиться к изменению амплитуды A_0 модулирующим сигналом. Иными словами, в результате модуляции A_0 превращается в

$$A(t) = A_0 + k S_0 \cos(\Omega t + \gamma), \quad (6.3)$$

где k — коэффициент пропорциональности, или коэффициент, характеризующий чувствительность модулятора.

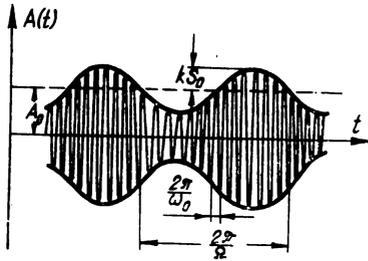


Рис. 6.1. Зависимость модулированного синусоидой по амплитуде сигнала от времени.

Из графического изображения процесса модуляции (рис. 6.1) видно, что обязательным условием того, чтобы огибающая модулированного сигнала повторяла модулирующий сигнал, является

$$k S_0 \leq A_0. \quad (6.4)$$

Ввиду важности соотношения этих величин вводится понятие коэффициента глубины амплитудной модуляции

$$M_{AM} = \frac{k S_0}{A_0}, \quad (6.5)$$

который всегда должен быть меньше единицы. Модулированное колебание, используя коэффициент модуляции, можно переписать в виде

$$a_{AM}(t) = A_0 [1 + M_{AM} \cos(\Omega t + \gamma)] \cos \omega_0 t. \quad (6.6)$$

С помощью формулы произведения косинусов последнее выражение можно преобразовать в

$$a_{AM}(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{A_0 M_{AM}}{2} \cos [(\omega_0 + \Omega) t + \gamma] + \frac{A_0 M_{AM}}{2} \cos [(\omega_0 - \Omega) t - \gamma]. \quad (6.7)$$

Первое слагаемое правой части уравнения соответствует исходному немодулированному колебанию с несущей частотой ω_0 . Второе и третье слагаемые соответствуют новым колебаниям (гармоническим), появляющимся в процессе амплитудной модуляции. Частоты этих колебаний $\omega_0 + \Omega$

и $\omega_0 - \Omega$ называются соответственно верхней и нижней боковыми частотами модуляции. Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют долю амплитуды немодулированного колебания, равную $\frac{M_{AM}}{2}$. Их фазы симметричны относительно фазы несущего колебания.

Если модулирующий сигнал сложный, т. е. представляет собой сумму разных гармонических колебаний, то он может быть записан как

$$s_{\Sigma}(t) = \sum_{k=1}^n S_{0k} \cos(\Omega_k t + \gamma_k). \quad (6.8)$$

Так как величина коэффициента глубины амплитудной модуляции определяет отсутствие искажений, целесообразно ввести обозначение

$$S_{\max} = \sum_{k=1}^n S_{0k} \quad (6.9)$$

и формулу (6.8) переписать в виде

$$s_{\Sigma}(t) = S_{\max} \sum_{k=1}^n \frac{S_{0k}}{S_{\max}} \cos(\Omega_k t + \gamma_k) = S_{\max} D(t). \quad (6.10)$$

Введенное понятие $D(t)$ удовлетворяет условию

$$-1 \leq D(t) \leq +1 \quad (6.11)$$

и именуется нормированной модулирующей функцией.

Используя формулу (6.10) и прибегая к тем же математическим преобразованиям, которые делались в случае модуляции одним гармоническим сигналом, а также учитывая соотношения

$$M_{AM} = \frac{k S_{\max}}{A_0}, \quad (6.12)$$

$$\frac{k S_{0k}}{A_0} = m_k \quad (6.13)$$

и

$$\sum_{k=1}^n m_k = M_{AM}, \quad (6.14)$$

можно записать:

$$A_{\Sigma}(t) = A_0 + k S_{\max} D(t) \quad (6.15)$$

и

$$\begin{aligned} a_{\text{AM}\Sigma}(t) &= A_0 [1 + M_{\text{AM}} D(t)] \cos \omega_0 t = \\ &= A_0 \cos \omega_0 t + \sum_{k=1}^n \frac{A_0 m_k}{2} \cos [(\omega_0 + \Omega_k) t + \gamma_k] + \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{A_0 m_k}{2} \cos [(\omega_0 - \Omega_k) t - \gamma_k]. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Сопоставление формул (6.7) и (6.16) показывает, что амплитудная модуляция гармонической несущей сложным сигналом по сравнению с модуляцией гармоническим сигналом просто увеличивает

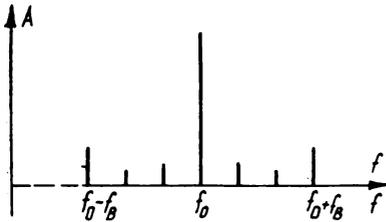


Рис. 6.2. Спектральный состав сигнала, модулированного по амплитуде тремя звуковыми частотами.

количество боковых частот модуляции (спектра), причем это количество равно удвоенному количеству составляющих сложного сигнала, так как спектр содержит одинаковое количество нижних и верхних боковых составляющих, причем каждое из них в отдельности совпадает с количеством составляющих сложного модулирующего сигнала.

Из формулы (6.16) следует, что общая полоса частот (ширина спектра), занимаемая амплитудно-модулированным сигналом (рис. 6.2), равняется удвоенной верхней частоте модулирующего сигнала и располагается симметрично вокруг несущей частоты.

Общая мощность амплитудно-модулированного сигнала, выделяемая на нагрузке в 1 ом, определяется по формуле

$$\overline{a_{\text{AM}\Sigma}^2(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T A_0^2 \cos^2 \omega_0 t dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \frac{A_0^2 m_k^2}{4} \left[\int_0^T \cos^2 (\omega_0 t + \Omega_k t + \gamma_k) dt + \int_0^T \cos^2 (\omega_0 t - \Omega_k t - \gamma_k) dt \right] \Bigg\}$$

или

$$\overline{a_{AM\Sigma^2}(t)} = \frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{A_0^2 m_k^2}{4} = \frac{A_0^2}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k^2 \right). \quad (6.17)$$

Формула (6.17) свидетельствует, что при амплитудной модуляции мощность несущей не меняется, а средняя мощность всего модулированного сигнала превышает мощность несущей на мощность боковых составляющих спектра. В общем случае амплитудная модуляция может увеличить мощность немодулированного сигнала не более чем в полтора раза, так как $\sum_{k=1}^n m_k^2 \leq 1$, т. е.

$$\overline{a_{AM\Sigma^2}(t)}_{\max} = 1,5 \overline{a^2(t)}. \quad (6.18)$$

Чем сложнее модулирующий сигнал, тем меньше будет мощность боковых составляющих спектра. Если предположить, что все парциальные коэффициенты модуляции (m_k) одинаковы и в сумме составляют единицу, то получаем

$$\overline{a_{AM\Sigma^2}(t)} = \overline{a^2(t)} \left[1 + \frac{1}{2n} \right]. \quad (6.19)$$

Учитывая, что обе — и верхняя, и нижняя — боковые полосы спектра представляют собой зеркальное отображение друг друга, можно утверждать, что подлинная информация содержится лишь в одной боковой полосе спектра или что при передаче амплитудно-модулированного сигнала даже в предельном случае информации содержит только 1/6 часть излучаемой антенной мощности.

Исходя из этого в некоторых системах связи передается только одна боковая полоса спектра. Такой вид передачи называется однобоковой, или однополосной, модуляцией

(ОБМ). В построенных таким образом системах на передающей стороне производится отфильтрование несущей и одной боковой полосы спектра, а на приемной стороне эти составляющие подлежат возобновлению.

6.2. УГЛОВАЯ МОДУЛЯЦИЯ

Модулируя гармоническое колебание $a(t) = A_0 \cos \omega_0 t$ низкочастотным, содержащим информацию сигналом, можно воздействовать не только на амплитуду несущей, но также на ее частоту. С формально-математической точки зрения это сводится к воздействию на параметр, находящийся под функцией косинуса и представляющий собой угол расположения вектора колебания. В зависимости от способа этого воздействия различают фазовую и частотную модуляции.

Линейная фазовая модуляция получается, если модулирующий сигнал суммируется с упомянутым углом, находящимся под функцией косинуса. С физической точки зрения это обозначает воздействие модулирующего сигнала на начальную фазу колебания. Такое воздействие неизбежно влечет за собой также изменение частоты модулируемого колебания. Математически фазомодулированное колебание может быть представлено выражением

$$a_{\Phi M}(t) = A_0 \cos [\omega_0 t + ks(t)]. \quad (6.20)$$

Действуя при определении спектра фазомодулированного колебания в той же последовательности, что и в случае амплитудной модуляции, т. е. предполагая, что модулирующий сигнал является гармоническим колебанием, получаем

$$a_{\Phi M}(t) = A_0 \cos [\omega_0 t + kS_0 \cos (\Omega t + \gamma)]. \quad (6.21)$$

Называя амплитуду изменения угла (фазы)

$$kS_0 = m_{\Phi M} \quad (6.22)$$

индексом угловой модуляции и с целью упрощения математических выкладок предполагая $\gamma = \frac{3\pi}{2}$, а косинус суммы выражая через тригонометрические функции суммантов, получаем:

$$a_{\Phi M}(t) = A_0 [\cos \omega_0 t \cos (m_{\Phi M} \sin \Omega t) - \sin \omega_0 t \sin (m_{\Phi M} \sin \Omega t)]. \quad (6.23)$$

Так как $\cos(m_{\Phi M} \sin \Omega t)$ и $\sin(m_{\Phi M} \sin \Omega t)$ являются периодическими функциями времени, то они могут быть разложены в ряды Фурье. Пользуясь функциями Бесселя первого рода, можно записать

$$\cos(m_{\Phi M} \sin \Omega t) = J_0(m_{\Phi M}) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(m_{\Phi M}) \cos 2k\Omega t \quad (6.24)$$

и

$$\sin(m_{\Phi M} \sin \Omega t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(m_{\Phi M}) \sin(2k-1)\Omega t. \quad (6.25)$$

В приведенных выражениях (6.24) и (6.25) индекс у J обозначает порядок бesselевой функции первого рода, которая находится для аргумента $m_{\Phi M}$. Подставляя полученные разложения в выражение (6.23) и учитывая формулы произведений тригонометрических функций (косинусов и синусов), получаем:

$$a_{\Phi M}(t) = A_0 \left[J_0(m_{\Phi M}) \cos \omega_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} J_k(m_{\Phi M}) \cos(\omega_0 + k\Omega)t + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_k(m_{\Phi M}) \cos(\omega_0 - k\Omega)t \right]. \quad (6.26)$$

Полученное выражение показывает, что спектр несущей, модулированной по фазе гармоническим колебанием, теоретически бесконечен (рис. 6.3). Спектр состоит из дискретных составляющих, расположенных по обе стороны несущей частоты. Эти составляющие находятся друг от друга

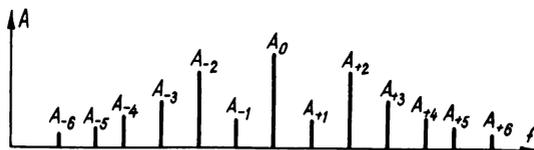


Рис. 6.3. Спектральный состав сигнала, модулированного по фазе одним гармоническим колебанием.

на расстоянии частоты модулирующего сигнала. Фазы нечетных составляющих спектра верхней и нижней боковых полос при этом противоположны.

Линейная частотная модуляция получается, если модулирующий сигнал воздействует непосредственно на угловую частоту несущей. Математически это можно представить так:

$$\omega(t) = \omega_0 + ks(t). \quad (6.27)$$

По своему физическому смыслу угловая частота сигнала является скоростью изменения угла вектора колебания. Из этого следует, что мгновенная частота рассчитывается как производная закона изменения угла вектора колебания, и наоборот: угол вектора колебания можно получить в виде интеграла мгновенной угловой частоты. Исходя из этого модулированное по частоте гармоническим сигналом колебание может быть представлено в виде формулы

$$a_{\text{чм}}(t) = A_0 \cos \int_0^t [\omega_0 + kS_0 \cos(\Omega t + \gamma)] dt. \quad (6.28)$$

Последнее выражение преобразуем в

$$a_{\text{чм}}(t) = A_0 \cos \left[\omega_0 t + \frac{kS_0}{\Omega} \sin(\Omega t + \gamma) \right]. \quad (6.29)$$

Сличая это выражение с формулой (6.21), видим, что единственное существенное различие между ними заключается в том, что в выражении (6.29) амплитуда изменения угла (фазы) выражается как

$$\frac{kS_0}{\Omega} = m_{\text{чм}}. \quad (6.30)$$

В остальном математические выражения для фазо- и частотно-модулированных сигналов можно считать совпадающими; следовательно, совпадают по своей структуре также их спектры. Таким образом, при модуляции несущей гармоническим колебанием по структуре спектра нельзя узнать, с какой модуляцией мы имеем дело — фазовой или частотной.

Частотную модуляцию часто характеризуют ее девиацией, т. е. максимальным изменением мгновенной частоты немодулированного колебания (изменение порождается

модулирующим сигналом). Согласно формуле (6.28), для случая модуляции гармоническим сигналом

$$\Delta\omega_{\text{ЧМ}} = kS_0. \quad (6.31)$$

Та же величина для случая фазовой модуляции может быть определена из формулы (6.21). Так как

$$\begin{aligned} \frac{d[\omega_0 t + kS_0 \cos(\Omega t + \gamma)]}{dt} &= \omega_0 + kS_0 [-\sin(\Omega t + \gamma)] \Omega = \\ &= \omega_0 + m_{\text{ФМ}} \Omega \cos(\Omega t + \gamma_1), \end{aligned}$$

то

$$\Delta\omega_{\text{ФМ}} = m_{\text{ФМ}} \Omega. \quad (6.32)$$

Таким образом, в случае фазовой модуляции мы имеем дело с независимым от частоты модулирующего сигнала и пропорциональным его амплитуде индексом модуляции и линейно растущей с увеличением частоты модулирующего сигнала девиацией (рис. 6.4, а). В случае же частотной модуляции независимой от частоты модулирующего сигнала и пропорциональной его амплитуде является девиация частоты, а индекс модуляции убывает с увеличением частоты модулирующего сигнала (рис. 6.4, б).

Если модулирующий сигнал сложный, т. е. представляет собой сумму разных гармонических колебаний, то спектр модулированного сигнала, оставаясь бесконечным по своей протяженности, выражается громоздкой и неудобной для пользования формулой. Как особенность следует отметить, что такой спектр может быть несимметричным по отношению к несущей частоте. Эта несимметричность возникает, если в состав сложного сигнала входят гармони-

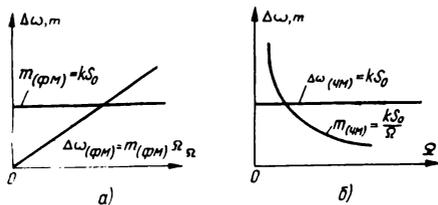


Рис. 6.4. Особенности фазо- и частотно-модулированных сигналов:
а — случай фазовой модуляции; б — случай частотной модуляции.

ские колебания, частоты которых относятся друг к другу как целые числа. В итоге происходит суммирование спектральных составляющих, соотношение фаз (знаков) которых по разным сторонам несущей частоты разное. Таким образом, в отличие от случая амплитудной модуляции, в случае угловой модуляции не представляется возможным восстановление полного спектра по одной его боковой полосе.

Структуры модулированных колебаний различны при фазовой и частотной модуляциях. Отличны в обоих случаях и способы осуществления этих модуляций. В случае фазовой модуляции генератор несущей частоты может быть стабилизирован кварцем, а модуляция осуществляется в одном из последующих элементов устройства. Частотная же модуляция обычно осуществляется прямым воздействием на частоту несущей. Так как любая фазовая модуляция порождает изменение частоты, и наоборот, то во всех случаях, пользуясь несложными устройствами, можно преобразовать один вид модуляции в другой.

Хотя теоретически полоса частот, занимаемая сигналом с угловой модуляцией, бесконечна (6.26), практически можно ее ограничить, так как бесселевы функции становятся пренебрежимо малы, когда их индексы значительно больше аргумента. Если индекс модуляции $m < 0,5$, то угловая модуляция практически имеет такой же спектр, как и амплитудная. С ростом m количество учитываемых составляющих спектра растет, и номер последней из них, величина которой больше 1% амплитуды немодулированного колебания несущей частоты, определяется по приближенной формуле

$$k = 1 + m + \sqrt{m}. \quad (6.33)$$

Эта формула дает приемлемые результаты для наиболее распространенных значений m ($0,5 \leq m \leq 24$). В случае, когда $\Delta\omega \ll \Omega$, ширина спектра модулированного колебания близка к величине 2Ω , когда же $\Delta\omega \gg \Omega$, ширина спектра близка к величине $2\Delta\omega$.

Характерной особенностью угло-

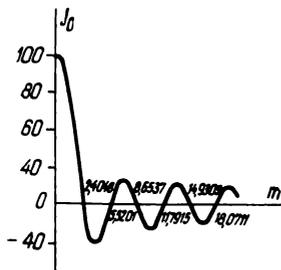


Рис. 6.5. Зависимость амплитуды несущей частоты от индекса модуляции.

вой модуляции является изменение амплитуды ее несущей частоты, а также полное исчезновение несущей при определенных значениях индекса модуляции (рис. 6.5). Эти значения (2,4048; 5,5201; 8,6537; 11,7915 и т. д.), называемые корнями амплитуды колебания центральной частоты, используются для точного замера девиации модулированного колебания.

Общая мощность сигнала с угловой модуляцией, выделяющаяся на нагрузке в 1 ом, определяется по формуле

$$\overline{a_{\Phi M}^2(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T a_{\Phi M}^2(t) dt = \frac{A_0^2}{2} \left[J_0^2(m) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k^2(m) \right]. \quad (6.34)$$

Но так как, согласно теории функций Бесселя,

$$J_0^2(m) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k^2(m) = 1, \quad (6.35)$$

то

$$\overline{a_{\Phi M}^2(t)} = \frac{A_0^2}{2}. \quad (6.36)$$

Это означает, что мощность сигнала при его модуляции остается постоянной, равной мощности немодулированной несущей. Можно показать, что полученный результат остается справедливым и для случая модуляции сложным сигналом.

6.3. АМПЛИТУДНО-ИМПУЛЬСНАЯ МОДУЛЯЦИЯ

С амплитудно-импульсной модуляцией приходится иметь дело при размещении низкочастотного, содержащего информацию сигнала на несущей, представляющей собой последовательность импульсов. Самой распространенной является последовательность прямоугольных импульсов. С помощью общей формулы периодического процесса любая

последовательность импульсов может быть представлена выражением

$$a(t) = A_0 + \sum_{r=1}^{\infty} A_r \cos(r\omega_{\Pi} t - \psi_r). \quad (6.37)$$

В отличие от первоначальной записи [формула (4.12)] здесь частота повторения импульсов обозначена через ω_{Π} с целью подчеркнуть ее высокочастотный характер по сравнению с модулирующей частотой, которая обозначается через Ω . Порядковый номер суммантов обозначен через r , так как индексы k и n заняты для слагающих низкочастотного сигнала.

Ограничиваясь случаем последовательности прямоугольных импульсов, формулу (6.37) можно преобразовать, учитывая, что

$$a(t) = \begin{cases} U_0 & \text{при } 0 \leq t < \tau; \\ 0 & \text{при } \tau \leq t < T_{\Pi}. \end{cases} \quad (6.38)$$

Тогда

$$a(t) = U_0 \frac{\tau}{T_{\Pi}} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2U_0}{r\pi} \sin \frac{r\omega_{\Pi}\tau}{2} \cos(r\omega_{\Pi}t - \psi_r). \quad (6.39)$$

Приведенное выражение (6.39) дает полную зависимость структуры спектра от значений параметров периодической последовательности импульсов. Спектр содержит постоянную составляющую и бесконечное количество гармоник частоты повторения импульсов. Форма огибающей спектра определена формой импульсов последовательности. При уменьшении периода следования T_{Π} интервалы между гармониками увеличиваются, а их амплитуды возрастают, и наоборот.

Сложный модулирующий сигнал выражается формулой (6.10). Исходя из определения амплитудной модуляции величина U_0 в формуле (6.39) должна быть заменена на

$$U_{\Sigma}(t) = U_0 + kS_{\max} D(t). \quad (6.40)$$

Произведя эту замену, получаем выражение для сигнала с амплитудно-импульсной модуляцией в виде

$$a_{\text{АИМЭ}}(t) = U_0 \frac{\tau}{T_{\Pi}} [1 + M_{\text{АМ}} D(t)] +$$

$$+ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2U_0}{r\pi} [1 + M_{AM} D(t)] \sin \frac{r\omega_{\Pi}\tau}{2} \cos (r\omega_{\Pi}t - \psi_r). \quad (6.41)$$

Для большей наглядности то же выражение целесообразно, введя новые обозначения, переписать в таком виде:

$$a_{AIM\Sigma}(t) = A_A + B_A(\Omega, t) + \sum_{r=1}^{\infty} C_A(\Omega, r\omega_{\Pi}, t). \quad (6.42)$$

В последней формуле A_A — постоянная составляющая модулированной последовательности;

$$A_A = U_0 \frac{\tau}{T_{\Pi}}; \quad (6.43)$$

$B_A(\Omega, t)$ — компоненты спектра, отображающие передаваемое сообщение [модулирующую функцию $s_{\Sigma}(t)$];

$$B_A(\Omega, t) = U_0 \frac{\tau}{T_{\Pi}} \sum_{k=1}^n m_k \cos(\Omega_k t + \gamma_k); \quad (6.44)$$

$C_A(\Omega, r\omega_{\Pi}, t)$ — член бесконечной последовательности компонент, частоты которых кратны частоте повторения ω_{Π} , вместе с окружающим компоненту спектром боковых частот, повторяющим спектр сообщения и его зеркальное изображение (рис. 6.6);

$$C_A(\Omega, r\omega_{\Pi}, t) = \frac{2U_0}{r\pi} \sin \frac{r\omega_{\Pi}\tau}{2} \left\{ \cos(r\omega_{\Pi}t - \psi_r) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} [\cos(r\omega_{\Pi}t + \Omega_k t - \psi_r + \gamma_k) + \cos(r\omega_{\Pi}t - \Omega_k t - \psi_r - \gamma_k)] \right\}. \quad (6.45)$$

В зависимости от приема осуществления амплитудно-импульсной модуляции (АИМ) различают модуляции первого (АИМ-1) и второго рода (АИМ-2). В случае АИМ-1 амплитуда импульса следует за изменениями модулирую-

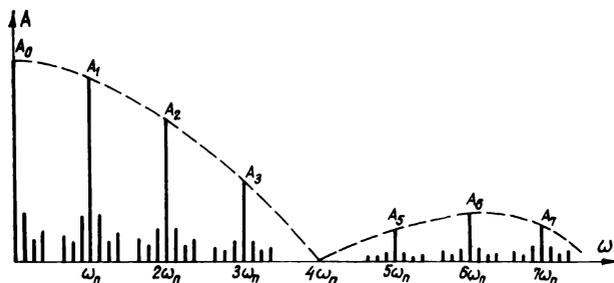


Рис. 6.6. Спектр амплитудно-модулированной импульсной последовательности.

шей функции в течение всего времени существования этого импульса (рис. 6.7, б).

В случае АИМ-2 амплитуды импульсов определяются мгновенными значениями функции сообщения в какие-то определенные моменты, например в моменты возникновения импульсов. Таким образом, амплитуда каждого им-

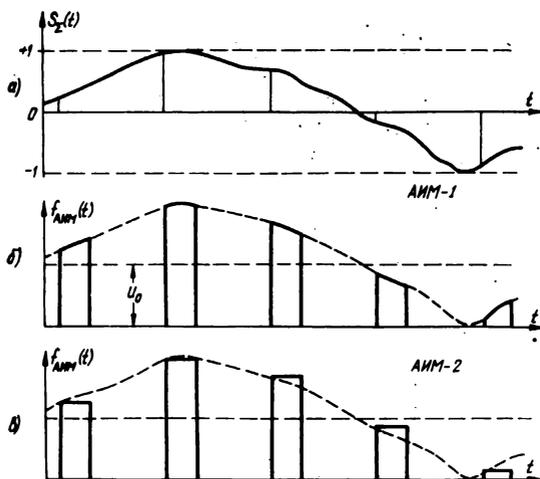


Рис. 6.7. Последовательность амплитудно-модулированных импульсов:
 а — модулирующий сигнал; б — АИМ-1; в — АИМ-2.

пульса постоянна за все время существования импульса (рис. 6.7, в). Если длительность импульсов $\tau \ll T_{\Pi}$, то различие между АИМ-1 и АИМ-2 становится несущественным.

Так же как в случае амплитудной модуляции гармонической несущей, в случае АИМ мощность несущей не меняется, а средняя мощность всего модулированного сигнала превышает мощность несущей на мощность заново возникших в процессе модуляции боковых составляющих спектра.

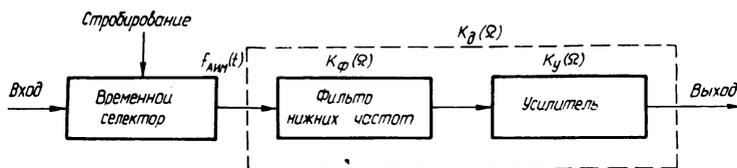


Рис. 6.8. Блок-схема выделения сообщения фильтром нижних частот.

Многократное повторение в спектре сигнала с амплитудно-импульсной модуляцией спектра модулирующего сигнала (функции сообщения) создает возможность применения нескольких способов демодуляции, т. е. извлечения функции сообщения из принимаемого сигнала. Так, возможно непосредственное выделение сообщения из общего спектра сигнала фильтром нижних частот (рис. 6.8). Этот наиболее распространенный метод основан на существовании $B_A(\Omega, t)$. Основным недостатком этого метода является сравнительно низкий уровень сигнала, получаемого на выходе демодулятора. Учитывая формулу (6.44), этот уровень можно описать выражением

$$\begin{aligned}
 u_{\text{вых}}(t) &= B_A(\Omega, t) |K_{\Phi}(\Omega)| = \\
 &= U_0 \frac{\tau}{T_{\Pi}} \sum_{k=1}^{\infty} m_k \cos(\Omega_k t + \gamma_k) |K_{\Phi}(\Omega)|, \quad (6.46)
 \end{aligned}$$

где $K_{\Phi}(\Omega)$ — модуль коэффициента передачи фильтра.

Уровень выходного сигнала может быть увеличен либо использованием дополнительного усилителя, либо искусст-



Рис. 6.9. Блок-схема демодулятора с удлинением импульсов.

венным удлинением поступающих на вход фильтра импульсов, т. е. увеличением τ . Чтобы исключить искажения, необходимо, чтобы действие схемы (рис. 6.9) обеспечивало одинаковое удлинение всех импульсов при сохранении прежних соотношений амплитуд.

Простейшим средством удлинения импульсов является обычный пиковый детектор видеоимпульсов.

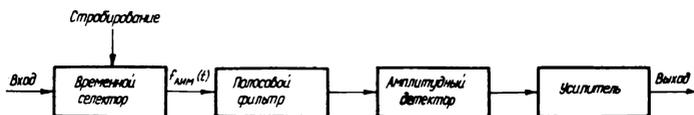


Рис. 6.10. Блок-схема выделения сообщения полосовым фильтром.

Кроме описанного способа, возможна также демодуляция выделением одной из гармоник частоты повторения ω_{Π} вместе с ее боковыми полосами с помощью полосового фильтра. На выходе последнего тогда будет получено амплитудно-модулированное колебание с несущей $r\omega_{\Pi}$. Для выделения функции сообщения необходима дополнительная нелинейная обработка полученного сигнала, т. е. его детектирование (рис. 6.10). Определенным преимуществом этого приема является удобство реализации избирательного полосового фильтра на высокой частоте $r\omega_{\Pi}$.

6.4. ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНАЯ МОДУЛЯЦИЯ

Если модулирующий сигнал воздействует на длительность отдельных импульсов модулируемой последовательности, то мы имеем дело с широтно-импульсной модуля-

цией. В отличие от амплитудно-импульсной модуляции, при которой параметр (амплитуда) модулируемого импульса может отображать модулирующую величину на всем протяжении существования импульса (АИМ-1), при широтно-импульсной модуляции ширина (длительность) каждого импульса может отобразить только одно состояние модулирующей величины. В зависимости от момента фиксации модулирующей величины широтно-импульсную модуляцию (ШИМ) подразделяют на модуляцию первого рода (ШИМ-1) и второго рода (ШИМ-2). В случае ШИМ-1 ширина (длительность) импульса определяется значением модулирующей функции в моменты возникновения переднего или заднего фронта импульсов. При ШИМ-2 длительность импульсов пропорциональна мгновенным значениям модулирующего напряжения в тактовых точках, т. е. в моменты времени, отстоящие друг от друга на постоянную величину, однако не совпадающие с моментами возникновения переднего или заднего фронтов импульсов. При $\tau \ll T_n$ различие между ШИМ-1 и ШИМ-2 несущественно.

Кроме упомянутого деления, существует подразделение широтно-импульсной модуляции на двустороннюю и одно-

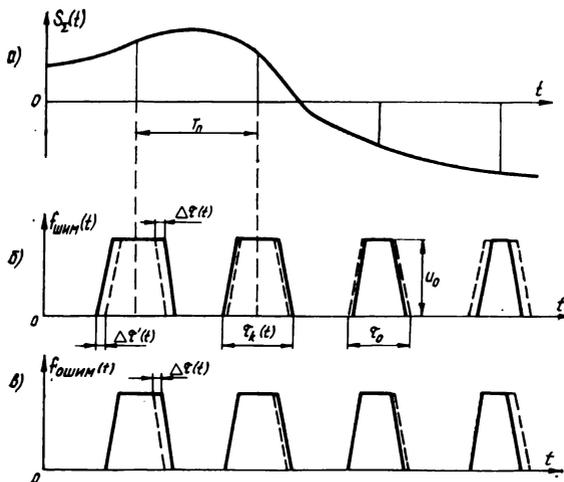


Рис. 6.11. Последовательность импульсов, модулированных по широте:

а — модулирующий сигнал; б — двусторонняя модуляция; в — односторонняя модуляция (ОШИМ).

стороннюю (ОШИМ) (рис. 6.11). В случае двусторонней модуляции под воздействием модулирующего сигнала меняется место расположения как переднего, так и заднего фронтов импульсов, а следовательно, длительность модулированного импульса описывается выражением

$$\tau(t) = \tau_0 + \Delta\tau'(t) + \Delta\tau(t). \quad (6.47)$$

Если при этом оба фронта импульсов сдвигаются на одинаковые временные интервалы, то получаем двустороннюю симметричную ШИМ, в противном случае — двустороннюю несимметричную ШИМ. В случае ОШИМ под воздействием модулирующего сигнала меняется место расположения только одного фронта импульса, и выражение для длительности модулированного импульса получает вид

$$\tau(t) = \tau_0 + \Delta\tau(t). \quad (6.48)$$

Наиболее распространенным видом модуляции является ОШИМ-1.

Спектр импульсной последовательности, которая модулирована по ширине импульсов гармоническим колебанием, можно получить из формулы (6.39), описывающей последовательность немодулированных прямоугольных импульсов. Входящая в эту формулу постоянная величина τ может быть заменена выражением

$$\tau(t) = \tau_0 + kS_0 \cos(\Omega t + \gamma). \quad (6.49)$$

Это выражение после введения понятия коэффициента широтной модуляции импульсов

$$m_\tau = \frac{kS_0}{\tau_0} \quad (6.50)$$

может быть переписано в форме

$$\tau(t) = \tau_0 [1 + m_\tau \cos(\Omega t + \gamma)]. \quad (6.51)$$

Подставляя последнее равенство в формулу (6.39), получаем

$$a_{\text{ШИМ}}(t) = U_0 \frac{\tau_0 [1 + m_\tau \cos(\Omega t + \gamma)]}{T_{\text{п}}} + \\ + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2U_0}{r\pi} \sin \frac{r\omega_{\text{п}} \tau_0 [1 + m_\tau \cos(\Omega t + \gamma)]}{2} \cos(r\omega_{\text{п}} t - \psi_r), \quad (6.52)$$

Аналогично случаю амплитудно-импульсной модуляции полученное выражение может быть переписано с новыми обозначениями, а именно

$$a_{\text{шим}}(t) = A_{\text{ш}} + B_{\text{ш}}(\Omega, t) + \sum_{r=1}^{\infty} C_{\text{ш}}(\Omega, r\omega_{\text{п}}, t). \quad (6.53)$$

В последней формуле

$A_{\text{ш}}$ — постоянная составляющая модулированной последовательности;

$$A_{\text{ш}} = \frac{U_0 \tau_0}{T_{\text{п}}}; \quad (6.54)$$

$B_{\text{ш}}(\Omega, t)$ — компонента спектра, отображающая передаваемое сообщение [модулирующую функцию $s(t)$];

$$B_{\text{ш}}(\Omega, t) = \frac{U_0 \tau_0}{T_{\text{п}}} m_{\tau} \cos(\Omega t + \gamma); \quad (6.55)$$

$C_{\text{ш}}(\Omega, r\omega_{\text{п}}, t)$ — член бесконечной последовательности компонент, частоты которых кратны частоте повторения $\omega_{\text{п}}$, вместе с окружающим компоненту спектром, имеющим бесконечное число составляющих с частотами $(r\omega_{\text{п}} \pm k\Omega)$. В этом можно убедиться, разлагая сумманты, содержащие $\cos(\Omega t + \gamma)$ под функциями \sin в ряд Фурье с использованием функций Бесселя;

$$\begin{aligned} C_{\text{ш}}(\Omega, r\omega_{\text{п}}, t) = & \frac{U_0}{r\pi} \sin \left\{ r\omega_{\text{п}} \left[t + \frac{\tau_0}{2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\tau_0 m_{\tau}}{2} \cos(\Omega t + \gamma) \right] - \psi_r \right\} - \frac{U_0}{r\pi} \sin \left\{ r\omega_{\text{п}} \left[t - \frac{\tau_0}{2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\tau_0 m_{\tau}}{2} \cos(\Omega t + \gamma) \right] - \psi_r \right\}. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Амплитуды боковых компонент, группирующиеся вблизи соответствующих гармоник частоты повторения $r\omega_{\text{п}}$, изменяются в соответствии со значениями функций Бесселя, которые в свою очередь зависят от аргумента $r\omega_{\text{п}} \frac{\tau_0 m_{\tau}}{2}$

и номера k , характеризующего порядок этой функции. Это группирование более заметно в области небольших значений гармоник частоты повторения, т. е. при $\omega_{\text{п}}, 2\omega_{\text{п}}, 3\omega_{\text{п}} \dots$. При больших r группирование менее заметно. Это объясняется тем, что с увеличением r аргумент функции Бесселя становится большим и поэтому спектр боковых полос около этих гармоник расширяется. Поскольку функция Бесселя существует при любом значении r и k , ширина спектра боковых частот около каждой гармоники $\omega_{\text{п}}$ теоретически бесконечна, т. е. спектры полос всех гармоник практически неразделимы. С ростом коэффициента широтной модуляции импульсов увеличивается аргумент функции Бесселя, вследствие чего происходит рост интенсивности боковых компонент гармоник частоты повторения.

Сравнение мощностей, выделяемых немодулированным и модулированным широтно-импульсной модуляцией сигналами, показывает, что модуляция порождает как увеличение, так и перераспределение выделяемой мощности по частотному спектру. При росте мощности концентрируется в составляющей $V_{\text{ш}}(\Omega, t)$, которая появляется в спектре сигнала вследствие его модуляции. Перераспределение мощности происходит в бесконечной последовательности составляющих спектра, обогащающей боковыми, также бесконечными, полосами.

Взаимное перекрытие боковых полос, возникающих вокруг гармоник частоты повторения импульсов, в случае широтно-импульсной модуляции делает демодуляцию с помощью полосового фильтра невозможной. Таким образом, единственным практически приемлемым способом демодуляции остается использование фильтра нижних частот, выделяющего компоненту $V_{\text{ш}}(\Omega, t)$. Однако, в отличие от случая амплитудно-импульсной модуляции, выделение этой компоненты «в чистом виде» теоретически невозможно, так как в ту же полосу частот попадают спектральные компоненты боковых полос гармоник частоты повторения. Все же при рациональном выборе параметров модуляции мешающие компоненты удается сделать достаточно малыми.

Уровень сигнала, получаемого на выходе демодулятора, выражается формулой (6.46), полученной для случая амплитудно-импульсной модуляции. Основным преимуществом ШИМ над АИМ является возможность ограничения принимаемых импульсов по максимуму и минимуму, что

устраняет вредное воздействие помех. В то же время невозможность при ШИМ удлинения импульсов в демодуляторе уменьшает по сравнению с АИМ эффект на выходе.

6.5. ВРЕМЕННО-ИМПУЛЬСНАЯ МОДУЛЯЦИЯ

При временно-импульсной модуляции модулирующий сигнал воздействует на расположение импульсов передаваемой последовательности во времени, величина же и длительность этих импульсов остаются постоянными. В зависимости от способа воздействия различают два вида временно-импульсной модуляции: фазоимпульсную (ФИМ) и частотно-импульсную (ЧИМ). Различие между ними похоже на различие между фазовой и частотной модуляциями гармонической несущей.

В случае ФИМ встречаемся с воздействием модулирующего сигнала на фазу (место расположения) импульсов. Для случая модуляции гармоническим сигналом произведение $\omega_{\Pi} t$ в формуле немодулированной последовательности импульсов (6.39) заменяем произведением $\omega_{\Pi}(t + \Delta t)$, где

$$\Delta t = k S_0 \cos \Omega t, \quad (6.57)$$

и, следовательно, значение мгновенной частоты повторения принимает вид

$$\omega_{\Pi}(t) = \omega_{\Pi} - \omega_{\Pi} k S_0 \Omega \sin \Omega t, \quad (6.58)$$

а период повторения

$$T_{\Pi}(t) = \frac{2\pi}{\omega_{\Pi}(1 - k S_0 \Omega \sin \Omega t)}. \quad (6.59)$$

Подставляя полученные значения в формулу (6.39), получаем:

$$\begin{aligned} a_{\text{ФИМ}}(t) &= U_0 \frac{\tau}{2\pi} (\omega_{\Pi} - \omega_{\Pi} k S_0 \Omega \sin \Omega t) + \\ &+ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2U_0}{r\pi} \sin \left[\frac{r\omega_{\Pi} \tau}{2} (1 - k S_0 \Omega \sin \Omega t) \right] \times \\ &\times \cos [r (\omega_{\Pi} t + \omega_{\Pi} k S_0 \cos \Omega t) - \psi_r]. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Вводя новые обозначения, последнее выражение сводим к равенству

$$a_{\Phi\text{ИМ}}(t) = A_{\Phi} + B_{\Phi}(\Omega, t) + \sum_{r=1}^{\infty} C_{\Phi}(\Omega, r\omega_{\text{п}}, t). \quad (6.61)$$

В последней формуле

A_{Φ} — постоянная составляющая модулированной последовательности;

$$A_{\Phi} = U_0 \frac{\tau}{T_{\text{п}}}; \quad (6.62)$$

$B_{\Phi}(\Omega, t)$ — компонента спектра, порожденная передаваемым сообщением;

$$B_{\Phi}(\Omega, t) = -U_0 \frac{\tau}{T_{\text{п}}} kS_0 \Omega \sin \Omega t; \quad (6.63)$$

$C_{\Phi}(\Omega, r\omega_{\text{п}}t)$ — член бесконечной последовательности компонент, частоты которых кратны частоте повторения $\omega_{\text{п}}$, вместе с окружающим компоненту спектром, имеющим бесконечное число составляющих с частотами $(r\omega_{\text{п}} \pm k\Omega)$;

$$C_{\Phi}(\Omega, r\omega_{\text{п}}, t) = \frac{2U_0}{r\pi} \sin \left[\frac{r\tau \omega_{\text{п}}}{2} (1 - kS_0 \Omega \sin \Omega t) \right] \cos [r\omega_{\text{п}} (t + kS_0 \cos \Omega t) - \psi_r]. \quad (6.64)$$

Приведенные формулы часто записываются с использованием обозначений: девиации импульсов

$$\Delta t_{\text{оФИМ}} = kS_0; \quad (6.65)$$

индекса временно-импульсной модуляции

$$\Delta \varphi_{\text{ФИМ}} = kS_0 \omega_{\text{п}} = \Delta t_0 \omega_{\text{п}}; \quad (6.66)$$

девиации частоты повторения

$$\Delta \omega_{\text{пОФИМ}} = kS_0 \omega_{\text{п}} \Omega = \Delta \varphi \Omega. \quad (6.67)$$

В отличие от ранее рассмотренных случаев импульсной модуляции, на сей раз порожденная передаваемым сообщением составляющая $B_{\Phi}(\Omega, t)$ является линейной функцией от Ω , следовательно, ее выделение фильтром нижних

частот сопровождалось бы завалом низких и подъемом высоких частот сообщения. Кроме того, уровень выделяемого сигнала оказывается по крайней мере в 10 раз ниже уровня сигнала, получаемого в случае АИМ. Все это ведет к тому, что демодуляция ФИМ путем выделения сообщения фильтром нижних частот на практике никогда не применяется. Для восстановления сообщения в случае ФИМ на приемном конце предпринимается предварительное преобразование модуляции принятой последовательности импульсов в АИМ или ШИМ, и только после этого следует демодуляция сигнала, т. е. выделение из него переданного сообщения.

Аналогично случаю ШИМ в случае ФИМ различают модуляцию первого рода (ФИМ-1) и второго рода (ФИМ-2). В случае ФИМ-1 временной сдвиг импульса определяется значением модулирующей функции в момент появления импульса. При ФИМ-2 временной сдвиг импульсов пропорционален мгновенным значениям модулирующего напряжения в тактовых точках.

В случае ЧИМ по закону модулирующего сигнала меняется непосредственно угловая частота повторения импульсов ω_n . Здесь так же, как при ФИМ, импульсы последовательности сдвигаются относительно своих первоначальных положений; однако это происходит по другому закону, а именно угол вектора колебания определяется в виде интеграла мгновенной угловой частоты. Исходя из того же выражения для немодулированной последовательности импульсов (6.39) и предполагая, что она модулирована синусоидальным сигналом, получаем

$$a_{\text{чим}}(t) = U_0 \frac{\tau}{2\pi} (\omega_n + kS_0 \cos \Omega t) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2U_0}{\pi r} \sin \left[\frac{r\tau}{2} (\omega_n + kS_0 \cos \Omega t) \right] \cos \left[r \left(\omega_n + kS_0 \frac{1}{\Omega} \sin \Omega t \right) t - \psi_r \right]. \quad (6.68)$$

Вводя новые обозначения, записываем:

$$a_{\text{чим}}(t) = A_{\text{ч}} + B_{\text{ч}}(\Omega, t) + \sum_{r=1}^{\infty} C_{\text{ч}}(\Omega, r\omega_n, t). \quad (6.69)$$

В последней формуле $A_{\text{ч}}$ — постоянная составляющая модулированной последовательности;

$$A_{\text{ч}} = U_0 \frac{\tau}{T_{\text{п}}}; \quad (6.70)$$

$B_{\text{ч}}(\Omega, t)$ — компонента спектра, порожденная передаваемым сообщением;

$$B_{\text{ч}}(\Omega, t) = U_0 \frac{\tau}{2\pi} kS_0 \cos \Omega t = U_0 \frac{\tau}{T_{\text{п}}} \cdot \frac{kS_0}{\omega_{\text{п}}} \cos \Omega t; \quad (6.71)$$

$C_{\text{ч}}(\Omega, r\omega_{\text{п}}, t)$ — член такой же бесконечной последовательности, как $C_{\text{ф}}(\Omega, r\omega_{\text{п}}, t)$;

$$C_{\text{ч}}(\Omega, r\omega_{\text{п}}, t) = \frac{2U_0}{\pi r} \sin \left[\frac{r\tau}{2} (\omega_{\text{п}} + kS_0 \cos \Omega t) \right] \cos \left[r \left(\omega_{\text{п}} + \frac{kS_0}{\Omega} \sin \Omega t \right) t - \psi_r \right]. \quad (6.72)$$

В этом случае составляющая спектра $B_{\text{ч}}(\Omega, t)$ пропорциональна модулирующему сигналу, и поэтому возможна демодуляция методом выделения этой компоненты фильтром нижних частот. Выходное напряжение при таком методе модуляции оказывается несколько большим, чем при ФИМ, но меньшим, чем при АИМ.

Второй способ демодуляции основан на выделении из спектра ЧИМ одной из гармоник частоты повторения с боковыми составляющими. Полоса фильтра выбирается так, чтобы через фильтр проходило значительное число боковых компонент частоты $r\omega_{\text{п}}$. Дальнейшая обработка такого колебания сводится к амплитудному ограничению и детектированию с помощью частотного дискриминатора. Полученный таким образом низкочастотный сигнал в дальнейшем усиливается.

Сличая оба вида временно-импульсной модуляции, получаем картину, аналогичную случаю угловой модуляции. Для ФИМ имеем дело с независимой от частоты модулирующего сигнала и пропорциональной его амплитуде девиацией импульсов Δt_0 или величиной временного сдвига. В случае ЧИМ независимой от частоты модулирующего

сигнала и пропорциональной его амплитуде является девиация угловой частоты повторения

$$\Delta\omega_{\text{почим}} = kS_0, \quad (6.73)$$

а девиация импульсов убывает с увеличением частоты модулирующего сигнала

$$\Delta t_{\text{очим}} = \frac{kS_0}{\omega_{\text{п}}\Omega} = \frac{\Delta\varphi}{\omega_{\text{п}}}. \quad (6.74)$$

Индекс модуляции для ЧИМ имеет вид

$$\Delta\varphi_{\text{чим}} = \frac{kS_0}{\Omega} = \Delta t_0 \omega_{\text{п}}. \quad (6.75)$$

Из последних соотношений следует, что ЧИМ нецелесообразно применять для передачи низких модулирующих частот. Чем выше значение низшей частоты спектра передаваемого сигнала, тем меньше требуемая девиация импульсов Δt_0 и тем больше каналов можно реализовать в системе с ЧИМ.

Основное преимущество временно-импульсной модуляции сводится к ее относительно высокой помехозащищенности.

6.6. КОДОВО-ИМПУЛЬСНАЯ МОДУЛЯЦИЯ

Кодово-импульсная модуляция (КИМ) включает предварительную подготовку передаваемого сигнала, которая сводится к его дискретизации во времени и квантованию по уровню. Полученные дискретные значения сигналов кодируются, т. е. преобразуются в определенные кодовые комбинации, состоящие из импульсов одинаковой амплитуды и длительности. Таким образом, информация закладывается в порядок расположения импульсов внутри кодовой группы. Полученными импульсами КИМ могут осуществляться самые разнообразные виды модуляций колебаний передатчика — двойные модуляции КИМ-АМ, КИМ-ЧМ, КИМ-ФМ. В основном под КИМ подразумевается передача любой информации двоичным кодом.

Преобразование дискретных значений сигнала в двоичный код производится сравнительно сложными устройствами, и потому это действие целесообразно осуществлять

в общем тракте, т. е. над многоканальным сообщением.

Кодирующие устройства классифицируются по способам выдачи кода и посылки его в канал. Выдача кода, производимая считыванием, отличается тем, что кодовая группа первоначально фиксируется специальным счетчиком и выдается только после завершения кодирования данного уровня квантования. При совмещенном способе кодирования кодовая группа поступает на выход кодирующего устройства еще в процессе кодирования, поэтому перерывы между циклами кодирования отдельных квантованных уровней отсутствуют. Посылка кодовых групп в канал может быть последовательной или параллельной. При последовательном способе элементы кода направляются в канал один за другим, а при параллельном все символы кодовой комбинации подаются в канал одновременно.

Примером кодирующего устройства, работающего по принципу считывания, является устройство прямого преобразования (рис. 6.12). В этом устройстве широтно-модулированные каналные импульсы подаются на каскад совпадений, на другой вход которого поступают импульсы, снимаемые с мультивибратора квантования. Последний

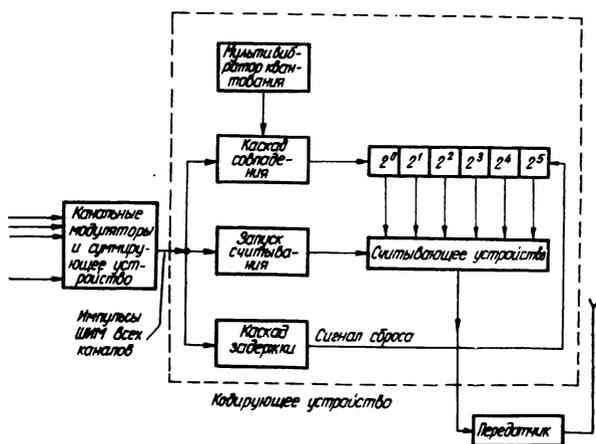


Рис. 6.12. Блок-схема устройства прямого преобразования.

вырабатывает короткие импульсы с длительностью τ и периодом следования $T = \Delta\tau$, где $\Delta\tau$ — размеры ступеней квантования. Таким образом, на выход каскада совпадения проходит число импульсов мультивибратора квантования, определяемое длительностью импульса ШИМ, которая в свою очередь зависит от мгновенного значения функции сообщения. Полученные импульсы далее поступают на счетное устройство, определяющее их количество, которое в ячейках пересчетной схемы записывается в двоичной системе. После окончания счета происходит опрос ячеек счетчика специальным считывающим устройством, которое запускается задним фронтом импульса ШИМ. Пересчетная схема возвращается в исходное состояние благодаря воздействию на нее предварительно задержанного импульса, получаемого при дифференцировании заднего фронта импульса ШИМ.

Примером работы совмещенным способом является метод сравнения и вычитания. В этом случае кодируемое сообщение (напряжение) последовательно сравнивается с эталонными напряжениями $U_k = 2^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, l$). В изображенном на рис. 6.13 случае кодируемое напряжение равно 61 в , а эталонные — соответственно $64, 32, 16, 8, 4, 2$ и 1 в. Если эталонное напряжение больше кодируемого, то последнее пропускается, а на выходе устройства фиксируется нуль. Если эталонное напряжение меньше кодируемого, то оно вычитается из последнего и на выходе появляется единица (импульс). Разность напряжений снова сравнивается и т. д. В результате кодирования уровня 61 в на выходе устройства возникает кодовая группа 0111101 , соответствующая записи этого уровня в двоичной системе. Точность кодирования методом сравнения и вычитания лимитируется точностью установки, стабильностью эталонных напряжений и погрешностями схем сравнения.

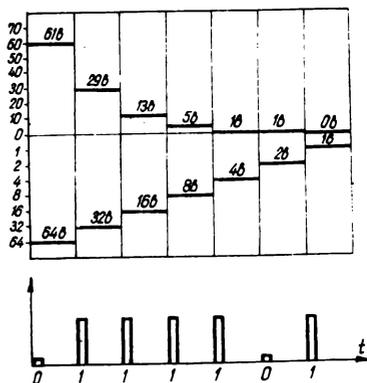


Рис. 6.13. Принцип метода сравнения и вычитания.

Метод КИМ обладает высокой помехоустойчивостью, поскольку для неискаженной передачи сообщения достаточно достоверно передать только сам факт наличия или отсутствия передаваемых импульсов; искажения формы импульсов существенной роли не играют. Метод КИМ широко используется в системах передачи данных, а также в системах телеуправления и телеконтроля.

Ограничение разнообразия передаваемых импульсов двумя состояниями (наличие и отсутствие импульса) сводит модуляцию к манипуляции. Наиболее распространены следующие методы манипуляции.

Амплитудная манипуляция (КИМ-АМ). Этот метод манипуляции является частным случаем АИМ-АМ. Для обеспечения удовлетворительной формы посылок необходимо передавать полосу частот, охватывающую третью гармонику частоты манипуляции по обе стороны несущей. Из-за низкой помехоустойчивости и трудности выбора оптимального порога (особенно при наличии замирания в канале связи) этот метод в системах передачи данных применяется редко. В системах телеуправления, использующих сигналы большой скважности, применение метода АМ целесообразно, поскольку при этом обеспечивается значительно большая мощность в импульсе, чем при методах передачи двоичных сигналов с активной паузой.

Частотная манипуляция (КИМ-ЧМ) является частным случаем АИМ-ЧМ. Она осуществляется с разрывом или без разрыва фазы (рис. 6.14). Более распространен способ частотной манипуляции без разрыва фазы, так как порождаемый им эффективный спектр уже спектра, воз-

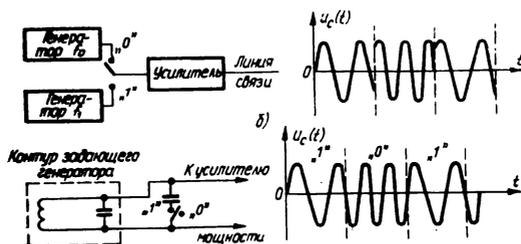


Рис. 6.14. Блок-схема и эпюра напряжения при КИМ-ЧМ:

а — с разрывом фазы; б — без разрыва фазы.

никающего при ЧМ с разрывом фазы. Наиболее высокую помехоустойчивость КИМ-ЧМ обеспечивает при индексе частотной манипуляции

$$m_{(\text{ЧМ})} = \frac{\Delta \omega_0}{\Omega}, \quad (6.76)$$

равном приблизительно двум, в результате чего полоса передаваемых частот оказывается в два раза шире полосы частот, передаваемой при амплитудной манипуляции. Помехоустойчивость передачи с частотной манипуляцией заметно выше, чем передачи с амплитудной манипуляцией. Однако при одинаковой амплитуде сигнала средняя мощность передатчика должна быть вдвое больше, чем при АМ.

Фазовая манипуляция (КИМ-ФМ) является частным случаем АИМ-ФМ. Наибольшая ширина спектра соответствует передаче сигнала, представляющей собой последовательность чередующихся манипулированных по фазе на 180° посылок одинаковой амплитуды. Спектр ФМ сигнала отличается тем, что в нем сильно подавлены колебания несущей частоты, благодаря чему основная доля энергии сигнала сосредоточивается в боковых частотах, являющихся носителями информации. Это способствует более эффективному использованию мощности передатчика. Полоса передаваемых частот охватывает только первую гармонику наивысшей частоты манипуляции по обе стороны несущей частоты. Важным достоинством ФМ является сочетание высокой помехоустойчивости со сравнительно узким спектром сигнала, однако практическая реализация этой системы сопряжена с рядом принципиальных трудностей, основной из которых является создание в месте приема синфазного с сигналом опорного напряжения. Из-за этого метод ФМ в чистом виде не используется.

Относительная фазовая манипуляция (ОФМ) является видоизменением ранее описанной ФМ, устраняющим основную трудность практической ее реализации. Особенностью ОФМ является наличие в передатчике дополнительного кодирующего устройства, которое обеспечивает передачу в начале сеанса вспомогательной посылки, определяющей начало отсчета для приема первой посылки. В дальнейшем дополнительное кодирование осуществляется путем сохранения фазы при передаче «0» и изменения фазы на противоположную при передаче «1» (рис. 6.15). Прием

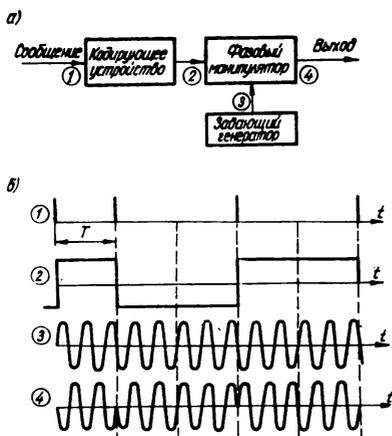


Рис. 6.15. Формирование сигналов при ОФМ:
 а — блок-схема передатчика; б — эпюры напряжений.

сигналов с ОФМ осуществляется способом сравнения фаз (ОФМ₁) или способом сравнения полярностей (ОФМ₂). В первом случае используется элемент задержки, на выходе которого происходит сравнение фаз последней и предыдущей посылки. Во втором случае происходит выявление знакоперемен при переходе от одной посылки к другой, следующей за ней.

Описанный способ манипуляции (предложенный Н. Т. Петровичем в 1954 году) устраняет необходимость создания опорного напряжения в

месте приема и все связанные с этим трудности. Он является одним из наиболее перспективных методов передачи данных, так как обладает такой же помехоустойчивостью, как КИМ-ФМ, и свободен от свойственных этому методу недостатков.

6.7. ДЕЛЬТА-МОДУЛЯЦИЯ

Так же как в случае КИМ, передача с помощью дельта-модуляции (ДМ) требует предварительной обработки передаваемого сигнала. Применение для этого блок-схемы, приведенной на рис. 6.16, обеспечивает непрерывное сравнение каждого значения дискретизированного во времени сигнала с предыдущим его значением. В зависимости от результата сравнения несущая частота передатчика модулируется положительным или отрицательным импульсом. Кодирующее устройство блок-схемы определяет полярность импульса, поступающего одновременно как на передатчик, так и на интегратор-декодер, который выдает на

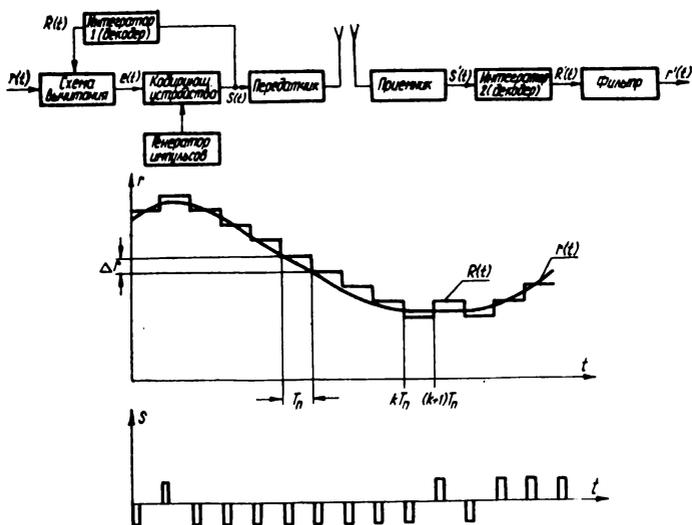


Рис. 6.16. Блок-схема и эюры напряжения при дельта-модуляции.

схему вычитания значение предыдущего сигнала, сравниваемого здесь с вновь поступающим.

В отличие от КИМ, где кодируются квантованные значения функции сообщения $r(t)$, в настоящем случае кодируются приращения этой функции, взятые для двух соседних периодов частоты повторения F_{Π} . Чтобы избежать перегрузок, приращения функции за время T_{Π} не должны превышать ступенек квантования. Последнее обеспечивается выбором частоты повторения по формуле

$$F_{\Pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{k}{k_1} n F_{\text{макс}}, \quad (6.77)$$

где k и k_1 — пик-фактор (отношение максимального значения к среднему квадратичному, т. е. эффективному, значению) функции сообщения и ее производной соответственно;

n — число уровней квантования;

$F_{\text{макс}}$ — граничная частота спектра сообщения.

Из формулы (6.77) следует, что при ДМ частота повторения импульсов для той же граничной частоты спектра сообщения $F_{\text{макс}}$ получается в несколько сотен раз больше, чем при обычных видах импульсной модуляции. Преимущество ДМ — значительная простота кодирующего и декодирующего устройств, недостаток — высокая частота повторения (отсчетов) $F_{\text{п}}$. Поэтому ДМ целесообразно применять при небольшом числе каналов и при условии, что допустима погрешность более 1%.

ПАРАМЕТРЫ КАНАЛОВ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

7.1. ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ КАНАЛА

Под пропускной способностью канала понимается наибольшее значение скорости передачи информации, которое может быть достигнуто в рассматриваемом канале. Согласно этому определению, обозначая пропускную способность канала через C , можно записать:

$$C = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I_{\max}(Y, X)}{T}. \quad (7.1)$$

В приведенной формуле $I_{\max}(Y, X)$ — количество информации, полученной приемником Y от передатчика X . Оно может быть выражено следующим образом:

$$I_{\max}(Y, X) = I(Y) - I(N), \quad (7.2)$$

где $I(Y)$ — количество информации, поступившей в приемник;

$I(N)$ — аддитивная помеха, действующая в канале передачи.

Максимальное значение скорости передачи определяется из максимального количества информации, которое может поступить на приемник. Последнее вытекает из энтропии самого информативного реального сигнала. Таким является непрерывный сигнал, плотность вероятностей распределения состояний которого соответствует нормальному (гауссову) закону. Его энтропия выражается формулой (2.32), а число независимых элементов сообщения за время T , произведя дискретизацию сигнала согласно теореме Котельникова, можно записать как

$$\frac{T}{\Delta t} = 2F_{\max} T. \quad (7.3)$$

Следовательно,

$$I(Y) = 2F_{\text{макс}} T (\log_2 \sqrt{2\pi e} \sigma_Y - \log_2 \Delta x). \quad (7.4)$$

Из полученного выражения в дальнейшем следует вычесть воспринятое приемным устройством количество информации, порождаемое шумами. С учетом самых опасных из-за своей информативности флуктуационных шумов представляется возможным записать

$$I(N) = 2F_{\text{макс}} T (\log_2 \sqrt{2\pi e} \sigma_N - \log_2 \Delta x). \quad (7.5)$$

Естественно, что количество элементов сообщения $2F_{\text{макс}}T$ и шаг квантования Δx в обоих случаях одинаковы, и формулы различаются только значениями среднего квадратического отклонения σ , которое в выражении (7.4) характеризует сигнал (σ_Y), а в выражении (7.5) — шум (σ_N).

В итоге максимальное количество информации, поступившее на приемник от передатчика, выражается формулой

$$I_{\text{макс}}(Y, X) = 2F_{\text{макс}} T \log_2 \frac{\sigma_Y}{\sigma_N}. \quad (7.6)$$

Учитывая, что дисперсия принятого сообщения

$$\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 + \sigma_N^2, \quad (7.7)$$

а отношение дисперсии может быть заменено отношением мощностей, получаем

$$I_{\text{макс}}(Y, X) = F_{\text{макс}} T \log_2 \left(1 + \frac{P}{N} \right), \quad (7.8)$$

где P — среднее значение мощности передаваемого сообщения;

N — среднее значение мощности помехи.

Подставляя полученное выражение (7.8) в формулу (7.1), записываем:

$$C = F_{\text{макс}} \log_2 \left(1 + \frac{P}{N} \right) \frac{\text{бит}}{\text{сек}}. \quad (7.9)$$

Это выражение известно как формула Шеннона и определяет максимальную скорость передачи информации по каналу, обеспечивающему пропускание частот до $F_{\text{макс}}$ при заданной средней мощности сигнала.

Характер изменения C в зависимости от $\frac{P}{N}$ определяется

порядком отношения $\frac{P}{N}$. Так, если $\frac{P}{N} \ll 1$, то допустима развертка в ряд

$$\begin{aligned} \log_2 \left(1 + \frac{P}{N} \right) &= \log_2 e \ln \left(1 + \frac{P}{N} \right) = \\ &= \log_2 e \left[\frac{P}{N} - \frac{1}{2} \left(\frac{P}{N} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{P}{N} \right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{P}{N} \right)^4 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Учитывая, что $\log_2 e = 1,443$ и что при $\frac{P}{N} \ll 1$ записанный в скобках ряд вырождается в значение $\frac{P}{N}$, следует, что для $\frac{P}{N} \ll 1$ имеем

$$C = 1,443 F_{\max} \frac{P}{N}. \quad (7.11)$$

При малом значении отношения сигнал/помеха пропускная способность канала прямо пропорциональна этому соотношению. Если $\frac{P}{N} \gg 1$, то добавление к этому отношению единицы становится несущественным и поэтому можно записать:

$$C = F_{\max} \log_2 \frac{P}{N}. \quad (7.12)$$

При больших значениях отношения сигнал/помеха имеем логарифмическую зависимость C от указанного соотношения.

Зависимость пропускной способности от полосы частот формулой (7.9) раскрыта не полностью, так как в реальных системах имеет место равномерное распределение помех (шумов) по всему спектру. Следовательно, увеличение полосы частот влечет за собой увеличение уровня помех. Предполагая, что

$$N = F_{\max} N_0, \quad (7.13)$$

где N_0 — спектральная плотность мощности помех, и выражая мощность сигнала через N_0 в форме

$$P = F_0 N_0, \quad (7.14)$$

получаем:

$$C = F_{\max} \log_2 \left(1 + \frac{F_0}{F_{\max}} \right). \quad (7.15)$$

Из приведенной формы записи (7.15) видно, что увеличение F_{\max} не дает неограниченного роста пропускной

способности канала, которая стремится к пределу, достигаемому при $\frac{F_0}{F_{\max}} \ll 1$. Предельное значение

$$C_{\text{пред}} = 1,443 \frac{P}{N_0}. \quad (7.16)$$

Таким образом, увеличение пропускной способности канала всегда достижимо путем увеличения мощности передающего устройства и уменьшения шумов. В то же время большой интерес представляет проблема передачи сообщений при малом значении отношения сигнал/шум в широкой полосе частот.

7.2. СОГЛАСОВАНИЕ СИГНАЛА С КАНАЛОМ

Количество информации, переносимое сигналом, было выражено формулой (7.8). Если учесть возможность модуляции и преобразования частоты, то верхняя частота спектра сигнала F_{\max} в этом выражении может быть заменена полосой частот, занимаемой сигналом, F_c . Поскольку формула (7.8) представляет собой произведение трех величин, которое легко изобразить в пространстве, то указанное произведение называют объемом сигнала (динамическим диапазоном). Объем сигнала V_c образуют ширина спектра сигнала F_c , длительность сигнала T_c и превышение сигнала над помехой $\log_2 \left(1 + \frac{P}{N}\right)$:

$$V_c = F_c T_c \log_2 \left(1 + \frac{P}{N}\right). \quad (7.17)$$

Канал связи, если не входить в детали его схемы, также можно охарактеризовать аналогичными величинами: полосой пропускания канала F_k , т. е. полосой частот, пропускаемых каналом без значительного ослабления; временем действия канала T_k , т. е. временем, на которое канал передан в наше распоряжение; диапазоном уровней $\log_2 \left(1 + \frac{P_{\max}}{P_{\min}}\right)$, зависящим от чувствительности P_{\min} и допустимых нагрузок P_{\max} аппаратуры канала. Произведение трех указанных величин называют емкостью канала связи:

$$V_k = F_k T_k \log_2 \left(1 + \frac{P_{\max}}{P_{\min}}\right). \quad (7.18)$$

По каналу связи принципиально возможна передача (без потери информации) любого сигнала, для которого выполняется условие

$$V_c \leq V_k. \quad (7.19)$$

Однако, кроме того, необходимо, чтобы объем сигнала помещался в емкости канала. Если последнее условие не соблюдается, то до передачи необходимо произвести согласование сигнала с каналом, которое заключается в преобразовании основных характеристик сигнала. При таком преобразовании, которое может представлять собой перенос сигнала вдоль осей или изменение одной его характеристики за счет другой (рис. 7.1), объем сигнала сохраняется неизменным.

Задержка сигнала (рис. 7.1, а) на определенное время может понадобиться, если канал связи выделяется на время, не совпадающее с временем возникновения сигнала. Задержки на время порядка миллисекунд осуществляются линиями задержки. Задержки на длительное время достигаются путем записи на магнитную ленту с последующим воспроизведением информации. Основные характеристики сигнала остаются при этом неизменными.

Преобразование частоты, однопольная модуляция и детектирование (рис. 7.1, б) обеспечивают перенос спектра

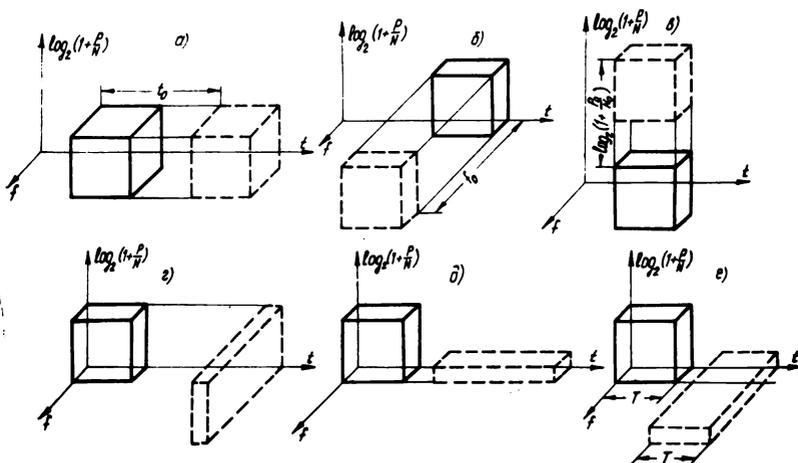


Рис. 7.1. Преобразования основных характеристик сигнала:

а — задержка; б — преобразование частоты; в — усиление; г — запись и воспроизведение с различными скоростями; д — накопление; е — кодирование.

сигнала в новый частотный диапазон, совпадающий с диапазоном канала.

Совместное усиление (или ослабление) сигнала и помехи (рис. 7.1, *в*) целесообразно осуществлять перед их передачей по участку, на котором ожидается воздействие новых помех. Предварительное поднятие уровня передачи существенно защищает ее от воздействия аддитивной помехи.

В случае, когда время, на которое предоставляется канал связи, короче длительности сообщения, возможна предварительная запись сообщения на магнитную ленту и воспроизведение его с увеличенной скоростью (рис. 7.1, *з*). При этом длительность передачи сигнала сокращается во столько же раз, во сколько увеличивается ширина спектра. Превышение сигнала над помехой остается при этом неизменным.

Использование канала в условиях резкого увеличения уровня помех, которое влечет за собой уменьшение превышения сигнала над помехой, до какого-то предела возможно путем накопления (рис. 7.1, *д*). Последнее заключается в многократном повторении передачи и ее суммировании на приемном конце, что восстанавливает превышение сигнала над помехой. Длительность передачи увеличивается при этом в n раз. Ширина спектра остается неизменной.

Уменьшение превышения сигнала над помехой может быть компенсировано также за счет увеличения полосы частот (рис. 7.1, *е*), при условии сохранения постоянным времени передачи. Этот случай сводится к выбору кода с увеличенной избыточностью, т. е. к передаче большего количества импульсов за то же время. В этом случае уменьшение отношения сигнал/шум компенсируется повышением исправляющей способности кода.

Из рассмотренных преобразований для теории связи наибольшее значение имеют модуляция и кодирование.

7.3. ПАРАМЕТРЫ ОСНОВНЫХ РАЗНОВИДНОСТЕЙ КАНАЛОВ СВЯЗИ

Разнообразие видов связи порождает разнообразие требований к каналам, по которым осуществляется эта связь. Данные о частотах, передаваемых при разных видах связи, сведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Вид связи	Передаваемая частота, кГц		Ширина передаваемого спектра, кГц
	нижняя	верхняя	
Телеграфия	0	0,1	0,1
Фототелеграфия	0	1,0	1,0
Телефония	0,3	3,4	3,1
Радиовещание с АМ	0,025	4,5	9,0
Радиовещание с ЧМ	0,025	16,0	240,0
Телевидение (черно-белое)	0,025	5500	5500
Телевидение (цветное)	0,025	8000	8000

Уровни принимаемых сигналов также сильно различаются в разных видах связи. Так, на входе приемников радиовещательных УКВ сигналов с ЧМ имеем дело с уровнями порядка 5—30 мкв; при приеме радиовещательных станций с АМ — с сигналами порядка 50—300 мкв; при приеме телевизионных передач — с сигналами порядка 200—1300 мкв, а при приеме телефонных разговоров — с сигналами порядка 0,25 в и выше.

Передача сигналов возможна по медным двухпроводным воздушным линиям до частот порядка 150 кГц. Дальность передачи зависит от диаметра провода и имеет порядок для \varnothing 2 мм — 150 км, \varnothing 3 мм — 300 км, \varnothing 4 мм — 500 км. Ослабление при этом не превышает 5 неп (43,4 дБ). Допустимые уровни сигналов находятся в пределах от 100 мв до 5,75 в.

При передаче сигналов по симметричным кабелям с бумажной изоляцией можно использовать диапазон частот до 250 кГц, а со стирофлексной изоляцией — до 550 кГц. При этом промежуточные усилители размещаются через каждые 18—19 км.

Использование коаксиальных кабелей дает возможность работать на частотах до 4 МГц, размещая усилители через каждые 9 км, или до 12 МГц при размещении усилителей через каждые 4,5 км.

Для передачи радиочастот используются антенны направленного или ненаправленного действия.

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ

8.1. ПОНЯТИЕ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ

Помехоустойчивость — это способность системы в целом противостоять вредному воздействию помехи. Так как определить помехоустойчивость системы в целом очень сложно, имеет смысл говорить о помехоустойчивости отдельных ее звеньев — кодов, модуляции, приемников. Часто оказывается достаточным оперировать сравнительной, или относительной, помехоустойчивостью. Предельно достижимая помехоустойчивость, следуя определению Котельникова, называется потенциальной. Сравнение фактической помехоустойчивости какого-либо устройства с его потенциальной помехоустойчивостью дает оценку качества устройства и показывает наличие неиспользованных резервов. Хотя единого количественного определения помехоустойчивости не существует, сравнение, при одинаковой помехе, может производиться по разным системам.

Как помеху, так и помехоустойчивость характеризует мера соответствия принятого сигнала переданному. За такую меру принимается верность. Формулу верности для дискретных сигналов можно вывести исходя из вероятности правильного приема $P_{\text{пр}}$, которую в общем виде можно записать

$$P_{\text{пр}} = 1 - P_{\text{ош}}, \quad (8.1)$$

где $P_{\text{ош}}$ — вероятность ошибки, которую, в свою очередь, можно выразить как

$$P_{\text{ош}} = 10^{-s}. \quad (8.2)$$

Из последнего равенства следует, что верность s выражается формулой

$$s = \lg \frac{1}{P_{\text{ош}}} = \lg \frac{1}{1 - P_{\text{пр}}} \quad (8.3)$$

и всегда является положительной величиной, находящейся в пределах от 5 до 10.

Для непрерывной функции понятие верности неоднозначно, так как оно зависит также от принятого критерия верности, который определяет метрику пространства сообщений, т. е. вероятность

$$P = P \{ \varepsilon \leq \varepsilon_0 \}. \quad (8.4)$$

Центр тяжести в этом случае переносится на выбор критерия верности ε_0 , который представляет собой некоторое, несущественное, отклонение принятого сообщения от переданного.

Верность может характеризовать помехоустойчивость кода при заданном отношении сигнал/помеха, при определенном способе модуляции и приема. В общем помехоустойчивость растет с ростом избыточности кода, определяющей его исправляющую способность (см. раздел 3.2).

Помехоустойчивость системы модуляции непосредственно характеризуется относительным изменением модулируемого параметра под действием данной помехи. Можно сравнивать различные системы модуляции по относительному увеличению отношения сигнал/помеха, даваемому некоторым идеализированным приемником.

Помехоустойчивость приемника легко выражается относительным увеличением отношения сигнал/помеха на выходе приемника по сравнению со значением того же отношения на его входе.

8.2. ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНЫХ ВИДОВ МОДУЛЯЦИИ

При модуляции один из параметров переносчика меняется в соответствии с характером передаваемого сигнала. Следовательно, каждый переносчик может быть модулирован столькими видами модуляции, сколько параметров он имеет. Изменение параметров переносчика в процессе передачи называется паразитной модуляцией. Определение помехоустойчивости разных видов модуляции сводится к определению степени влияния малой аддитивной помехи (паразитной модуляции) на информативный сигнал, переносимый разными приемами (с использованием разных видов модуляции).

С целью решения этой задачи предполагаем, что переносчик в месте передачи в общем виде описывается своими параметрами:

$$f(t) = f(a_1, a_2, \dots, a_n, t). \quad (8.5)$$

На приемном конце тот же переносчик принимается совместно с некоторой малой аддитивной помехой, что может быть записано следующим образом:

$$F(t) = f(a_1, a_2, \dots, a_n, t) + \xi(t). \quad (8.6)$$

Так как указанная помеха $\xi(t)$ в некоторой степени влияет на все параметры переносчика, то можем ее представить распределенной между этими параметрами, т. е.

$$F_1(t) = f(a_1 + \delta a_1, a_2 + \delta a_2, \dots, a_n + \delta a_n, t). \quad (8.7)$$

Если приведенное здесь распределение сделано правильно, то приращение по каждому параметру является его паразитной модуляцией и отношение сигнал/помеха выражается формулой

$$q_k = \frac{(\Delta a_k)^2}{(\delta a_k)^2}, \quad (8.8)$$

где Δa_k — наибольший допустимый прирост параметра от полезной модуляции.

Сравнивая выражение (8.8) для разных видов модуляции, получаем представление об их помехоустойчивости. Чем больше получаемое соотношение, тем помехоустойчивее соответствующий ему вид модуляции.

Решение поставленной задачи сводится к определению δa_k для каждого вида модуляции, т. е. правильному распределению помехи по параметрам сигнала. Математически правильность распределения может быть определена как достижение минимума величины d^2 :

$$d^2 = \overline{[F_1(t) - F(t)]^2}, \quad (8.9)$$

что обозначает минимальную разницу между значением сигнала, в котором помеха распределена по параметрам, и сигнала, к которому она просто приплюсована. Минимум приведенной в формуле (8.9) разницы достигается, если приращения отдельных параметров (вследствие паразитной модуляции) рассчитаны из выражений, в которых частные производные разниц (из формулы (8.9)) по приращениям параметров приравнены нулю.

Для этого величину d^2 выражаем с учетом формул (8.6) и (8.7):

$$d^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [F_1(t) - F(t)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T [\delta f(t) - \xi(t)]^2 dt, \quad (8.10)$$

где T — интервал усреднения, а

$$\delta f(t) = F_1(t) - f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(t)}{\partial a_k} \delta a_k, \quad (8.11)$$

что справедливо при малой помехе.

Таким образом, выражение (8.10) может быть переписано в виде

$$d^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial f(t)}{\partial a_k} \delta a_k - \xi(t) \right]^2 dt. \quad (8.12)$$

Далее определяются и приравняются нулю частные производные по приращениям отдельных параметров:

$$\begin{aligned} \frac{\partial d^2}{\partial \delta a_i} &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial \delta a_i} \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial f(t)}{\partial a_k} \delta a_k - \xi(t) \right]^2 dt = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial f(t)}{\partial a_k} \delta a_k - \xi(t) \right] \frac{\partial f(t)}{\partial a_i} dt = 0. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Последнее справедливо, так как из всей суммы только один член зависит от δa_i . Это член, содержащий δa_i . Из выражения (8.13) следует:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial f(t)}{\partial a_k} \cdot \frac{\partial f(t)}{\partial a_i} \delta a_k - \xi(t) \frac{\partial f(t)}{\partial a_i} \right] dt = 0, \quad (8.14)$$

а после введения нового обозначения

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f(t)}{\partial a_k} \cdot \frac{\partial f(t)}{\partial a_i} dt = b_{ki} \quad (8.15)$$

получаем

$$\sum_{k=1}^n b_{ki} \delta a_k = \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) \frac{\partial f(t)}{\partial a_i} dt. \quad (8.16)$$

Последнее выражение представляет собой систему

линейных уравнений, общее решение которой выгодно проиллюстрировать на случае двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} b_{11}\delta a_1 + b_{21}\delta a_2 &= A; \\ b_{12}\delta a_1 + b_{22}\delta a_2 &= B. \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

Умножая первое из уравнений (8.17) на b_{22} , а последнее на b_{21} , получаем:

$$\left. \begin{aligned} b_{11}b_{22}\delta a_1 + b_{21}b_{22}\delta a_2 &= Ab_{22}; \\ b_{12}b_{21}\delta a_1 + b_{22}b_{21}\delta a_2 &= Bb_{21} \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

и, вычитая второе из первого, записываем

$$\delta a_1 (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = Ab_{22} - Bb_{21},$$

или

$$\delta a_1 = \frac{Ab_{22} - Bb_{21}}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}. \quad (8.19)$$

Выразив полученное решение в категориях матрицы величин b_{ki} , можем утверждать, что

$$\delta a_1 = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^n D_{1i} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f(t)}{\partial a_i} \xi(t) dt, \quad (8.20)$$

где D — определитель матрицы b_{ki} ;

D_{1i} — алгебраическое дополнение элемента b_{1i} , получаемое в результате умножения его минора на множитель $(-1)^{k+i}$.

В общем виде формулу (8.20) можно переписать как

$$\delta a_k = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{D} \sum_{i=1}^n D_{ki} \frac{\partial f(t)}{\partial a_i} \xi(t) dt. \quad (8.21)$$

Введя еще одно новое обозначение

$$\frac{1}{D} \sum_{i=1}^n D_{ki} \frac{\partial f(t)}{\partial a_i} = y_k(t), \quad (8.22)$$

можно записать:

$$\delta a_k = \frac{1}{T} \int_0^T y_k(t) \xi(t) dt. \quad (8.23)$$

Тогда

$$\overline{(\delta a_k)^2} = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T y_k^2(t) \xi^2(t) dt dt. \quad (8.24)$$

Но так как для помехи с равномерным спектром

$$\frac{1}{T} \int_0^T \xi^2(t) dt = N = N_0 F, \quad (8.25)$$

где N — мощность помехи, а

$$\frac{1}{T} \int_0^T y_k^2(t) dt = P_{y_k}, \quad (8.26)$$

где P_{y_k} — мощность функции $y_k(t)$,

то выражение (8.24) может быть записано в виде

$$\overline{(\delta a_k)^2} = P_{y_k} N_0 F. \quad (8.27)$$

Применяя полученные выводы для сопоставления помехоустойчивости амплитудной и частотной модуляций гармонической несущей, получаем $f(t) = A \sin \omega t$, и соответственно $a_1 = A$, $a_2 = \omega$. В этом случае частные производные переносчика, необходимые для записи матрицы элементов b_{ki} , имеют вид

$$\frac{\partial f(t)}{\partial a_1} = \sin \omega t; \quad \frac{\partial f(t)}{\partial a_2} = A t \cos \omega t.$$

Составляющие матрицы b_{ki} , при условии, что $\omega T = n\pi \gg 1$, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\partial f(t)}{\partial a_1} \right]^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \\ &= \frac{1}{T} \left| \frac{\omega t}{2\omega} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right|_0^T = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{12} = b_{21} &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f(t)}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial f(t)}{\partial a_2} dt = \frac{1}{T} \int_0^T A t \sin \omega t \cos \omega t dt = \\ &= \frac{A}{2T} \int_0^T t \sin 2\omega t dt = \frac{A}{2T} \left| \frac{\sin 2\omega t}{4\omega^2} - \frac{2\omega t \cos 2\omega t}{4\omega^2} \right|_0^T = -\frac{A}{4\omega}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{22} &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\partial f(t)}{\partial a_2} \right]^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T A^2 t^2 \cos^2 \omega t dt = \\
 &= \frac{A^2}{T \omega^3} \left| \frac{\omega^3 t^3}{6} + \left(\frac{\omega^2 t^2}{4} - \frac{1}{8} \right) \sin 2\omega t + \frac{\omega t \cos 2\omega t}{4} \right|_0^T = \\
 &= \frac{A^2 T^2}{6} + \frac{A^2}{4\omega^2} \approx \frac{A^2 T^2}{6}
 \end{aligned}$$

(второй член может быть опущен как малая величина второго порядка). Таким образом, матрица b_{ki} получает вид

$$b_{ki} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}; & -\frac{A}{4\omega} \\ -\frac{A}{4\omega}; & \frac{A^2 T^2}{6} \end{vmatrix}.$$

Ее определитель $D = \frac{A^2 T^2}{12}$, а соответствующие алгебраические дополнения

$$D_{11} = \frac{A^2 T^2}{6}; \quad D_{12} = D_{21} = \frac{A}{4\omega}; \quad D_{22} = \frac{1}{2}.$$

Функции $y_k(t)$ имеют значения:

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= \frac{1}{D} \sum_{i=1}^n D_{1i} \frac{\partial f(t)}{\partial a_i} = \frac{12}{A^2 T^2} \left[\frac{A^2 T^2}{6} \sin \omega t + \frac{A}{4\omega} \times \right. \\
 &\quad \left. \times At \cos \omega t \right] \approx 2 \sin \omega t;
 \end{aligned}$$

$$y_2(t) = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^n D_{2i} \frac{\partial f(t)}{\partial a_i} =$$

$$= \frac{12}{A^2 T^2} \left[\frac{A}{4\omega} \sin \omega t + \frac{1}{2} At \cos \omega t \right] \approx \frac{6t}{AT^2} \cos \omega t.$$

Мощности, соответствующие функциям $y_k(t)$, получают значения

$$P_{y_1} = \frac{1}{T} \int_0^T y_1^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T 4 \sin^2 \omega t dt =$$

$$= \frac{4}{T \omega} \left| \frac{\omega t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4} \right|_0^T = 2;$$

$$P_{y_2} = \frac{1}{T} \int_0^T y_2^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{36t^2}{A^2 T^4} \cos^2 \omega t dt =$$

$$= \frac{36}{A^2 T^5 \omega^3} \left| \frac{\omega^3 t^3}{6} + \left(\frac{\omega^2 t^2}{4} - \frac{1}{8} \right) \sin 2\omega t + \frac{\omega t \cos 2\omega t}{4} \right|_0^T =$$

$$= \frac{6}{A^2 T^2} + \frac{9}{A^2 \omega^2 T^3} \approx \frac{6}{A^2 T^2}.$$

Усредненные значения мощности помехи в случаях амплитудной и частотной модуляций соответственно равны

$$\overline{\delta a_1^2} = P_{y_1} N_0 F = 2N_0 F; \quad \overline{\delta a_2^2} = \frac{6 N_0 F}{A^2 T^2}.$$

Следовательно, отношение сигнал/помеха при условии, что глубина АМ составляет 100%, получает значение

$$q_{AM} = \frac{(\Delta a_1)^2}{\overline{\delta a_1^2}} = \frac{A^2}{2 N_0 F} = q,$$

которое соответствует отношению мощностей полезного сигнала и помехи для случая модуляции синусоидальным сигналом. Для ЧМ это же соотношение выражается как

$$q_{CM} = \frac{(\Delta \omega)^2}{\overline{\delta a_2^2}} = \frac{(\Delta \omega)^2 A^2 T^2}{6 N_0 F} = q \frac{(\Delta \omega)^2 T^2}{3}.$$

Так как девиация $\Delta \omega_{CM} = m_{CM} \Omega = 2\pi F m_{CM}$, где m_{CM} — индекс частотной модуляции, а интервал усреднения, по теореме Котельникова, $T = \frac{1}{2F}$, то $q_{CM} = 3,3 m_{CM}^2 q$.

Таким образом, отношение сигнал/помеха в случае частотной модуляции получается в $3,3 m^2$ раз больше, чем в случае амплитудной модуляции. Такой выигрыш в помехоустойчивости достигается за счет расширения спектра модулированного сигнала.

8.3. ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ПРИЕМА

Обеспечение помехоустойчивости радиоприемника сводится к отысканию наилучшего способа приема при наличии помех. Этим занимается теория оптимальных методов приема, которая применяется при проектировании радиоприемных устройств. Оптимальными методами приема называются такие методы, которые обеспечивают наилучший в том или ином смысле прием сигналов или несомых ими сообщений при наличии помех. То, что вкладывается в понятие «наилучший», называется критерием оптимальности. Таким образом, прежде чем рассматривать какой-либо метод приема, следует четко определить критерий оптимальности приема.

Одним из наиболее распространенных критериев оптимальности приема является критерий максимального отношения сигнал/помеха $q_{\text{макс}}$. Этот критерий оказывается вполне подходящим для модулированных сигналов, так как получение на выходе фильтра наибольшего отношения сигнал/помеха во многих случаях обеспечивает наиболее благоприятные условия для последующей демодуляции сигнала, т. е. воспроизведения сообщений. Для реализации этого критерия необходим приемник с оптимальным линейным фильтром, обеспечивающим максимальное отношение сигнал/шум, и с последующим демодулятором.

Передаточная функция $K(\Omega)$ оптимального линейного фильтра (обеспечивающего максимальное отношение сигнал/шум) может быть найдена исходя из обратного преобразования сигнала по Фурье (4.27) и из выражения для флуктуационной (самой информативной) помехи, равномерно распределенной по всему частотному диапазону (7.13).

Рассматривая отношение сигнал/шум на выходе фильтра

с передаточной функцией $K(\Omega)$ в момент времени t_0 , соответствующий пику сигнала, получаем

$$q^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\Omega) K(\Omega) e^{j\Omega t_0} d\Omega}{\left[\frac{N_0}{2\pi} \int_0^{+\infty} |K(\Omega)|^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (8.28)$$

Согласно избранному критерию оптимальности, фильтр должен иметь такую передаточную функцию, чтобы он обеспечивал максимальное значение этого соотношения. Экстремум выражения (8.28) определяется методом вариационного исчисления и имеет место при

$$K(\Omega) = a\Phi(-\Omega)e^{-j\Omega t_0}, \quad (8.29)$$

что дает

$$q_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{N_0}, \quad (8.30)$$

где \mathcal{E} — энергия сигнала на входе фильтра. Это означает, что оптимальным в смысле обеспечения максимального отношения пикового значения напряжения сигнала к среднеквадратичному значению напряжения шума является такой линейный фильтр, передаточная функция которого с точностью до постоянного множителя совпадает со спектральной характеристикой (амплитудным спектром) передаваемого сигнала. Величина q_{\max} не зависит от t_0 , если передаточная функция (коэффициент передачи) фильтра выбирается для каждого нового значения t_0 в соответствии с формулой (8.29).

Исследуя полученный результат на предмет его физической реализуемости, выясняем, что оптимальный фильтр осуществим для всех случаев, когда напряжение на входе фильтра исчезает до наступления момента, когда напряжение на выходе достигает максимума. Учитывая это, получаем вывод, что оптимальный фильтр возможно реализовать для многих, однако не для всех реальных сигналов, например, он нереализуем для сигнала, затухающего по экспоненте.

Для сигнала, имеющего форму одиночного прямоугольного импульса длительностью τ_0 , спектральная характеристика выражается как

$$\Phi(\Omega) = \frac{E}{j\Omega} (1 - e^{-j\Omega\tau_0}). \quad (8.31)$$

Выбирая момент времени $t_0 = \tau_0$, получаем передаточную функцию оптимального фильтра в виде

$$K(\Omega) = \frac{aE}{j\Omega} (1 - e^{-j\Omega\tau_0}), \quad (8.32)$$

реализуемой схемой, изображенной на рис. 8.1. На схеме интегрирующая ячейка *ИЯ* с коэффициентом передачи $\frac{aE}{j\Omega}$ соответствует первому множителю формулы (8.32),

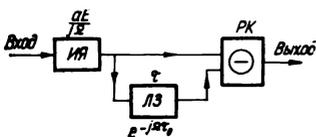


Рис. 8.1. Блок-схема оптимального фильтра.

линия задержки *ЛЗ* дает задержку на время τ_0 и в комбинации с разностным каскадом *РК* обеспечивает коэффициент передачи $(1 - e^{-j\Omega\tau_0})$, соответствующий второму множителю формулы (8.32). В итоге на выходе фильтра получается напряжение треугольной формы. Таким образом, оптимальный фильтр превращает прямоугольный импульс в

треугольный удвоенной длительности.

Наряду с оптимальными часто встречаются линейные квазиоптимальные фильтры. Это фильтры, форма частотной характеристики которых задана заранее, а максимальное значение отношения сигнал/шум достигается подбором ширины полосы пропускания этой частотной характеристики. Оказывается, что осуществленное указанным образом ограничение свободы действия при построении фильтра лишь незначительно уменьшает q_{\max} .

Другим часто употребляемым критерием оптимальности является критерий минимальной среднеквадратичной ошибки. Если в первом случае, когда использовался оптимальный фильтр, ставилась задача оптимального воспроизведения на фоне помех всего сигнала, то сейчас ставится задача оптимального воспроизведения сообщения. В этом случае даже очень сильное изменение (искажение) формы

сигнала еще не свидетельствует об искажении несомого им сообщения.

Критерий минимальной среднеквадратичной ошибки при большом отношении сигнал/помеха в случае помехи, имеющей характер белого шума, то есть равномерно распределенной по частотному диапазону с гауссовым распределением амплитуд, выполняется приемником, действующим по принципу максимальной обратной вероятности. Последнее понятие порождено предположением, что ни один приемник в принципе не может воспроизвести сообщение совершенно точно и что во всех случаях будет существовать некоторая вероятность ошибки. Поэтому от идеального приемника требуется, чтобы он вычислял распределение вероятностей (или плотностей вероятностей) $P_y(x)$ всех возможных значений принятого сообщения. Распределение $P_y(x)$ называется апостериорным или распределением обратных вероятностей, так как оно указывает, каковы вероятности значений «причины» x , если известно вызванное этой причиной следствие y .

На основе анализа распределения обратных вероятностей принимается решение о том, каково было значение переданного сообщения. Решение может осуществляться самим приемником, если в него заложено правило принятия решения. Таким правилом может быть принцип максимальной обратной вероятности, при соблюдении которого на выходе приемника всегда появляется наиболее вероятное значение сообщения.

Устройство, практически реализующее вычисление обратной вероятности сообщения, называется коррелятором, так как оно определяет взаимную корреляцию принятого и ожидаемого сообщения. Коррелятор является основным элементом оптимального приемника. В качестве такового может использоваться также оптимальный линейный фильтр.

Вычисление коэффициента корреляции для какого-то одного конкретного значения сообщения не представляет трудностей. Однако для определения сообщения, имеющего максимальную обратную вероятность, коэффициент корреляции должен быть найден для всех возможных значений сообщения, что гораздо труднее. Трудности существенно уменьшаются в случае дискретного сообщения (имеющего конечное число возможных дискретных

значений), причем структура приемника тем проще, чем меньше количество возможных дискретных значений сообщения.

8.4. СТРУКТУРА ОПТИМАЛЬНЫХ ПРИЕМНИКОВ

Структуру оптимального приемника для приема дискретных сообщений по принципу максимальной обратной вероятности (рис. 8.2) характеризует наличие вычислителей

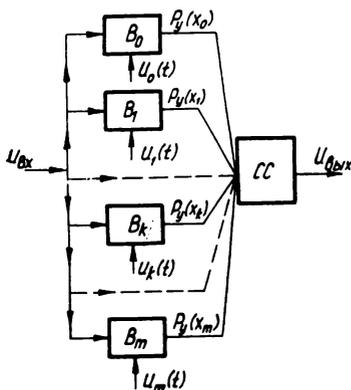


Рис. 8.2. Структура оптимального приемника.

(корреляторов), на которые подаются принятые и ожидаемые (возможные) сигналы. Получаемые в вычислителях обратные вероятности каждого из возможных дискретных сигналов сравниваются на схеме сравнения СС. Последняя, выбирая максимальную обратную вероятность, решает, который из возможных сигналов воспринят. Значения возможных сигналов, характеризуемые их априорными вероятностями и энергиями, играют в схеме оптимального приемника роль смещений.

Самым простым из возможных случаев приема дискретных сообщений является так называемое бинарное обнаружение. Оно соответствует случаю приема бинарного кода — нуля или единицы, т. е.

$$x_0(t) = 0; \quad x_1(t) = u_c(t). \quad (8.33)$$

В этом случае решается, имеется ли на входе приемника сигнал $u_c(t)$ (и шум) или сигнал отсутствует (т. е. существует только шум). Структура приемника для бинарного обнаружения существенно упрощается (рис. 8.3), и он представляет собой сочетание коррелятора и сравнивающего устройства, которое сравнивает полученное значение с порогом (постоянным отрицательным смещением). Установление названного порога зависит от избранного критерия.

Для случая бинарных сигналов критерий минимальной среднеквадратичной ошибки именуется также критерием минимальной полной вероятности ошибки или критерием идеального наблюдателя. Он сводится к

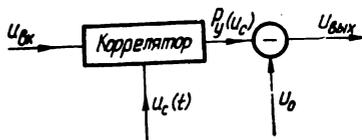


Рис. 8.3. Структура приемника бинарного обнаружения.

$$P_{\text{опт}} = P(x_0) P_{\text{лт}} + P(x_1) P_{\text{пр}} = \min, \quad (8.34)$$

где $x_0 = 0$;

$x_1 = 1$;

$P_{\text{лт}}$ — вероятность ложной тревоги;

$P_{\text{пр}}$ — вероятность пропуска.

В ряде случаев последствия ложной тревоги и пропуска могут оказаться несоизмеримыми. В таком случае целесообразно применение критерия минимального среднего риска R . Согласно этому критерию,

$$R = aP(x_0) P_{\text{лт}} + bP(x_1) P_{\text{пр}} = \min, \quad (8.35)$$

где a и b — весовые коэффициенты, выбираемые с учетом относительной опасности ложной тревоги и пропусков.

Для случая, когда априорные вероятности поступления нулей и единиц неизвестны, может быть применен критерий минимальной взвешенной вероятности ошибки

$$Z = cP_{\text{лт}} + dP_{\text{пр}} = \min, \quad (8.36)$$

где c и d — весовые коэффициенты.

Ввиду того что на практике обоснованный выбор весовых коэффициентов представляет существенные трудности, он часто заменяется выбором допустимой вероятности ложной тревоги, что приводит к так называемому критерию Неймана—Пирсона, согласно которому

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{пр}} &= \min; \\ P_{\text{лт}} &= \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (8.37)$$

Так как формулы (8.34) и (8.35) могут рассматриваться как частные случаи критерия минимальной взвешенной вероятности (8.36), который может быть записан выражением

$$Z' = P_{\text{пр}} + \beta P_{\text{лт}} = \min, \quad (8.38)$$

где порог $\beta = \frac{c}{d}$, то для первых трех критериев структура оптимального приемника получается одинаковой, различными оказываются только значения порога β . То же может быть доказано и для критерия Неймана—Пирсона.

Основными характеристиками оптимального приемника (обнаружителя) являются так называемые рабочие характеристики (рис. 8.4). Каждая из них дает зависимость вероятности правильного обнаружения $P_{по}$ от вероятности ложной тревоги $P_{лт}$ при одном из заданных значений энергетического отношения сигнал/шум q .

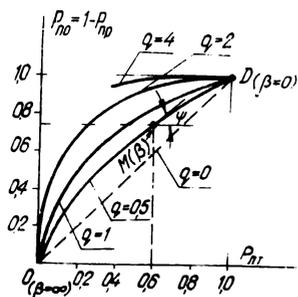


Рис. 8.4. Рабочие характеристики оптимального приемника.

Каждой точке M характеристики соответствует вполне определенное значение порога β . При изменении порога от бесконечности до нуля точка M перемещается по рабочей характеристике от начала координат в точку D . Для оптимальных, согласно перечисленным четырем критериям, приемников выполняется равенство

$$\operatorname{tg} \psi = \beta, \quad (8.39)$$

где ψ — угол наклона касательной к рабочей характеристике в заданной точке M . В случае первых трех критериев β не зависит от значения отношения сигнал/шум q , в случае же критерия Неймана—Пирсона β определяется по рабочим характеристикам для заданных значений $P_{лт}$ и q и, следовательно, зависит от значения отношения сигнал/шум.

Характеристики обнаружения дают зависимость вероятности ошибочного (или правильного) обнаружения от отношения сигнал/шум и позволяют определить минимальный сигнал, обеспечивающий заданное качество обнаружения. Для первых трех критериев характеристики обнару-

жения соответственно представляют собой зависимости $P_{ош} = f_1(q)$; $R = f_2(q)$; $Z = f_3(q)$, а для критерия Неймана—Пирсона $P_{по} = f_4(q)$ при $P_{лт} = \text{const}$. Для первых трех критериев они строятся в следующей последовательности. Первоначально рассчитывается порог β . Затем графически определяются соответствующие ему точки на всех рабочих характеристиках (по одной на каждой). По отмеченным точкам для каждого q определяется соответствующие ему $P_{лт}$ и $P_{пр}$, что дает возможность рассчитать соответственные $P_{ош}$, R и Z . По найденным значениям строится характеристика обнаружения (рис. 8.5).

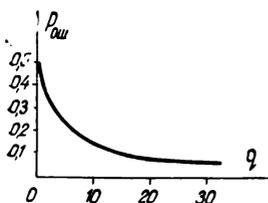


Рис. 8.5. Характеристика обнаружения для критерия минимальной полной вероятности ошибки.

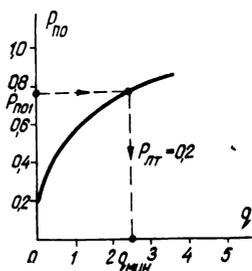


Рис. 8.6. Характеристика обнаружения для критерия Неймана—Пирсона.

Для критерия Неймана—Пирсона последовательность построения характеристики обнаружения сводится к проведению вертикали через точку $(P_{лт}, 0)$, где $P_{лт}$ — заданная вероятность ложной тревоги. Для каждой точки пересечения указанной вертикали с рабочей характеристикой определяются значения $P_{по}$ и q . По этим значениям строится искомая кривая (рис. 8.6).

8.5. ПРИЕМ ТОЧНО ИЗВЕСТНЫХ СИГНАЛОВ

Сигналы полагаются известными точно, если неизвестно лишь и подлежит определению, какой из ряда точно известных сигналов имелся на входе приемника в течение

определенного интервала времени. Поскольку определение сигнала означает одновременно определение соответствующего ему сообщения, в дальнейшем для краткости будем употреблять лишь понятие сигнал.

Формула обратной вероятности, вычисляемой оптимальным приемником, исходя из общих соотношений теории вероятностей записывается как

$$P_y(x) = \frac{1}{P(y)} P(x) P_x(y), \quad (8.40)$$

где $P(y)$ и $P(x)$ — соответственно безусловные вероятности принятого сигнала y и переданного сигнала x , а $P_x(y)$ — условная вероятность y при данном x .

Так как при вычислении $P_y(x)$ нас интересует зависимость этой функции от x при неизменном y , то множитель $\frac{1}{P(y)}$ может быть заменен некоторой константой k . $P(x)$ предполагается известным как априорная вероятность сигнала x .

$P_x(y)$ называется функцией правдоподобия. При данном x вероятность реализации сигнала $y(t)$ совпадает с вероятностью такой реализации помехи, которая равна разности $[y(t) - x(t)]$. Вероятность реализации помехи характеризуется плотностью этой вероятности. Полагая сообщение о помехе статистически независимым, получаем

$$P_x(y) = \varphi_{\text{ш}} [y(t) - x(t)]. \quad (8.41)$$

Плотность вероятности помехи, имеющей характер белого шума, для каждой частоты выражается одномерным законом распределения шума:

$$\varphi_{1\text{ш}} [y_k(t) - x_k(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} e^{-\frac{[y_k(t) - x_k(t)]^2}{2N}}, \quad (8.42)$$

что соответствует многомерному закону

$$\varphi_{\text{ш}} [y(t) - x(t)] = \frac{1}{(\sqrt{2\pi N})^n} e^{-\frac{1}{2N} \sum_{k=1}^n [y_k(t) - x_k(t)]^2}. \quad (8.43)$$

Учитывая, что, согласно теореме Котельникова,

$$\int_0^T f^2(t) dt = \frac{1}{2F_{\max}} \sum_{k=1}^n f_k^2, \quad (8.44)$$

а

$$N = F_{\max} N_0, \quad (7.13)$$

выражение (8.41) представляется возможным переписать в форме

$$P_x(y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi N})^n} e^{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [y(t) - x(t)]^2 dt}, \quad (8.45)$$

а

$$P_y(x) = k_1 P(x) e^{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [y(t) - x(t)]^2 dt}, \quad (8.46)$$

что после элементарных преобразований с учетом постоянства величин, не зависящих от x , может быть переписано в форме

$$P_y(x) = k_2 P(x) e^{-\frac{\mathcal{E}}{N_0} \int_0^T y(t)x(t) dt}, \quad (8.47)$$

или

$$P_y(x) = k_2 P(x) e^{-\frac{\mathcal{E}}{N_0} e^{B_{12}}}, \quad (8.48)$$

где \mathcal{E} — энергия сигнала, несущего сообщение x ;
 B_{12} — величина, пропорциональная функции взаимной корреляции воспринятого и переданного сигнала;

$$B_{12} = \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t)x(t) dt. \quad (8.49)$$

Так как приемник действует по принципу максимальной обратной вероятности, то он воспроизводит каждый раз тот сигнал, для которого обратная вероятность $P_y(x)$ оказывается наибольшей.

В случае бинарного обнаружения возможно только наличие или отсутствие сигнала, т. е. логарифмы ранее приведенной формулы (8.48) для этих случаев имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \ln P_y(1) &= \ln k_2 P(1) - \frac{\mathcal{E}}{N_0} + B_{12}; \\ \ln P_y(0) &= \ln k_2 P(0). \end{aligned} \right\} \quad (8.50)$$

Приемник фиксирует единицу, если

$$\ln P_y(1) > \ln P_y(0), \quad (8.51)$$

что в реальном устройстве сводится к

$$B_{12} > U_0, \quad (8.52)$$

где отрицательное смещение

$$U_0 = \ln \frac{P(0)}{P(1)} + \frac{\mathcal{E}}{N_0}. \quad (8.53)$$

В противном случае считается, что принят нуль.

Вероятность ложной тревоги в таких условиях равна вероятности выполнения условия (8.52) при отсутствии сигнала, т. е. силами помехи, а вероятность пропуска сводится к вероятности невыполнения условия (8.52), несмотря на присутствие подавленного помехой сигнала. Для случаев, когда допустимые вероятности ошибок не превышают 0,1, можно пользоваться формулой

$$\frac{\mathcal{E}}{N_0} = \left(\sqrt{\ln \frac{1}{P_{лт}} - 1,4} + \sqrt{\ln \frac{1}{P_{пр}} - 1,4} \right). \quad (8.54)$$

В этом случае надежность обнаружения (вероятность ошибки) не зависит от формы сигнала, ее определяет только его энергия \mathcal{E} .

Если оба сигнала ненулевые, то минимальная вероятность ошибок получается, когда энергия этих сигналов одинакова. Практически это соответствует случаям телеграфной связи с фазовой манипуляцией $x_2(t) = -x_1(t)$ и частотной манипуляцией $\int_0^T x_1(t)x_2(t) dt = 0$.

В случае многих (m) ортогональных равновероятных сигналов с одинаковой энергией, которые не перекрываются во времени или по частотным спектрам, переданный сигнал также выделяется среди остальных своей функ-

цией корреляции. Для случаев, когда $P_{\text{ош}} \leq 0,1$, справедливо выражение

$$\frac{\Theta}{N_0} \approx 2 \ln \frac{1}{P_{\text{ош}}} + \ln(m - 1) - 2,8. \quad (8.55)$$

8.6. ОБНАРУЖЕНИЕ НЕ ПОЛНОСТЬЮ ИЗВЕСТНОГО СИГНАЛА

Не полностью известными сигналами, или сигналами со случайными параметрами, называются такие сигналы, для которых полная определенность отсутствует не только по параметру, несущему информацию, но и по остальным параметрам.

Например, в синусоидальном сигнале кроме несущей информацию амплитуды может быть неизвестной (случайной) также начальная фаза этого сигнала. Такое положение исключает возможность непосредственного применения ранее рассмотренных методов. Чем меньше мы знаем о сигнале, тем менее совершенны возможные методы его приема. Исходя из этого будут рассмотрены целесообразные методы приема и оценена потеря верности, обусловленная неполным знанием сигнала.

В случае неизвестных амплитуды (в которую заложена информация) и фазы существуют две возможности обна-

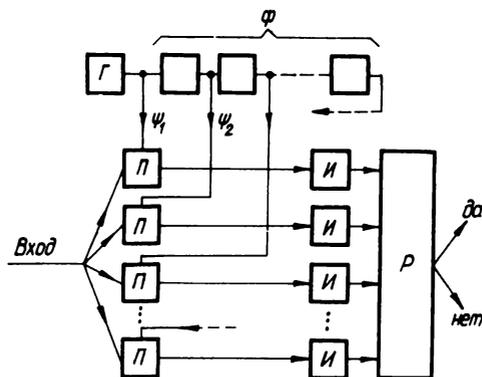


Рис. 8.7. Схема многоканального приема.

ружения сигнала. Первая сводится к предварительному замеру неизвестной фазы с последующим возвратом к случаю точно известного сигнала. Так как непосредственное измерение фазы лабораторным методом требует времени, которое отсутствует в условиях приема сообщений, то измерение фазы сводится к использованию схемы многоканального приема (рис. 8.7) для каждого отдельного сигнала. Согласно этой схеме, имеется m преобразователей, каждый из которых состоит из перемножителя $П$ и интегратора $И$. На вторые входы перемножителей подаются напряжения, одинаковые по частотам, но разные по фазам, так как снимаются с различных звеньев фазосдвигающей цепочки Φ , питаемой общим генератором G . Решающее устройство P , во-первых, выбирает наибольшее из поступающих на его вход напряжений и, во-вторых, сравнивает это напряжение с заданным пороговым значением. Вторая операция в точности совпадает с действием, проводимым для полностью известного сигнала. Количество преобразований (каналов) m определяется допустимой потерей верности, выражающейся в уменьшении отношения сигнал/помеха. Делая предположение, что наибольшее уменьшение этого отношения составляет 25%, получаем функцию приращения фазового угла $\cos^2 \delta\psi_{\max} = \frac{3}{4}$, что соответствует $\delta\psi_{\max} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$. Отсюда шаг фазы (сдвиг по фазе между двумя снимаемыми с фазосдвигающей цепочки сигналами) получается равным 60° , а число каналов $m = \frac{2\pi}{60^\circ} = 6$. При этом уменьшение значения $\cos^2 \delta\psi$ в среднем оказывается гораздо меньшим.

Так как $\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{+\frac{\pi}{6}} \cos^2 \delta\psi d\delta\psi = \frac{3}{\pi} \left| \frac{\delta\psi}{2} + \frac{\sin 2\delta\psi}{4} \right|_{-\frac{\pi}{6}}^{+\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,93$, то уменьшение отношения сигнал/помеха при наличии шести каналов составляет в среднем всего 7%.

Вторая возможность обнаружения рассматриваемого, не полностью известного сигнала сводится к усреднению фазы весовой функции. Это может быть достигнуто, если в ка-

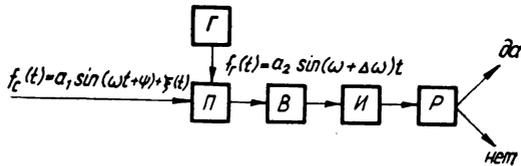


Рис. 8.8. Схема, усредняющая фазу весовой функции.

честве весовой функции использовать сигнал качающейся частоты, в котором девиация выбирается так, чтобы за время существования входного сигнала образовался набег фазы, равный 2π . Такой прием существенно упрощает схему приема (рис. 8.8), которая отличается от схемы приема точно известного сигнала лишь наличием выпрямителя B , однако среднее уменьшение значения отношения сигнал/помеха в этом случае получается равным 34%.

Обнаружение не полностью известного сигнала становится еще более сложной задачей, если, кроме фазы, неизвестна также и частота сигнала (известны только пределы, в которых она находится). В таком случае в качестве весовой функции целесообразно использовать тот же

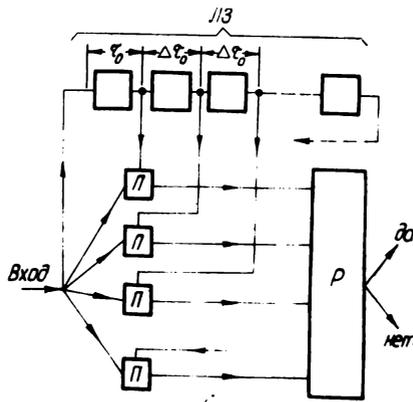


Рис. 8.9. Схема автокорреляционного приема.

принятый сигнал, однако сдвинутый по фазе на некоторое время τ . Такой метод приема называется автокорреляционным и осуществляется по схеме (рис. 8.9), в которой звенья линии задержки подбираются так, чтобы начальная задержка τ_0 соответствовала интервалу корреляции помехи, а в последующих звеньях шаг задержки $\Delta\tau_0$ позволял с небольшой потерей найти полезный сигнал.

МНОГОКАНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

9.1. ОСНОВЫ РАЗДЕЛЕНИЯ КАНАЛОВ

Многоканальными системами именуется системы, в которых передача большого количества независимых друг от друга сообщений осуществляется одновременно по одной линии связи. Их развитие обусловлено стремлением экономить средства, необходимые для построения линий связи. Многоканальные системы строятся в основном для совокупности сообщений коммерческого характера, передаваемых на большие расстояния. Самыми распространенными многоканальными системами следует считать системы многократной телеграфии, телефонии и передачи данных, системы радиорелейной связи с использованием искус-

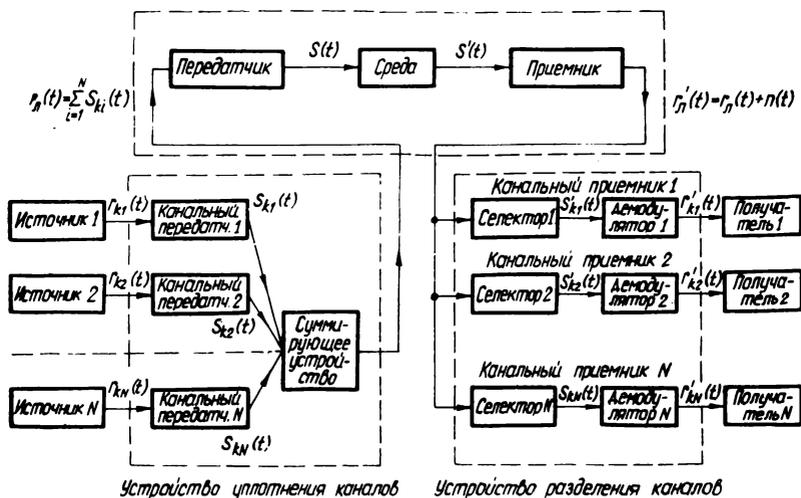


Рис. 9.1. Функциональная схема многоканальной системы.

венных спутников земли, системы радиотелеметрии и радиотелеуправления. Отличительной особенностью всех этих систем является то, что все они содержат устройства, позволяющие уплотнить линии связи, и устройства, обеспечивающие разделение принятых сообщений.

Общий принцип многоканальной системы приводится на блок-схеме (рис. 9.1), представляющей многоканальную систему радиосвязи. Первым элементом каждой из таких систем является источник информации, который наряду с «генератором сообщения» (печатным текстом, диктором, передаваемым изображением) содержит также преобразователь информации в электрический сигнал (телеграфный аппарат, микрофон, телевизионную трубку) и при необходимости также кодирующее устройство. На выходе каждого такого источника получаем канальное сообщение, обозначаемое $r_{k1}(t)$, $r_{k2}(t)$ и т. д. Эти канальные сообщения, или электрические сигналы отдельных абонентов, поступают на устройство уплотнения каналов, входными узлами которого являются канальные передатчики. Они преобразуют канальные сообщения в канальные сигналы $s_{k1}(t)$, $s_{k2}(t)$ и т. д. согласно закону

$$s_{ki}(t) = \Lambda_i r_{ki}(t), \quad (9.1)$$

где Λ_i — оператор, снабжающий умножаемое на него сообщение свойствами, отличающими это сообщение от сообщений, передаваемых по другим каналам. Все канальные сигналы подаются на общее суммирующее устройство, на выходе которого после сложения всех канальных сигналов образуется линейное многоканальное сообщение

$$r_n(t) = \sum_{i=1}^N s_{ki}(t). \quad (9.2)$$

Последнее подается на передатчик (линейный), в котором линейное сообщение преобразуется в высокочастотный линейный сигнал

$$s_n(t) = M r_n(t) = M \sum_{i=1}^N s_{ki}(t), \quad (9.3)$$

который излучается в пространство антенной передатчика. В среде между антенной передатчика и антенной приемника предполагается существование группового (общего)

канала, или линии связи. Считается, что на этом участке к сигналу прилагаются все возможные помехи.

Приемник линейного (группового) сигнала воспринимает этот сигнал совместно с помехами, что может быть записано как

$$s'_{\text{л}}(t) = k(t) s_{\text{л}}(t) + \pi(t), \quad (9.4)$$

где $k(t)$ — мультипликативная помеха (и искажения);

$\pi(t)$ — аддитивная помеха (и искажения).

Воспринятый линейный сигнал снимается с переносчика (демодулируется), т. е. восстанавливается линейное сообщение. Это восстановление производится оператором M^{-1} , обратным оператору M . Пренебрегая действием мультипликативной помехи на выходе приемника, получаем

$$r'_{\text{л}}(t) = M^{-1} s'_{\text{л}}(t) = r_{\text{л}}(t) + \pi_1(t) = \sum_{i=1}^N s_{ki}(t) + \pi_{ki}(t). \quad (9.5)$$

Из формул (9.3) и (9.5) следует, что условием нормальной работы линии связи является взаимная однозначность преобразований, осуществляемых операторами M и M^{-1} , которые характеризуют соответственно работу передатчика и приемника.

Снятое с приемника линейное сообщение поступает на устройство разделения каналов. Каждый из находящихся в нем селекторов призван выделить из линейного сообщения «свой» канальный сигнал. Это действие характеризуется некоторым оператором p_l . Если пренебречь помехами, процесс разделения можно представить как воздействие оператора p_l на линейное сообщение $r_{\text{л}}(t)$:

$$\left. \begin{aligned} p_l r_{\text{л}}(t) &= p_l \sum_{i=1}^N s_{ki}(t) = s_{kl}(t) \quad \text{при } i = l; \\ p_l \sum_{i=1}^N s_{ki}(t) &= 0 \quad \text{при } i \neq l. \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

В дальнейшем происходит обратное преобразование канальных сигналов $s_{ki}(t)$ в канальные сообщения $r_{ki}(t)$:

$$\Lambda_i^{-1} s_{ki}(t) = r_{ki}(t). \quad (9.7)$$

Как и в линейном приемнике, здесь, согласно формулам (9.1) и (9.7), взаимная однозначность преобразования

обеспечивается обратностью оператора Λ_i^{-1} оператору Λ_i . Полученное канальное сообщение дальше поступает к его получателю — абоненту.

Характерной особенностью многоканальных систем радиосвязи является двукратное преобразование сообщений в сигналы и обратно. Основной проблемой многоканальной связи следует считать надежное разделение канальных сигналов на приемной стороне. Эта задача в некоторой степени похожа на отделение сигналов от помех в обычных системах связи. Отличие, однако, состоит в том, что при разделении сигналов и помех параметры последних не заданы, в то время как для разделения сигналов соседних каналов существует возможность придать этим сигналам свойства, способствующие их разделению наилучшим образом, т. е. с минимальным уровнем помех и искажений.

С целью выявления свойств, которыми сигналы должны обладать, чтобы их можно было разделить, целесообразно рассмотреть сигналы и сообщения с геометрической точки зрения. Согласно теореме Котельникова, любой непрерывный сигнал с ограниченным спектром (верхняя частота спектра F_{\max}) может быть выражен дискретными отсчетами, совершаемыми через интервалы времени, определяемые по формуле (5.4). Необходимое для восстановления сигнала количество отсчетов выражается формулой (7.3). Эти отсчеты взаимонезависимы и ортогональны (согласно свойствам ряда Котельникова), и потому их количество определяет размерность многомерного пространства, в котором располагаются все векторы этого сигнала (или сообщения). Таким образом, любой сигнал (или сообщение) занимает определенный объем многомерного пространства, размерность которого определяется по формуле (7.3).

Канальный передатчик, действие которого характеризуется оператором Λ_i , преобразует векторы сообщения $r_{ki}(t)$ в векторы сигналов $s_{ki}(t)$. В процессе преобразования размерность пространства канальных сигналов может либо остаться равной размерности пространства соответствующих сообщений, либо увеличиться по сравнению с последней. Например, если в канальном передатчике происходит амплитудная модуляция, полоса частот, занимаемая этим сигналом, увеличивается вдвое, что соответствует удвоению размерности векторного пространства.

Рассмотренное преобразование осуществляется независимо в каждом канале. Образующее в дальнейшем линейное сообщение занимает тогда некоторое пространство, состоящее из подпространств отдельных канальных сигналов. Разделение сигналов возможно лишь в том случае, если размерность линейного сообщения совпадает с суммой размерностей канальных сигналов или превышает ее, причем канальные сигналы в воображимом пространстве нигде не перекрываются (рис. 9.2). Отсюда следует, что в качестве канальных сигналов удобно использовать ортогональные функции времени.

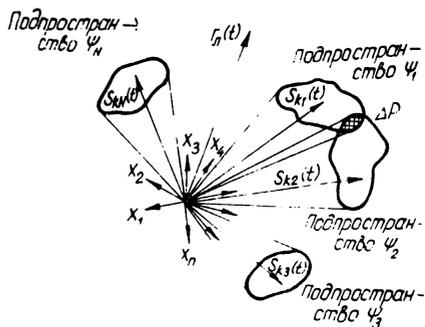


Рис. 9.2. Пространство канальных сигналов.

Из большой совокупности разновидностей взаимортогональных сигналов в качестве канальных сигналов одной системы чаще всего используются такие, частотные спектры которых не перекрываются. Разделение таких сигналов возможно с помощью частотных фильтров, каждый из которых пропускает спектр частот, принадлежащий данному канальному сигналу, и задерживает все остальные частоты.

Другим распространенным случаем является использование в одной системе канальных сигналов, не перекрывающихся во времени. В этом случае линия связи представляется абонентским парам поочередно с таким расчетом, чтобы дискретизация каждого сигнала обеспечивала его восстановление на приемном конце.

9.2. СИСТЕМЫ С ЧАСТОТНЫМ РАЗДЕЛЕНИЕМ КАНАЛОВ

Системы с частотным разделением каналов (ЧРК) строятся по блок-схемам, представляющим собой конкретизацию общей схемы многоканальной передачи (см. рис. 9.1). Возьмем в качестве примера радиотелеметрическую систему. Блок-схема такой системы (рис. 9.3) содержит

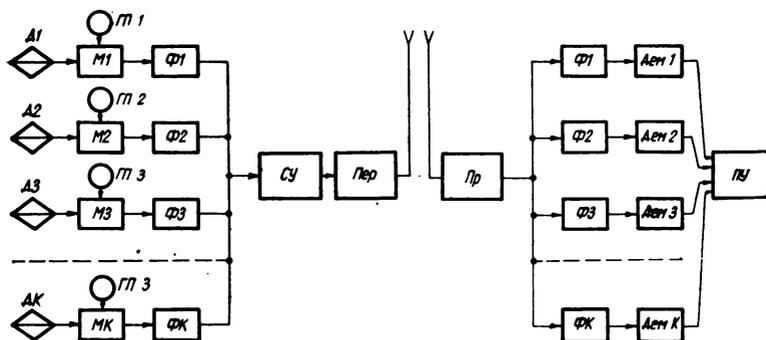


Рис. 9.3. Радиотелеметрическая система с ЧРК.

в виде источников информации датчики (*Д*), преобразующие измеряемые физические величины в электрические сообщения. Сигналы датчиков (канальные сообщения) подводятся к модуляторам *М*, питаемым с другой стороны генераторами поднесущих частот *ГП*. В радиотелеметрических системах с ЧРК самой распространенной является

Таблица 9.1

№ канала	Частота поднесущая, гц	Полоса, гц		Ширина полосы, гц	Частота перелаваемого сигнала, гц
		от	до		
1	400	370	430	60	6
2	560	518	602	84	8
3	730	675	785	110	11
4	960	888	1 032	144	14
5	1 300	1 202	1 398	196	20
6	1 700	1 572	1 828	256	25
7	2 300	2 127	2 473	346	35
8	3 000	2 775	3 225	450	45
9	3 900	3 607	4 193	586	59
10	5 400	4 995	5 805	810	81
11	7 350	6 799	7 901	1 102	110
12	10 500	9 712	11 288	1 576	160
13	14 500	13 412	15 588	2 176	220
14	22 000	20 350	23 650	3 300	330
15	30 000	27 750	32 250	4 500	450
16	40 000	37 000	43 000	6 000	600
17	52 500	48 560	56 440	7 880	790
18	70 000	64 750	75 250	10 500	1 050

частотная модуляция поднесущих, хотя в принципе возможно использование также АМ и ФМ. Характерной особенностью радиотелеметрических систем является наличие в них каналов с разными ширинами полос, что дает возможность подбирать стандартную поднесущую в зависимости от характера (скорости изменения) передаваемого параметра. Распределение телеметрических каналов приведено в табл. 9.1.

Модулированные напряжения (канальные сигналы) через полосовые фильтры Φ , ограничивающие спектры сигналов, подаются на суммирующее устройство $СУ$, откуда линейное сообщение следует на передатчик $Пер$, в котором этим сообщением модулируется несущая частота (переносчик). Частота переносчика обыкновенно выбирается в пределах от 216 до 235 $Мгц$ (метровые волны) или от 2200 до 2300 $Мгц$ (сантиметровые волны). И здесь самой распространенной является частотная модуляция. Линейный сигнал излучается в пространство (среду).

Приемник $Пр$ воспринимает линейный сигнал системой антенн, в которую входят спиральные антенны направленного действия, усиливает и демодулирует этот сигнал, т. е. снимает его с несущей, преобразуя в линейное сообщение. Далее следует распределение канальных сигналов по каналам, что достигается полосовыми фильтрами Φ , и демодуляция $Дем$, в результате которой получают канальные сообщения, регистрируемые пишущим устройством $ПУ$. Один (последний) из каналов телеметрической системы используется в виде контрольного, или калибровочного (на рисунке к обозначениям его элементов добавлена буква K).

В описанной системе в каждом канале имеется свой генератор поднесущей частоты. Такая система именуется параллельной. Ее основное достоинство заключается в том, что выход из строя одного канала не влияет на действие остальных. Недостатком следует считать необходимость большого количества генераторов поднесущих частот.

Кроме вышеописанного способа приема возможен также прием с последовательным анализом многоканального (линейного) сообщения. Соответствующая этому способу блок-схема приемника (рис. 9.4) содержит в своем разделяющем устройстве лишь один фильтр, поочередно обслуживающий все каналы. Таким образом, канальные

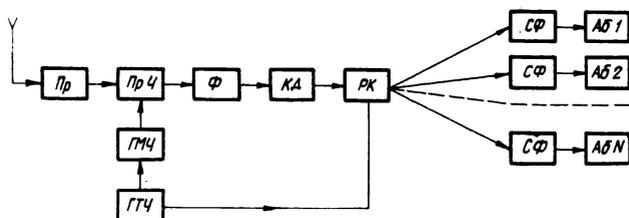


Рис. 9.4. Блок-схема приемника с последовательным анализом линейного сообщения.

сигналы, принадлежащие разным каналам, появляются на выходе фильтра в разные моменты времени. Это и положено в основу разделения каналов.

Согласование настройки фильтра достигается перемещением спектра линейного сообщения относительно фиксированной полосы пропускания фильтра. Для этого используется преобразователь частоты *ПрЧ*, получающий линейное сообщение и сигнал от генератора меняющейся частоты *ГМЧ*, работа которого управляется генератором тактовой частоты *ГТЧ*. Период повторения импульсов T_{Π} этого последнего выбирается по теореме Котельникова для самого высокочастотного сообщения, передаваемого по каналам. Таким образом, на выходе преобразователя *ПрЧ* получается линейное сообщение, спектр которого перемещен по оси частот таким образом, что он входит в полосу пропускания следующего за преобразователем *ПрЧ* фильтра *Ф*. За фильтром следует каналный демодулятор *КД*, демодулирующий получаемые импульсы. На выходе демодулятора получают мгновенные значения сообщений, передаваемых по каналам. Распределитель каналов *РК* работает от генератора тактовой частоты и обеспечивает направление канальных импульсов в соответствующие каналы. Сглаживающие фильтры *СФ* преобразуют дискретную информацию в аналоговую, поступающую к абоненту *Аб*.

Существенный интерес представляют также системы многоканальной телефонии с многократным преобразованием частоты. С целью максимального уплотнения каналов в этом случае применяется однобоковая модуляция (ОБМ) (АМ с передачей только одной боковой полосы). Основным элементом современных систем многоканальной телефонии

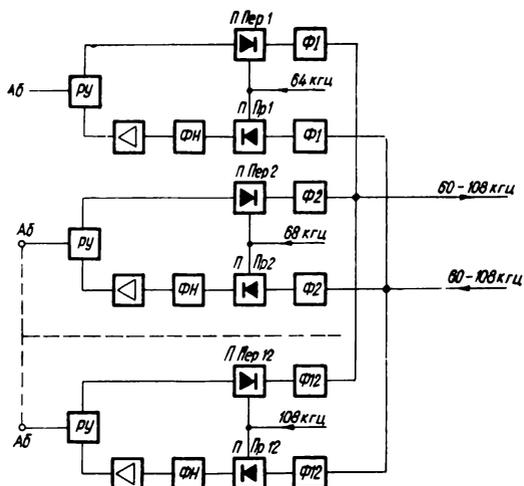


Рис. 9.5. Блок двенадцатиканальной группы.

является универсальная двенадцатиканальная группа. Блок двенадцатиканальной группы (рис. 9.5) построен так, что каждый канал содержит разделительное устройство *РУ* (дифференциальную систему), призванное направлять речевые сигналы, приходящие с телефонного аппарата, в линию передачи, а сигналы с линии приема, в свою очередь, в телефонный аппарат.

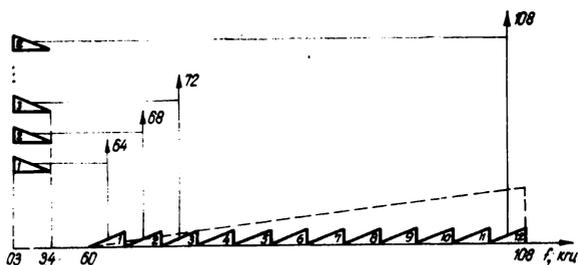


Рис. 9.6. Двенадцатиканальный спектр.

Каждая передающая ветвь блока содержит преобразователь передачи (ППер), к которому подводится напряжение поднесущей с частотой 64 кГц для первого, 68 кГц для второго и т. д. и 108 кГц для двенадцатого канала. Следующие за преобразователями фильтры Φ обеспечивают выпуск на линию только нижних боковых полос осуществленной в преобразователях модуляции. Так образуется двенадцатиканальный спектр с шириной 60—108 кГц (рис. 9.6).

Приемная ветвь также содержит полосовые фильтры, которые распределяют сигналы по каналам. Следующие за

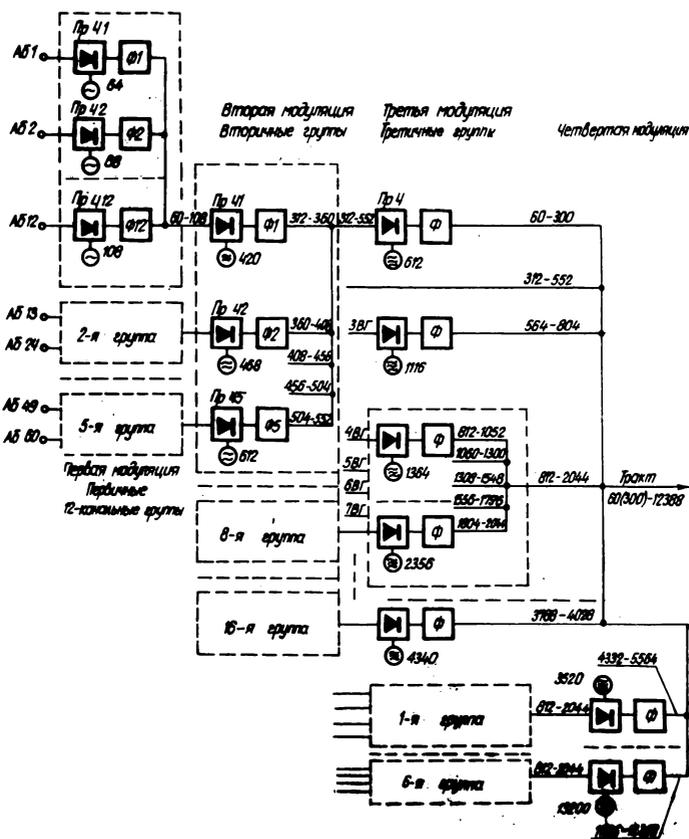


Рис. 9.7. Блок-схема дальнейшего уплотнения каналов.

ними преобразователи приема ППр сдвигают сигналы соответствующих каналов в диапазон звуковых частот (преобразуют каналный сигнал в каналное сообщение). Последние перед подачей на дифференциальную систему пропускаются через фильтры нижних частот ФН и усиливаются.

Для лучшего использования линии передачи (дальнейшего уплотнения) возможно продолжение преобразования

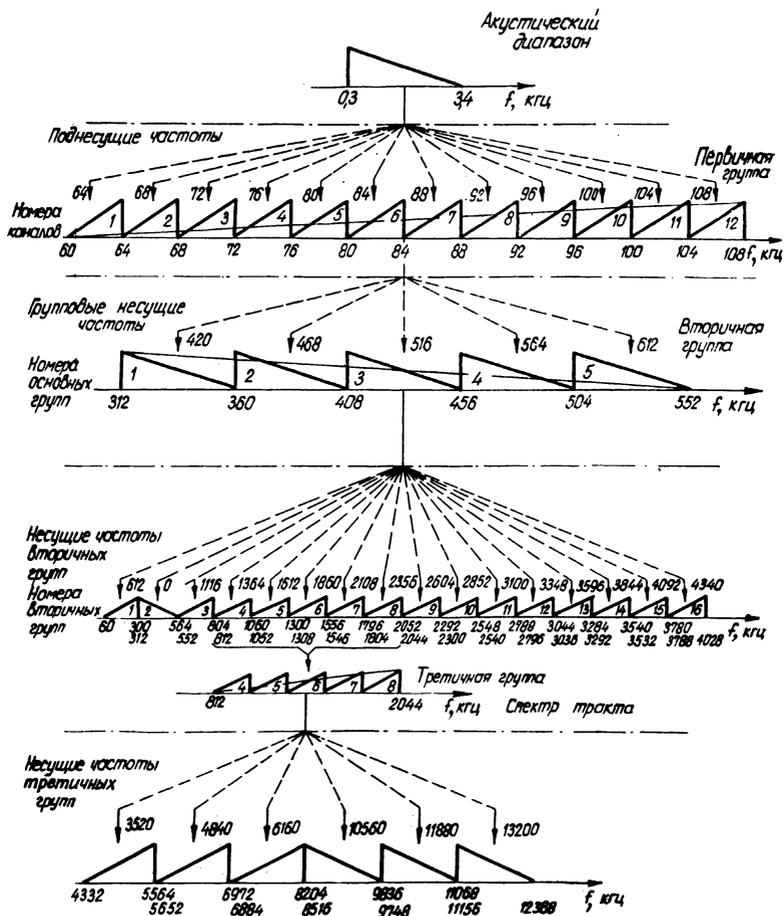


Рис. 9.8. План размещения каналов по частотам.

частоты, как это показано на рис. 9.7. Следствием дальнейшего уплотнения является размещение каналов (и частот) согласно плану, изображенному на рис. 9.8.

9.3. УЛУЧШЕНИЕ ЭНЕРГЕТИКИ СИГНАЛОВ В СИСТЕМАХ С ЧРК

Для получения неискаженной модуляции необходимо оставаться в пределах линейной части соответственной модуляционной характеристики. Превышение модулирующим колебанием некоторого допустимого уровня линейной модуляции $U_{\text{ЛМ}}$ приводит к появлению искажений.

В случае модуляции несущей сложным сигналом изложенное сводится к требованию, чтобы для амплитудной модуляции общий коэффициент глубины модуляции

$$M_{\text{АМ}} = \sum_{k=1}^n m_{\text{АМ}k}, \quad (6.14)$$

для фазовой модуляции общий индекс угловой модуляции

$$M_{\text{ФМ}} = \sum_{k=1}^n m_{\text{ФМ}k}, \quad (9.8)$$

а для частотной модуляции суммарная девиация угловой частоты

$$\Delta\omega_{\text{ЧМ}} = \sum_{k=1}^n \Delta\omega_{\text{ЧМ}k} \quad (9.9)$$

не превысили предписанных значений. Так как указанные величины достигают теоретически возможного максимального значения крайне редко, то ради этих случаев целесообразно занижать среднюю глубину модуляции, так как это приводит к снижению помехоустойчивости. Поэтому перед модуляцией производят ограничение больших выбросов мгновенных значений сообщения. Таким образом, за счет некоторого искажения сообщения достигается увеличение помехоустойчивости связи.

С целью уменьшения искажений, вызванных таким ограничением, иногда прибегают к предварительному сжатию, или компрессии, сигнала, т. е. пропускают его через устройство, имеющее амплитудную характеристику, которая меняется по логарифмическому закону. Такое действие имеет то преимущество перед ограничением сигнала, что сохраняет возможность его восстановления на месте приема. Последнее реализуется так называемым экспандером.

В случае, когда несущая (переносчик) модулируется суммой в свою очередь модулированных поднесущих, высказанное условие относится к максимальному мгновенному значению этой суммы, т. е.

$$|r_{\text{л}}(t)|_{\text{макс}} \leq U_{\text{лм}}. \quad (9.10)$$

Выполнение этого условия дает полную гарантию отсутствия искажений, порождаемых явлением перемодуляции, т. е. выходом суммарного напряжения суммы модулированных поднесущих за пределы напряжения линейной модуляции $U_{\text{лм}}$. Однако модулирующее напряжение достигает своего теоретически возможного максимума в крайне редких случаях — только тогда, когда пики всех компонентов, входящих в состав сложного модулирующего колебания, совпадают. Естественно, что невыгодно, ориентируясь на упомянутые исключительные (редкие) случаи, большую часть времени работать в режиме заниженной глубины модуляции, уменьшающей помехоустойчивость сигналов. Поэтому уровень отдельных поднесущих определяется исходя из допустимой для конкретного вида связи вероятности перемодуляции. Математически это сводится к следующему.

Для исключения искажений от перемодуляции даже в самых неблагоприятных случаях, т. е. когда глубина модуляции во всех каналах равна 100% и фазы всех каналов совпадают, одинаковые по своему значению амплитуды немодулированных поднесущих S_{k0} могут быть выражены через амплитуду стопроцентно модулированного сигнала S_{kM} и количество каналов N многоканальной системы следующим образом:

$$S_{k0} = \frac{1}{2} S_{kM} = \frac{U_{\text{лм}}}{2N}, \quad (9.11)$$

для случая ЧМ

$$S_{\text{к0}} = S_{\text{км}} = \frac{U_{\text{лм}}}{N}. \quad (9.12)$$

Придавая амплитудам поднесущих большие значения, можем рассчитать вероятность перемодуляции. Предполагая, что фазы всех поднесущих случайны и равновероятны в интервале от нуля до 2π , а количество каналов достаточно большое ($N \geq 10$), можем с достаточно хорошим приближением считать, что сумма мгновенных значений поднесущих (x) распределена по нормальному закону, т. е. плотность ее вероятностей выражается формулой (2.30).

Дисперсия рассматриваемого нами процесса может быть выражена с учетом формул (4.42) и (4.44) как

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=1}^N S_k^2(t); \quad (9.13)$$

для случая стопроцентной амплитудной модуляции поднесущих ее корень приобретает вид:

$$\sigma = S'_{\text{к0}} \sqrt{\frac{3N}{4}}, \quad (9.14)$$

а для случая частотной модуляции

$$\sigma = S'_{\text{к0}} \sqrt{\frac{N}{2}}. \quad (9.15)$$

Обозначение $S'_{\text{к0}}$ введено для выбранной амплитуды поднесущей, которая в общем случае больше значения $S_{\text{к0}}$, гарантирующего полное отсутствие перемодуляции.

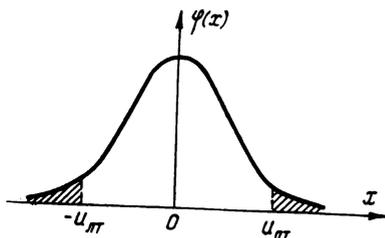


Рис. 9.9. График функции плотности вероятностей суммы модулированных поднесущих.

Располагая выражением функции плотности вероятностей суммы модулированных поднесущих, можем найти вероятность перемодуляции, т. е. вероятность того, что сумма поднесущих выйдет за пределы $U_{\text{лм}}$. Эта вероятность на рис. 9.9 изоб-

ражена заштрихованной площадью и определяется выражением

$$P(|x| > U_{\text{лм}}) = \int_{-\infty}^{U_{\text{лм}}} \varphi(x) dx + \int_{+U_{\text{лм}}}^{\infty} \varphi(x) dx = 1 - 2 \int_0^{U_{\text{лм}}} \varphi(x) dx. \quad (9.16)$$

Подставляя в это равенство значение $\varphi(x)$ из формулы (2.30), получаем

$$P(|x| > U_{\text{лм}}) = 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_0^{U_{\text{лм}}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (9.17)$$

Вводя новое обозначение

$$\frac{x}{\sigma} = y \quad (9.18)$$

и осуществляя вытекающую из этого замену переменных, в ходе которой обозначаем

$$\frac{U_{\text{лм}}}{\sigma} = y_{\text{пред}}, \quad (9.19)$$

выражение (9.17) переписываем в виде

$$P(|x| > U_{\text{лм}}) = 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{y_{\text{пред}}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \quad (9.20)$$

Так как часть правой стороны последнего уравнения, а именно

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{y_{\text{пред}}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \Phi(y_{\text{пред}}), \quad (9.21)$$

является функцией Лапласа или интегралом вероятностей ошибок, значения которого табулированы, то

$$P(|x| > U_{\text{лм}}) = P_{\text{пм}} = 1 - 2 \Phi(y_{\text{пред}}) \quad (9.22)$$

и, следовательно, можно определить очередность нахождения значения амплитуды каждой поднесущей многоканаль-

ного сообщения исходя из допустимой вероятности перемодуляции.

В первую очередь по заданному $P(|x| > U_{\text{лм}})$ определяется соответствующее $u_{\text{пред}}$. Для этого следует пользоваться таблицами функции Лапласа и формулой (9.22). В таблице 9.2 приведены некоторые результаты такого расчета.

Таблица 9.2

$P(x > U_{\text{лм}})$	$u_{\text{пред}}$	$P(x > U_{\text{лм}})$	$u_{\text{пред}}$	$P(x > U_{\text{лм}})$	$u_{\text{пред}}$
1×10^{-1}	1,645	5×10^{-3}	2,81	1×10^{-4}	3,91
5×10^{-2}	1,960	1×10^{-3}	3,31	5×10^{-5}	4,12
1×10^{-2}	2,576	5×10^{-4}	3,50	1×10^{-5}	4,47

Подставляя в выражение (9.19) значения $U_{\text{лм}}$ и σ , получаемые из формул (9.11), (9.12), (9.14) и (9.15), определяем допустимые увеличения амплитуд поднесущих:

$$\left(\frac{S'_{k0}}{S_{k0}} \right)_{\text{АМ}} = 2,3 \frac{\sqrt{N}}{u_{\text{пред}}} \quad (9.23)$$

и

$$\left(\frac{S'_{k0}}{S_{k0}} \right)_{\text{ЧМ}} = 1,41 \frac{\sqrt{N}}{u_{\text{пред}}}. \quad (9.24)$$

Использование приведенных соотношений дает возможность за счет незначительных допущенных искажений увеличить мощность сигналов в каналах многоканального тракта, что, в свою очередь, способствует помехоустойчивости всех сообщений, передаваемых по этим каналам.

9.4. ИСКАЖЕНИЯ В СИСТЕМАХ С ЧРК

В многоканальных системах передачи информации кроме разнообразных шумов и помех, которые иногда называются независимыми искажениями, передаваемые сигналы претерпевают искажения также из-за неидеальности общего (группового) тракта системы. Под этим следует понимать некоторое отклонение амплитудных и фазовых характеристик тракта от линейности, а частотных характе-

ристик — от равномерности. Так как все это приводит к определенной нелинейности тракта, то с точки зрения строго математической следовало бы все помехи и искажения рассматривать в совокупности, однако, учитывая относительную малость нелинейности, ради упрощения выкладок эти явления рассматривают отдельно. Потому, сделав допущение об отсутствии шумов, рассмотрим искажения, которые в системах с ЧРК называются перекрестными.

В зависимости от места возникновения искажений последние подразделяются на возникающие в низкочастотной или высокочастотной части общего тракта, а также возникающие в пространстве из-за изменения условий распространения радиоволн. Влияние характеристик системы на сигналы зависит от вида применяемой модуляции.

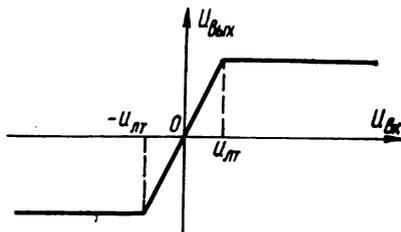


Рис. 9.10. Характеристика ограничителя.

Искажениями, возникающими в низкочастотной части системы с ЧРК, считают искажения, вносимые модулятором и демодулятором, т. е. нелинейностью модуляционной и демодуляционной характеристик. Приближенная оценка этих искажений возможна путем аппроксимации упомянутых характеристик линейно-ломаной зависимостью (рис. 9.10), представляющей, по сути дела, характеристику ограничителя. Отсюда вытекает, что претерпевший ограничение низкочастотный сигнал можно представить себе в виде суммы неискаженного сигнала и напряжения ошибки, которое равно по величине и противоположно по знаку срезанной части сигнала (рис. 9.11). Абсолютная величина среднего квадрата определенной таким образом ошибки, представляющая собой мощность перекрестных помех на выходе общего тракта, выражается как

$$\overline{\varepsilon_{\Pi}^2} = 2 \int_{U_{\text{ЛМ}}}^{\infty} (x - U_{\text{ЛМ}})^2 \varphi(x) dx. \quad (9.25)$$

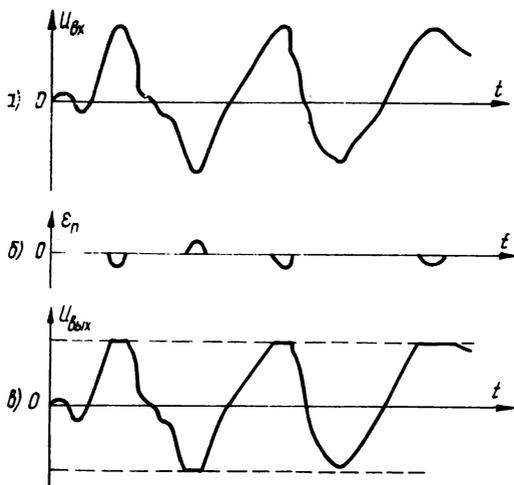


Рис. 9.11. Способ образования искаженного выходного сигнала:
 а — входное напряжение; б — помеха; в — искаженное выходное напряжение.

С учетом нормального распределения мгновенных значений по формуле (2.30) и перехода на новые переменные согласно формулам (9.18) и (9.19) это выражение может быть приведено к форме

$$\overline{\varepsilon_{\text{п}}^2} = \sigma^2 \left\{ P_{\text{пм}} (y^2_{\text{пред}} + 1) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} y_{\text{пред}} e^{-\frac{y^2_{\text{пред}}}{2}} \right\}. \quad (9.26)$$

Полученная формула увязывает абсолютную величину среднего квадрата ошибки, возникающей от перемодуляции, с вероятностью перемодуляции. Чтобы найти спектральную плотность перекрестных помех, необходимо знать ширину их спектра, вернее среднюю ширину, так как помехи представляют собой случайный процесс. Указанная ширина спектра зависит от средней длительности выбросов $\tau(y_{\text{пред}})$ случайного процесса, превышающих уровень ограничения $U_{\text{лм}}$. Допуская, что мы имеем дело со случайными величинами, подчиняющимися нормальному закону распределения и имеющими равномерный спектр, сосредоточенный в области нижних частот, верхняя граница которой по своему численному значению не менее чем

в три раза превышает нижнюю, средняя длительность выброса может быть определена по формуле

$$\tau(y_{\text{пред}}) = \frac{\sqrt{3} [1 - 2 \Phi(y_{\text{пред}})]}{2 f_{\text{пН}}} e^{\frac{y_{\text{пред}}^2}{2}}, \quad (9.27)$$

где $f_{\text{пН}}$ — частота самой высокой поднесущей.

Средняя ширина спектра помех $\Delta f_{\text{п}}$ в таких условиях может быть принята равной обратной величине средней длительности выброса, т. е.

$$\Delta f_{\text{п}} = \frac{2 f_{\text{пН}}}{\sqrt{3} P_{\text{пм}}} e^{-\frac{y_{\text{пред}}^2}{2}}. \quad (9.28)$$

Спектральная плотность помехи N_0 получается, если среднюю ее мощность разделить на ширину спектра:

$$N_0 = \frac{\overline{\varepsilon_{\text{п}}^2}}{\Delta f_{\text{п}}}. \quad (9.29)$$

Вид искажений, возникающих в высокочастотной части тракта, обусловлен видом модуляции сигнала. Так, в случае амплитудной модуляции при симметричной настройке высокочастотных трактов нелинейные искажения порождает только нелинейность амплитудных характеристик высокочастотного тракта. Частотные и фазовые характеристики в этом случае не приводят к нелинейным искажениям. В случае частотной модуляции сигнала нелинейность амплитудной и неравномерность частотной характеристик высокочастотного тракта практически не вызывают искажений, так как воздействие этих факторов устраняется амплитудным ограничителем, стоящим перед частотным детектором (или ограничиваются действием дробного детектора). Нелинейные искажения в этом случае могут возникнуть из-за нелинейности фазовой характеристики общего тракта. В настроенном приемнике нелинейность фазовой характеристики определяется в основном ее кубическим членом. Расчеты показывают, что основным способом уменьшения этих искажений является расширение полосы пропускания тракта. Учитывая, что рассматриваемые искажения растут с ростом поднесущей частоты канала, иногда с возрастанием номера канала увеличивают амплитуду и девиацию поднесущих.

Искажения, возникающие в пространстве между передатчиком и приемником, часто имеют интерференционное происхождение. Они могут быть вызваны работой передатчиков с частотами, близкими к частоте передатчика многоканальной системы; эффектом многолучевого распространения радиоволн, когда на вход приемника поступают два или более сигналов, приходящих разными путями, или отражениями сигналов в фидерных (или волноводных) линиях, соединяющих приемную и передающую антенны с приемником и передатчиком соответственно. Эти отражения возникают при несогласованности фидеров (или волноводов) с их нагрузками. Действие интерференционных искажений может быть существенно снижено применением антенн направленного действия, расположенных по возможности близко к передатчику (соответственно приемнику).

9.5. СИСТЕМЫ С ВРЕМЕННЫМ РАЗДЕЛЕНИЕМ КАНАЛОВ

Системы с временным разделением каналов (ВРК) также строятся по блок-схемам, представляющим собой конкретизацию общей схемы многоканальной передачи (см. рис. 9.1). Для случая радиотелеметрической системы блок-схема (рис. 9.12) содержит в виде источника инфор-

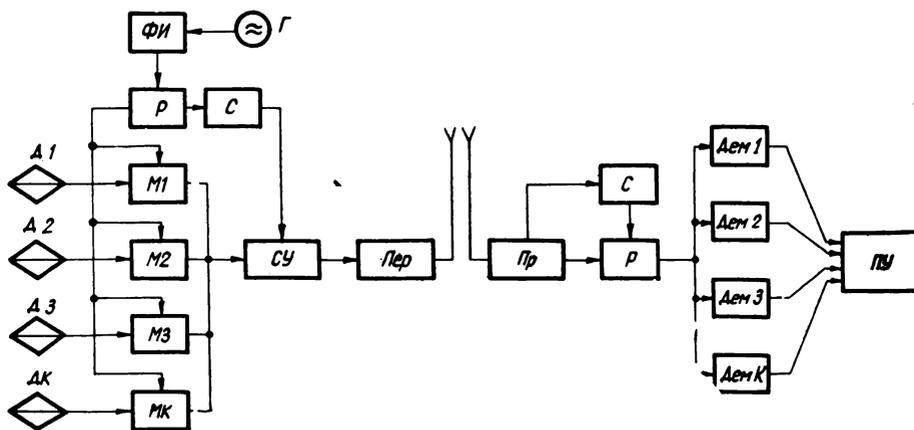


Рис. 9.12. Радиотелеметрическая система с ВРК.

мации датчики D , преобразующие измеряемые физические параметры в электрические величины. Сигналы датчиков (канальные сообщения) подводятся к модуляторам M , питаемым от распределителя импульсов P . Распределитель импульсов призван распределять по отдельным каналам импульсы, содержащиеся в последовательности импульсов, которая возникает благодаря формированию прямоугольных импульсов $\Phi И$ из гармонического колебания, вырабатываемого генератором поднесущей частоты Γ . Чтобы на приемной стороне облегчить определение принадлежности отдельных импульсов каналам, распределитель импульсов снабжает импульсами также так называемый синхронизатор C , который придает всем проходящим через него импульсам определенное, отличающее их от остальных импульсов свойство. Частота следования импульсов, подаваемых в каждый канал в отдельности, должна быть не ниже предела, определяемого теоремой Котельникова. Все канальные импульсы и импульсы, поступающие с синхронизатора, подаются на суммирующее (группирующее) устройство CY , выходя из которого

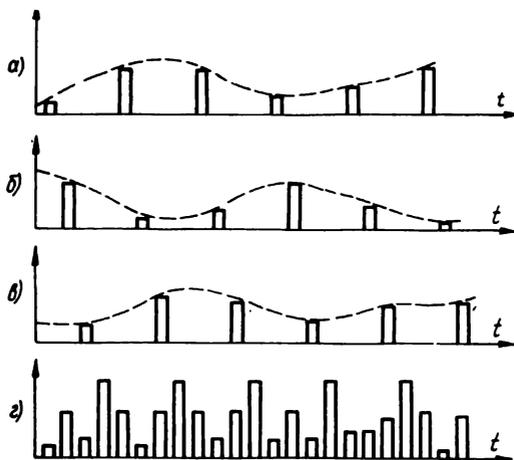


Рис. 9.13. Образование импульсной последовательности в системе с ВРК:

a — 1-й канал; $б$ — 2-й канал; $в$ — 3-й канал;
 $г$ — последовательность импульсов на выходе.

образуют одну общую последовательность (рис. 9.13). Эта последовательность подается на модулятор передатчика *Пер*, где модулирует несущую, которая после усиления подается на передающую антенну.

В приемнике *Пр*, антенной которого воспринимается высокочастотный сигнал, этот сигнал усиливается и демодулируется, т. е. с несущей снимается последовательность импульсов. Указанные импульсы тут же распределяются: синхронизирующие направляются в синхронизатор *С*, каналные — в распределительное устройство *Р*, которое по принципу своего действия полностью повторяет распределительное устройство передатчика. В итоге принятые модулированные импульсы распределяются по каналам отдельных абонентов, где происходит их демодуляция *Дем*, т. е. преобразование в исходные каналные сообщения, с последующей их подачей на пишущее устройство *ПУ*.

Описанные системы именуются последовательными радиотелеметрическими системами. В отличие от систем с ЧРК в этом случае неисправность источника поднесущей влечет за собой повреждение всей телеметрической системы.

9.6. ИСКАЖЕНИЯ В СИСТЕМАХ С ВРК

Возникающие в системах с ВРК искажения, которые в отличие от воздействия шумов и помех называются зависимыми искажениями, подразделяются на модуляционные, демодуляционные и перекрестные, или переходные.

Модуляционные и демодуляционные искажения по своей природе тесно связаны между собой, и поэтому их обычно рассматривают совместно. Они возникают в той части тракта, где присутствуют каналные сигналы. Эти искажения рассчитываются независимо от того, имеем ли мы дело с многоканальной или одноканальной системой. Различают линейные и нелинейные искажения. Линейными, или частотными, искажениями называется нарушение соотношений амплитуд разных составляющих спектра в процессе передачи сигнала по системе связи. Кроме общеизвестной причины — неравномерности амплитудно-частотных характеристик канального модулятора и демодулятора, в системах, где в качестве переносчика информации используется последовательность импульсов, причиной линейных искажений может являться также неравномерность

спектральной плотности импульсов в пределах полосы передаваемых частот (рис. 9.14). Указанная неравномерность становится ощутимой, если верхняя частота модуляции соизмерима с эффективной полосой частот, занимаемой импульсами-переносчиками. Под эффективной

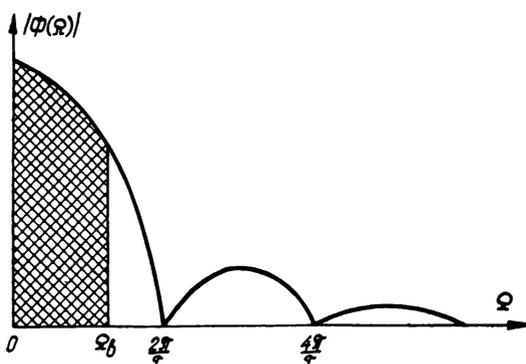


Рис. 9.14. Зависимость спектральной плотности импульсной последовательности от частоты.

полосой частот понимается полоса, в которую укладывается первый лепесток огибающей спектра импульсной последовательности. Длину этого лепестка в свою очередь определяет длительность импульсов последовательности. Линейные (частотные) искажения, независимо от причины их возникновения, могут быть компенсированы соответствующим подбором формы амплитудно-частотных характеристик канального модулятора, демодулятора или низкочастотного тракта.

Нелинейными искажениями принято называть такие изменения формы сигнала, которые в плане спектрального анализа соответствуют появлению новых частотных составляющих в спектре передаваемого сигнала. Для систем с ВРК характерны в этом отношении так называемые комбинационные искажения, возникающие из-за несовершенного выделения полезной составляющей спектра в процессе демодуляции. Оценивая возникающие искажения отношением мощностей сигнал/помеха с учетом выраже-

ний спектрального состава сигнала при импульсной модуляции (формулы (6.42), (6.53), (6.61), (6.69)), получаем

$$q = \frac{K_d^2(\Omega) B^2(\Omega, t)}{\sum_{r=1}^{\infty} K_d^2(\Omega) C^2(\Omega, r\omega_{\Pi}, t)}, \quad (9.30)$$

где $K_d(\Omega)$ — коэффициент усиления демодулятора;
 Ω — текущее значение угловой частоты.

Модуляционные и демодуляционные искажения во всех случаях импульсных модуляций возрастают с ростом верхней частоты модуляции и с уменьшением коэффициента следования импульсов, который рассчитывается по формуле

$$\mu = \frac{\omega_{\Pi}}{\Omega_{\text{макс}}}. \quad (9.31)$$

Коэффициент следования импульсов показывает, сколько импульсов (передач) производится за время, соответствующее одному периоду верхней частоты информационного

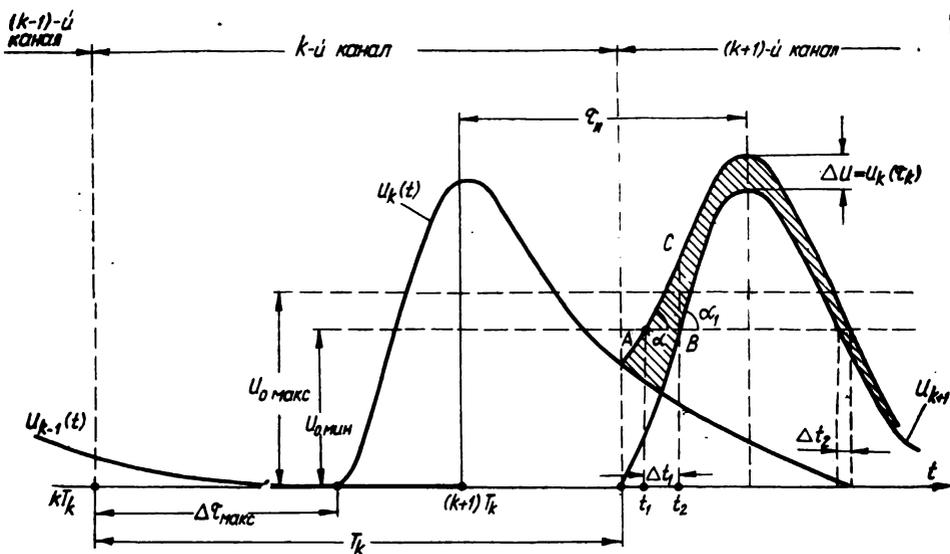


Рис. 9.15. Образование перекрестных искажений первого рода.

сигнала. Согласно теореме Котельникова, допустимо любое μ более 2. Его увеличение, уменьшая искажения, влечет за собой расширение полосы частот, занимаемой сигналом, т. е. требует расширения канала. Практически μ выбирается в пределах от 3,5 до 4.

Для перекрестных искажений характерно то, что они возможны только в многоканальных системах. Они порождаются переходными процессами, которые сопутствуют прохождению импульсов по системе связи и влекут за собой взаимное воздействие каналов, объединенных в многоканальную систему. Перекрестные искажения первого рода возникают при взаимной накладке импульсов соседних каналов (рис. 9.15). Накладка, в свою очередь, образуется из-за обусловленных переходными процессами искажений формы импульсов. Действие предыдущего импульса на следующий сводится к приращению амплитуды последнего и паразитному сдвигу его переднего и заднего фронтов. Такие искажения возможны при достаточно малом временном интервале между импульсами соседних каналов и ограниченности полосы пропускания общего тракта. При АИМ решающим является приращение амплитуды импульсов, при ШИМ, ФИМ и ЧИМ искажения возникают из-за сдвига фронтов импульсов.

При модуляции паразитные приращения амплитуд и сдвиги фронтов меняются от импульса к импульсу в соответствии со значениями модулирующего напряжения в каналах. Это порождает так называемые перекрестные разговоры, т. е. такое положение, когда сообщение, передаваемое по одному каналу, прослушивается в соседнем. Наиболее точный способ оценки искажений — статистический метод. Для его осуществления необходимо исходить из статистических характеристик напряжений в каналах. Ввиду сложности указанного приема часто ограничиваются оценкой максимально возможного воздействия предыдущего канала на последующий.

Перекрестные искажения второго рода обусловлены нелинейностью амплитудной и фазовой характеристик видеосушителя общего тракта в полосе, которую занимает спектр модулирующих частот. Если предположить, что сигнал модулирован только в одном канале, то соответствующая модуляции спектральная компонента оказывается измененной по величине и сдвинутой по фазе. Если так, то представляется возможным рассмотреть описанный

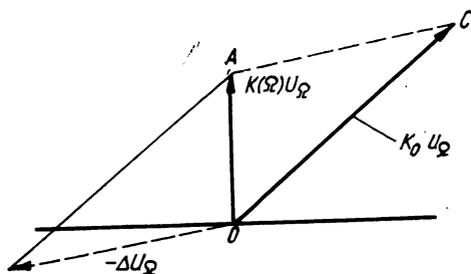


Рис. 9.16. Векторная диаграмма напряжений — выходного $K(\Omega)U_{\Omega}$, идеального $K_0 U_{\Omega}$ и искажения ΔU .

результат (искаженный вектор) как векторную сумму нескольких составляющих (рис. 9.16). Сдвиг фазы как бы вводит разностный сигнал во время, отведенное для других каналов. В результате перекрестных искажений второго рода фронты импульсов растягиваются, а нулевая линия немодулированных последовательностей импульсов искривляется (рис. 9.17).

Если в случае АИМ применяется ограничение по минимуму, то паразитной модуляции подвергаются все каналы системы. В случае ШИМ, ФИМ и ЧИМ использование

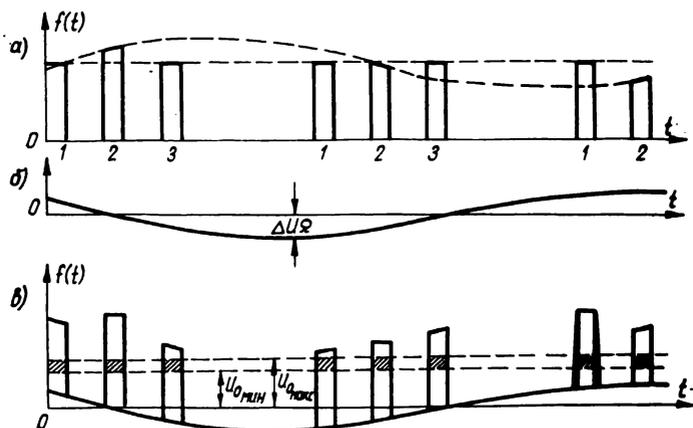


Рис. 9.17. Образование перекрестных искажений второго рода.

импульсов идеально прямоугольной формы и двустороннего ограничения позволило бы полностью исключить перекрестные искажения второго рода. Однако идеально прямоугольная форма импульсов недостижима. Искажения второго рода особенно сильны в тех случаях, когда интенсивность полезной составляющей в спектре импульсно-модулированного сигнала велика, т. е. при АИМ и ШИМ. В случае ФИМ и ЧИМ положение значительно лучше. Помехи второго рода опаснее помех первого рода в том смысле, что они поражают все каналы системы одновременно. Самый реальный путь уменьшения этих искажений — коррекция завала частотной характеристики видеотракта в области нижних частот.

9.7. СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ЦИФРОВОЙ ИНФОРМАЦИИ

Под передачей цифровой информации, или передачей данных, понимают область электросвязи, куда входит передача информации для обработки ее вычислительными машинами, а также передача результатов этой обработки. Этот вид связи выделен в особый раздел из-за повышенных требований к достоверности такой передачи. В случае любого другого вида связи производится передача речи или печатного текста. Как речь, так и печатный текст благодаря большой избыточности человеческого языка не теряют своего смысла в случае искажения отдельных элементов передачи (например, букв). В то же время при передаче данных даже незначительное количество ошибок полностью искажает результаты обработки данных на электронных вычислительных машинах. Для обеспечения высокой достоверности используются особые способы достижения максимальной помехоустойчивости.

Наряду с использованием избыточных кодов для повышения достоверности передачи данных часто применяется также обратная связь. Это требует так называемого дуплексного канала связи, т. е. наличия приемника и передатчика на обоих концах канала. В зависимости от метода использования обратного канала различают системы с информационной обратной связью, системы с решающей обратной связью и системы с комбинированной обратной связью. Работая по принципу информационной

обратной связи, приемник передает по обратному каналу все принятые сообщения. На передающей стороне эти сообщения сравниваются с переданными. В случае совпадения вырабатывается сигнал разрешения передачи следующей кодовой комбинации и одновременно на приемную сторону передается сигнал подтверждения. При несовпадении повторяется ранее переданная кодовая комбинация.

В некоторых случаях по обратному каналу передается не вся принятая кодовая комбинация, а только группа проверочных символов, полученных на приемной стороне путем кодирования принятых информационных символов. На передающей стороне также формируется группа проверочных символов, которые сверяются с принятыми от приемной стороны проверочными символами. Таким образом, в системах с информационной обратной связью решение о правильности приема кодовой комбинации всегда принимается на передающей стороне.

В системах с решающей обратной связью на передающей стороне происходит кодирование сообщений обнаруживающим кодом. Одновременно с передачей в канал связи информация записывается в накопитель. На приемной стороне принятое сообщение также записывается в приемный накопитель и преобразуется. При обнаружении ошибки неправильное сообщение стирается, а по обратному каналу передается сигнал запроса (решающий сигнал), в результате чего происходит повторная передача «забракованного» сообщения. Такие системы часто называют системами с переспросом или системами с автоматическим запросом и повторением искаженной информации. В зависимости от состояния канала количество запросов будет различным, т. е. избыточность этих систем переменна, в то время как при использовании исправляющих кодов она постоянна. Это существенное достоинство систем с переспросом, которые можно назвать самоприспосабливающимися.

По алгоритму функционирования системы с решающей обратной связью делятся на системы с ожиданием решающего сигнала, в которых передача новой кодовой комбинации или повторение ранее переданной осуществляется только после поступления на передающую сторону сигнала подтверждения или сигнала запроса, и системы с непрерывной передачей информации. В последнем варианте сигнал подтверждения не ожидается, передача информации,

закодированной обнаруживающим ошибки кодом, идет непрерывно.

Одновременно с выдачей в канал информация записывается в накопитель, емкость которого a в этом случае определяется формулой

$$a = \frac{n\tau + T_{\text{ож}}}{n\tau} = 1 + \frac{T_{\text{ож}}}{n\tau}, \quad (9.32)$$

где n — значность кода;

τ — длительность элементарного символа;

$T_{\text{ож}}$ — время ожидания решения.

Если на приемной стороне будет обнаружена ошибка, то принятая комбинация стирается, вход приемного устройства блокируется и на передающую сторону выдается сигнал запроса. По этому сигналу передатчик повторяет a кодовых комбинаций. При групповых искажениях большой длительности системы с непрерывной передачей обеспечивают большую достоверность, чем системы с ожиданием.

В системах с комбинированной обратной связью по обратному каналу передается как решение, принятое приемником, так и поступившее сообщение. На передающей стороне это сообщение повторно анализируется на предмет определения необходимости его повторной передачи. Применение такого метода позволяет устранить, с одной стороны, искажения сигналов подтверждения или запроса, с другой — искажения, возникающие при повторной (обратной) передаче кодовой комбинации. Вероятность одновременного искажения в обратном канале как кодовой комбинации, так и сигнала запроса (подтверждения) очень мала.

Все указанные способы повышения достоверности могут быть реализованы как с помощью специально изготовленной аппаратуры, так и программным методом на ЭВМ. В последнем случае ЭВМ, наряду с решением основных задач, по специальной программе решает комплекс задач, связанных с повышением достоверности.

ПРИЛОЖЕНИЯ

П1. КОМБИНАТОРИКА

Являясь наукой о группировании объектов, комбинаторика различает перестановки, сочетания и размещения.

Перестановки — это группы элементов, содержащие все имеющиеся в наличии элементы. Между собой эти группы различаются только порядком следования элементов. Количество перестановок из m элементов без повторений определяется по формуле

$$P_m = m! \quad (\text{П1.1})$$

Количество перестановок из m элементов с повторениями, т. е. таких перестановок, которые совершаются над группой m элементов, содержащей k одинаковых элементов, определяется по формуле

$$P_{m(k)} = \frac{m!}{k!}. \quad (\text{П1.2})$$

Сочетания — это группы по n элементов, образуемые из m разных элементов, различающиеся между собой самими элементами. Количество сочетаний из m разных элементов по n элементов (без повторений) определяется по формуле

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}. \quad (\text{П1.3})$$

Количество сочетаний из m разных элементов по n элементов с повторениями, т. е. сочетаний, в которые элементы могут входить многократно, определяется по формуле

$$C_m^{n(m)} = C_{m+n-1}^n. \quad (\text{П1.4})$$

Размещения — это группы по n элементов, образуемые из m разных элементов, различающиеся между собой либо

самими элементами, либо порядком их следования. Количество размещений из m разных элементов по n элементов (без повторений) определяется по формуле

$$V_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}. \quad (\text{П1.5})$$

Количество размещений из m разных элементов по n элементов с повторениями, т. е. таких размещений, в которые элементы могут входить многократно, определяется по формуле

$$V_m^{n(n)} = m^n. \quad (\text{П1.6})$$

П2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятностей изучает закономерности случайных явлений. Значения, которые может принять случайная величина, называются ее возможными значениями или реализациями случайного процесса. Поведение случайной величины описывается рядом функций, из которых наиболее распространенными являются следующие.

Интегральная функция распределения случайной переменной, называемая также интегральным законом распределения или просто функцией распределения случайной величины, записывается как

$$F(x) = P\{\xi \leq x\}, \quad (\text{П2.1})$$

показывает, как зависит от выбранного уровня x вероятность того, что значение случайной величины не превысит этот уровень.

Случайная величина, множество возможных значений которой дискретно, называется прерывной, или дискретной. В этом случае

$$F(x) = \sum_{\xi_k \leq x} P_k. \quad (\text{П2.2})$$

Как всякая вероятность, функция распределения не может быть отрицательной, ее значение колеблется в пределах от нуля до единицы:

$$0 \leq F(x) \leq 1. \quad (\text{П2.3})$$

Кроме того, эта функция неубывающая.

Если интегральная функция $F(x)$ имеет частную производную по x , то эта производная называется функцией плотности вероятностей случайной величины или дифференциальным законом распределения этой случайной величины и записывается как

$$\varphi(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}. \quad (\text{П2.4})$$

Плотность вероятностей случайной величины является неотрицательной функцией. Функция распределения случайной величины выражается через ее плотность вероятностей:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx, \quad (\text{П2.5})$$

а так как

$$P(\alpha < \xi \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha), \quad (\text{П2.6})$$

то вероятность того, что случайная величина примет указанное значение ($\alpha < \xi \leq \beta$), равна интегралу от ее плотности вероятностей, взятому в пределах от α до β , т. е.

$$P(\alpha < \xi \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) dx. \quad (\text{П2.7})$$

Величины $F(x)$ и $\varphi(x)$ являются простейшими характеристиками случайного процесса и дают представление о нем лишь в отдельные, фиксированные моменты времени.

Для описания случайных явлений применяются также их временные характеристики (моментные функции). Простейшая из них — математическое ожидание, или среднее значение случайной величины, представляет собой постоянную составляющую случайного процесса. Оно называется также моментом распределения первого порядка и для непрерывного процесса выражается как

$$M[x(t)] = m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x) dx, \quad (\text{П2.8})$$

а для дискретного процесса — как

$$M[x(t)] = m_x = \sum_{k=1}^n x_k P_k. \quad (\text{П2.9})$$

Разброс значений случайной величины характеризуется ее дисперсией, называемой также центральным моментом второго порядка, представляющим собой среднюю мощность флуктуаций, т. е. отклонений от среднего значения мощности. Дисперсия рассчитывается для непрерывного процесса по формуле

$$D[x(t)] = M\{[x(t) - m_x]^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 \varphi(x) dx, \quad (\text{П2.10})$$

а для дискретного процесса по формуле

$$D[x(t)] = \sum_{k=1}^n (x_k - m_x)^2 P_k. \quad (\text{П2.11})$$

Так как дисперсия случайной величины имеет размерность ее квадрата, а на практике удобно пользоваться мерой разброса с размерностью случайной величины, то вводится понятие среднеквадратичного отклонения случайной величины, которое обозначается через σ_x и связано с дисперсией соотношением

$$\sigma_x = \sqrt{D[x(t)]}. \quad (\text{П2.12})$$

Характеристики $M[x(t)]$ и $D[x(t)]$ не дают достаточно полного представления о характере случайного процесса. Для дополнительной характеристики этого процесса вводится понятие смешанной моментной функции второго порядка — автокорреляционной функции. Она характеризует статистическую связь между мгновенными значениями случайной величины в различные моменты времени и выражается как

$$B(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (\text{П2.13})$$

При достаточно большом числе n реализаций автокорреляционная функция приближенно может быть найдена как среднее значение полученных по данным этих реализаций произведений:

$$B(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j P(x_i, x_j). \quad (\text{П2.14})$$

Наряду с автокорреляционной функцией пользуются также автокорреляционной функцией приращений (флуктуаций), выражение для которой имеет вид

$$B_{\Phi}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x_1 - m_x(t_1)] [x_2 - m_x(t_2)] \times \\ \times \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (\text{П2.15})$$

где $\varphi(x_1, x_2)$ — плотность вероятностей совместного появления значения x_1 в момент t_1 и значения x_2 в момент t_2 .

При допущении $t_1 = t_2$ автокорреляционная функция флуктуаций вырождается в дисперсию случайной величины $x(t)$, т. е.

$$B_{\Phi}(t, t) = D[x(t)]. \quad (\text{П2.16})$$

Наиболее часто встречающимися законами распределения непрерывных случайных величин следует считать: равномерный, экспоненциальный, нормальный и рэлеев. Эти законы характеризуются следующими показателями.

Равномерный закон распределения соответствует случаю, когда все значения случайной величины (в области ее существования) равновероятны. Равномерному закону распределения подчиняется ошибка в приближенных вычислениях, возникающая за счет округления чисел до ближайшей значащей цифры. В радиотехнических расчетах с этим законом встречаемся при определении фазы случайного колебания. Для этого закона (рис. П2.1)

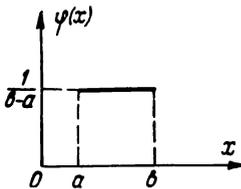
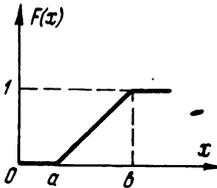


Рис. П2.1. Характеристики равномерного закона распределения.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (-\infty < x < a); \\ \frac{x-a}{b-a} & (a \leq x \leq b); \\ 1 & (b < x < +\infty); \end{cases} \quad (\text{П2.17})$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & (-\infty < x < a); \\ \frac{1}{b-a} & (a \leq x \leq b); \\ 0 & (b < x < \infty); \end{cases} \quad (\text{П2.18})$$

$$M [x (t)] = \frac{a + b}{2}; \quad (\text{П2.19})$$

$$D [x (t)] = \frac{(b - a)^2}{12}. \quad (\text{П2.20})$$

Экспоненциальный односторонний закон действителен для квадрата случайной величины, распределенной по закону Рэлея, его применяют также для характери-

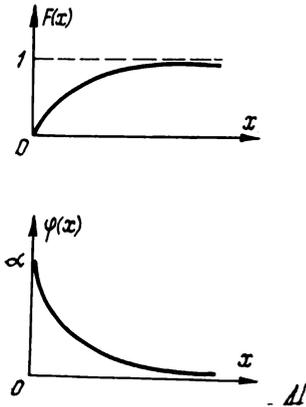


Рис. П2.2. Характеристики экспоненциального одностороннего закона распределения.

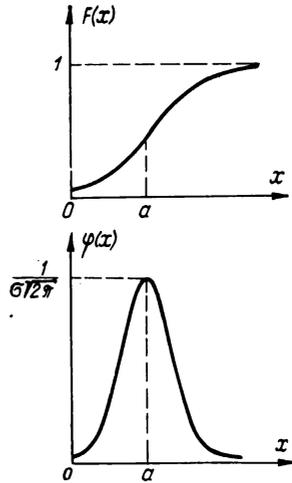


Рис. П2.3. Характеристики нормального закона распределения.

стики надежности элементов во времени, т. е. интенсивности отказов. Для этого закона (рис. П2.2)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (-\infty < x < 0); \\ 1 - e^{-\alpha x} & (0 \leq x < \infty); \end{cases} \quad (\text{П2.21})$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & (-\infty < x < 0); \\ \alpha e^{-\alpha x} & (0 \leq x < \infty); \end{cases} \quad (\text{П2.22})$$

$$M [x (t)] = \frac{1}{\alpha}; \quad (\text{П2.23})$$

$$D [x (t)] = \frac{1}{\alpha^2}. \quad (\text{П2.24})$$

Нормальный, или гауссов, закон распределения является предельной формой многочисленных распределений. Этому закону подчиняется распределение мгновенных значений шумов естественного происхождения.

Для этого закона (рис. П2.3)

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx; \quad (\text{П2.25})$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}; \quad (\text{П2.26})$$

$$M[x(t)] = a; \quad (\text{П2.27})$$

$$D[x(t)] = \sigma^2. \quad (\text{П2.28})$$

Закону Рэлея подчиняется одномерное распределение огибающей Гауссова процесса, т. е. распределение случайных значений на выходе линейного детектора, на вход которого подан гауссов процесс. Тот же закон применяется при исследовании распределения замираний при ионосферном и тропосферном рассеянии, надежности электронных ламп и т. д. Для этого закона (рис. П2.4)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (-\infty < x < 0); \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & (0 \leq x < \infty); \end{cases} \quad (\text{П2.29})$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & (-\infty < x < 0); \\ \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & (0 \leq x < \infty); \end{cases} \quad (\text{П2.30})$$

$$M[x(t)] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \approx 1,25\sigma; \quad (\text{П2.31})$$

$$D[x(t)] = \frac{4-\pi}{2} \sigma^2 \approx 0,43\sigma^2. \quad (\text{П2.32})$$

Наиболее часто встречающимися законами распределения дискретных случайных величин следует считать: равномерный, биномиальный и пуассонов. Они характеризуются следующими показателями.

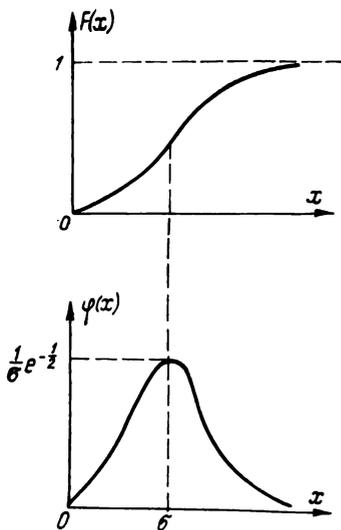


Рис. П2.4. Характеристики рэлея закона распределения.

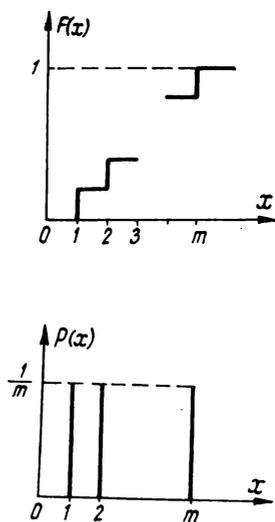


Рис. П2.5. Характеристики равномерного закона распределения.

Равномерный закон распределения действует, когда все значения дискретной случайной величины равновероятны, например в случае передачи цифровых данных (вероятности появления той или иной цифры одинаковы). Для этого закона (рис. П2.5)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (-\infty < x < 1); \\ \frac{x}{m} & (1 \leq x \leq m); \\ 1 & (m < x < \infty); \end{cases} \quad (\text{П2.33})$$

$$P(x) = \begin{cases} 0 & (-\infty < x < 1); \\ \frac{1}{m} & (1 \leq x \leq m); \\ 0 & (m < x < \infty); \end{cases} \quad (\text{П2.34})$$

$$M[x(t)] = \frac{m+1}{2}; \quad (\text{П2.35})$$

$$D[x(t)] = \frac{m^2-1}{12}. \quad (\text{П2.36})$$

Биномиальный закон (распределение Бернулли или Ньютона) довольно широко используется в статистике и в разных вероятностных расчетах. Он определяет вероятность того, что в последовательности из m независимых испытаний событие наступает ровно k раз. Для этого закона (рис. П2.6)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (-\infty < x < 0); \\ \sum_{k=0}^x C_m^k p^k q^{m-k} & (0 \leq x < m); \\ 1 & (m \leq x < \infty); \end{cases} \quad (\text{П2.37})$$

$$P(x) = \begin{cases} 0 & (-\infty < x < 0); \\ C_m^k p^k q^{m-k} & (0 \leq x \leq m); \\ 0 & (m < x < \infty); \end{cases} \quad (\text{П2.38})$$

$$M[x(t)] = mp; \quad (\text{П2.39})$$

$$D[x(t)] = mpq, \quad (\text{П2.40})$$

где $q = 1 - p$.

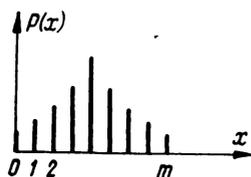
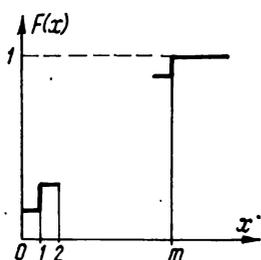


Рис. П2.6. Характеристики биномиального закона распределения.

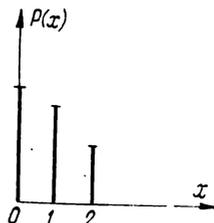
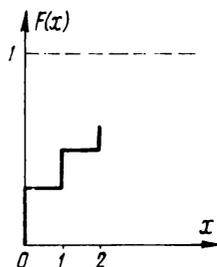


Рис. П2.7. Характеристики пуассонова закона распределения.

Закон Пуассона является пределом, к которому стремится предыдущий закон в случае, когда $t \rightarrow \infty$, а $p \rightarrow 0$, т. е. для относительно редких событий. Этому закону соответствует распределение числа электронов, вышедших из катода за время t , распределение числа телефонных вызовов за время t и т. д. Для этого закона (рис. П2.7)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (-\infty < x < 0); \\ \sum_{k=0}^x \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & (0 \leq x < \infty); \end{cases} \quad (\text{П2.41})$$

$$P(x) = \begin{cases} 0 & (-\infty < x < 0); \\ \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & (0 \leq x < \infty); \end{cases} \quad (\text{П2.42})$$

$$M[x(t)] = \lambda; \quad (\text{П2.43})$$

$$D[x(t)] = \lambda. \quad (\text{П2.44})$$

П3. ЗАДАЧИ

П3.1. Определение количества информации и избыточности

Задача 1

Найти, сколькими взвешиваниями и по какой стратегии можно выявить один отличающийся по весу шарик в группе из девяти шариков, определив при этом, является ли этот отличающийся шарик легче или тяжелее остальных.

Решение

1. Количество информации, которое необходимо для решения задачи, определяется исходя из того, что в отношении отличающегося по весу шарика существуют две возможности (он легче или тяжелее остальных) — потому выявление правильного ответа имеет вероятность $P_1 = \frac{1}{2 \times 9} = \frac{1}{18}$. Согласно формуле (2.2) получаем: $I_1 = -\log_2 P_1 = \log_2 18 = 4,17$ [бит].

2. Количество информации, получаемое от одного взвешивания, определяется тем, что возможны три результата этого действия (перевес правой чашки весов, перевес левой или равновесие) — значит, вероятность каждого из них $P_1 = \frac{1}{3}$ и количество информации, получаемое при взвешивании, согласно формуле (2.2), $I_2 = -\log_2 \frac{1}{3} = 1,585$ [бит].

3. Минимальное количество взвешиваний n , которое способно обеспечить решение задачи, будет равно наименьшему целому числу, превышающему результат деления количества информации, необходимого для решения задачи, на количество информации, получаемое при одном взвешивании, т. е. $I_1 : I_2 = 4,17 : 1,585 = 2,62$, или $n = 3$ (раза).

4. Количество шариков, сравниваемых при первом взвешивании, для получения максимального количества информации должно быть таким, чтобы все результаты взвешивания были равновероятными [формула (2.13)]. Так как три результата взвешивания соответствуют трем местам нахождения отличающегося шарика, то равновероятными результаты будут в том случае, если все группы (две сравниваемые и невзвешиваемая) будут равны между собой, т. е. $m = 9 : 3 = 3$ (шарика).

5. Дальнейшая стратегия действия сводится к следующему. Если при первом взвешивании весы остались в равновесии, то отличающийся шарик находится между тремя невзвешенными (полученная информация $I = \log_2 P_2 - \log_2 P_1 = \log_2 \frac{1}{6} - \log_2 \frac{1}{18} = \log_2 18 - \log_2 6 = 4,17 - 2,585 = 1,585$ бит). В таком случае дальше следует сравнить с помощью взвешивания два из них. В случае равновесия отличающийся шарик — тот, который не взвешивался (полученная информация $I = \log_2 P_3 - \log_2 P_2 = \log_2 \frac{1}{2} - \log_2 \frac{1}{6} = \log_2 6 - \log_2 2 = 2,585 - 1,00 = 1,585$ бит). Третье взвешивание выявит, легче он или тяжелее остальных (даст информацию 1 бит). В случае перевеса одной из сторон при втором взвешивании (полученная информация равна 1,585 бит) один из использованных при втором взвешивании шариков сравниваем с неиспользованным и выявляем окончательный ответ (информация 1 бит).

Если при первом взвешивании одна из сторон дала пере-

вес (получена информация 1,585 бит), задача сводится к выявлению отличающегося шарика из группы 6 шариков. Для этого используем наше знание о перевесе одной из сторон. С каждой стороны весов удаляем по одному шару и 2 шарика с разных сторон весов меняем местами. Если при таком, втором, взвешивании получается равновесие (получена информация 1,585 бит), то отличающийся шарик находится в группе шариков, не использовавшихся при втором взвешивании. Так как из первого взвешивания известно, который из них тяжелее, третье взвешивание, при котором этот шарик сравнивается с одним из одинаковых шариков, дает окончательный ответ (информация 1 бит).

Если при втором взвешивании наблюдался перевес той же стороны, что и при первом (получена информация 1,585 бит), то отличающийся от других — один из перемещенных шариков. Если перевесила другая сторона (получена информация 1,585 бит), то отличающийся — один из перемещенных шариков. Третье взвешивание во всех случаях полностью решает задачу (дает информацию 1 бит).

Задача 2

Определить максимальную, теоретически возможную и практически существующую энтропии русского языка и вытекающую из этого его избыточность. Количество букв русского алфавита принимается равным 31 и, кроме того, учитывается необходимость промежутков (пробелов) между словами (на правах 32-й буквы). Вероятности букв алфавита сведены в табл. ПЗ.1.

Т а б л и ц а ПЗ.1

Буква	Вероятность	Буква	Вероятность	Буква	Вероятность
Пробел	0,175	к	0,028	х	0,009
а	0,062	л	0,035	ц	0,004
б	0,014	м	0,026	ч	0,012
в	0,038	н	0,053	ш	0,006
г	0,013	о	0,090	щ	0,003
д	0,025	п	0,023	ы	0,016
е	0,072	р	0,040	ь, ъ	0,014
ж	0,007	с	0,045	э	0,003
з	0,016	т	0,053	ю	0,005
и	0,062	у	0,021	я	0,018
й	0,010	ф	0,002		

Практически в русском языке используется приблизительно 53 000 слов (словарь С. И. Ожегова), что с учетом форм словоизменения сводится примерно к 530 000 единиц.

Решение

1. Максимальная энтропия соответствует равновероятному использованию всех букв алфавита (и пробела между словами). Она определяется по формуле (2.13):

$$H_{\text{макс}} = \log_2 m = \log_2 32 = 5,00 \left[\frac{\text{бит}}{\text{буква}} \right].$$

2. Теоретически возможная энтропия, учитывающая вероятности использования разных букв алфавита, определяется по формуле (2.8):

$$H = - \sum_{k=1}^m p_k \log_2 p_k = 0,440 + 0,249 + 0,086 + 0,179 + 0,082 + 0,133 + 0,273 + 0,050 + 0,096 + 0,249 + 0,066 + 0,144 + 0,169 + 0,137 + 0,225 + 0,313 + 0,125 + 0,186 + 0,201 + 0,225 + 0,117 + 0,018 + 0,061 + 0,032 + 0,077 + 0,044 + 0,025 + 0,096 + 0,086 + 0,025 + 0,038 + 0,104 = 4,351 \left[\frac{\text{бит}}{\text{буква}} \right].$$

3. Теоретическая избыточность определяется по формуле (2.14):

$$R = 1 - \frac{H}{H_{\text{макс}}} = 1 - \frac{4,35}{5,00} = 1 - 0,87 = 0,13.$$

4. Практически существующую энтропию русского языка можно определить путем выявления количества букв алфавита, при котором достижимо существование 530 000 форм со средней длиной слова (учитывая пробел), вытекающей из вероятности промежутка между словами, т. е.

$P_1 = 0,175 \approx \frac{1}{6}$. Следовательно, длина слова принимается в 5 знаков. Рассчитывая количество букв по формуле (П1.6), получаем: $V_m^{n^{(m)}} = m^n$, т. е. $530\,000 = m^5$; следовательно, $\lg m = \frac{1}{5} \lg 530\,000 = \frac{5,72428}{5} = 1,14486 \rightarrow m \approx 14$. Из

полученного количества букв определяем энтропию по формуле (2.13):

$$H'_{\text{макс}} = \log_2 m = \log_2 14 = 3,80 \left[\frac{\text{бит}}{\text{буква}} \right].$$

5. Практическая избыточность получается по формуле (2.14):

$$R = 1 - \frac{H'_{\text{макс}}}{H_{\text{макс}}} = 1 - \frac{3,80}{5,00} = 0,24.$$

Последний расчет имеет очень приближенный характер. Более правильным было бы опираться на учет вероятностей появления многобуквенных комбинаций, однако для этого необходим обширный статистический материал, которого пока нет. По аналогии с другими европейскими языками можно предположить, что избыточность русской речи составляет величину порядка 50 %.

Задача 3

Определить энтропию непрерывного амплитудно-модулированного сигнала, который передается по линии связи, для случаев, когда его значения распределены: а) по нормальному закону, б) равномерно в области изменения сигнала. Среднее значение сигнала в обоих случаях равно нулю, а дисперсия $\sigma^2 = 4 \text{ в}^2$. Точность отсчетов на приемном конце $\Delta x = 0,1 \text{ в}$.

Решение

1. Так как дисперсия состояния элементов задана, сообщение, состояния элементов которого распределены по нормальному закону, обладает максимальной возможной энтропией, которая определяется по формуле (2.32):

$$\begin{aligned} H_{\text{н}}(x) &= \log_2 \left(\frac{\sigma}{\Delta x} \sqrt{2\pi e} \right) = \\ &= \log_2 \left(\frac{\sqrt{4}}{0,1} \cdot 4,13 \right) = \log_2 82,6 = 6,33 \left[\frac{\text{бит}}{\text{отсчет}} \right]. \end{aligned}$$

2. В случае равномерного распределения состояний

элементов энтропия определяется исходя из формул (2.36) и (2.38):

$$\begin{aligned}
 H_p(x) &= \log_2 \left(\frac{b-a}{\Delta x} \right) = \log_2 \left(\frac{\sigma \cdot 2 \sqrt{3}}{\Delta x} \right) = \\
 &= \log_2 \left(\frac{\sqrt{4}}{0,1} 3,46 \right) = \log_2 69,2 = 6,10 \left[\frac{\text{бит}}{\text{отсчет}} \right].
 \end{aligned}$$

ПЗ.2. Кодирование сообщений

Задача 4

Закодировать кодом Фэно буквы русского алфавита, определить экономичность полученного кода и сравнить ее с энтропией русского алфавита. Вероятности букв приведены в табл. ПЗ.1, а теоретическая энтропия рассчитана в задаче 2.

Решение

1. Кодирование производится с соблюдением закономерности равенства вероятностей групп, которым присваиваются символы 0 и 1. При разделении на группы следует добиваться такого строения групп, при котором они по возможности оптимально разделялись бы и на последующих шагах. Результат (см. стр. 193) можно считать удовлетворительным, если во всем разделении нет букв, которые при большей вероятности их появления закодированы большим количеством символов, чем буквы с меньшей вероятностью появления.

2. Экономичность кода определяется по формуле (3.2):

$$\begin{aligned}
 n_{cp} &= \sum_{k=1}^N P_k n_k = 3 \times 0,175 + 4(0,062 + 0,072 + 0,062 + 0,053 + \\
 &+ 0,090 + 0,040 + 0,045 + 0,053) + 5(0,038 + 0,025 + 0,028 + \\
 &+ 0,035 + 0,026 + 0,023 + 0,018) + 6(0,014 + 0,013 + 0,016 + \\
 &+ 0,021 + 0,012 + 0,016 + 0,014) + 7(0,007 + 0,010 + 0,009 + \\
 &+ 0,006) + 8(0,004 + 0,003 + 0,005) + 9(0,002 + 0,003) = \\
 &= 3 \times 0,175 + 4 \times 0,477 + 5 \times 0,193 + 6 \times 0,106 + 7 \times 0,032 + \\
 &+ 8 \times 0,012 + 9 \times 0,005 = 0,525 + 1,908 + 0,965 + 0,636 + 0,224 + \\
 &+ 0,096 + 0,045 = 4,399 \quad \frac{\text{бит}}{\text{буква}}.
 \end{aligned}$$

3. Сравнение полученного результата с теоретической энтропией русского алфавита показывает, что $n_{cp} > H$, так как $4,399 > 4,351$. Сравнительно малое различие этих двух величин говорит о том, что кодирование кодом Фэно проведено успешно, однако в силу невозможности повсюду выдержать точное деление вероятностей пополам число, характеризующее экономичность кода, превышает энтропию.

Задача 5

Определить экономичность кода Морзе для русского алфавита, составить для русского алфавита оптимальный код той же закономерности и определить выигрыш в экономичности от такого действия. Вероятности букв русского алфавита были приведены в табл. ПЗ.1. Ниже приведен код Морзе для русского алфавита. В нем соблюдены следующие закономерности: длительность точки и пробела внутри комбинации по одному импульсу, длительность тире и пробела между комбинациями по три импульса, длительность пробела между словами — пять импульсов. Но так как к каждой букве прибавляются три импульса, обязательные для межбуквенных расстояний, то пробел между словами сокращается до двух импульсов. Цифры в приводимом коде Морзе указывают количество импульсов в каждой комбинации.

Код Морзе для русского алфавита

а	—	8	и	..	6	р	—.	10	ш	— — — —	18
б	—...	12	й	— — — —	16	с	...	8	щ	— — — —	16
в	— — —	12	к	— — —	12	т	—	6	ы	— — — —	16
г	— — .	12	л	— . . .	12	у	.. —	10	ь, ь	—	14
д	— . .	10	м	— — —	10	ф	.. — . .	12	э	.. — . .	14
е	.	4	н	— . .	8	х	10	ю	.. — — —	14
ж	... —	12	о	— — — —	14	ц	—	14	я	—	14
з	— — . .	14	п	.. — . .	14	ч	— — — .	16	Пробел		2

Решение

1. Экономичность кода Морзе для русского алфавита следует из количества импульсов, которыми закодированы буквы. Она определяется по формуле (3.2):

$$n_{cp} = \sum_{k=1}^N P_k n_k = 2(0,175) + 4(0,072) + 6(0,062 + 0,053) +$$

$$\begin{aligned}
&+ 8(0,062 + 0,053 + 0,045) + 10(0,025 + 0,026 + 0,040 + 0,021 + \\
&+ 0,009) + 12(0,014 + 0,038 + 0,013 + 0,007 + 0,028 + 0,035 + \\
&+ 0,002) + 14(0,016 + 0,090 + 0,023 + 0,004 + 0,014 + 0,003 + \\
&+ 0,005 + 0,018) + 16(0,010 + 0,012 + 0,003 + 0,016) + \\
&+ 18(0,006) = 2 \times 0,175 + 4 \times 0,072 + 6 \times 0,115 + 8 \times 0,160 + \\
&+ 10 \times 0,121 + 12 \times 0,137 + 14 \times 0,173 + 16 \times 0,041 + 18 \times 0,006 = \\
&= 0,350 + 0,288 + 0,690 + 1,280 + 1,210 + 1,644 + 2,422 + 0,656 + \\
&+ 0,108 = 8,648 \left[\frac{\text{бит}}{\text{буква}} \right].
\end{aligned}$$

2. Оптимальный код той же закономерности, что и код Морзе, т. е. код, в котором используются те же кодовые комбинации, однако перераспределенные соответственно вероятностям появления букв в русском алфавите, можно получить, если имеющиеся в наличии кодовые комбинации приписывать буквам в таком порядке, чтобы с уменьшением вероятности появления буквы длина кодовой комбинации увеличивалась. Это соответствует следующему распределению комбинаций:

а	—	8	и	..	6	р	—..	10	ш	—.—.	14
б	—	14	й	—.—	14	с	—	10	щ	—	16
в	..	10	к	—..	10	т	...	8	ы	—	12
г	—...	14	л	10	у	—	12	ъ, ь	—	14
д	—..	12	м	—..	12	ф	—	18	э	—	16
е	—	6	н	—	8	х	—...	14	ю	—	16
ж	—	14	о	.	4	ц	—	16	я	—...	12
з	—	12	п	—	12	ч	—	14	Пробел		2

3. Экономичность новообразованного кода определяется по формуле (3.2):

$$\begin{aligned}
n_{\text{ср}} &= \sum_{k=1}^N P_k n_k = 2(0,175) + 4(0,090) + 6(0,072 + 0,062) + \\
&+ 8(0,062 + 0,053 + 0,053) + 10(0,014 + 0,028 + 0,035 + 0,040 + \\
&+ 0,045) + 12(0,025 + 0,016 + 0,026 + 0,023 + 0,021 + 0,016 + \\
&+ 0,018) + 14(0,014 + 0,013 + 0,007 + 0,010 + 0,009 + 0,012 + \\
&+ 0,006 + 0,014) + 16(0,004 + 0,003 + 0,003 + 0,005) + \\
&+ 18(0,002) = 2 \times 0,175 + 4 \times 0,090 + 6 \times 0,134 + 8 \times 0,168 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 10 \times 0,162 + 12 \times 0,145 + 14 \times 0,085 + 16 \times 0,015 + 18 \times 0,002 = \\
 &= 0,350 + 0,360 + 0,804 + 1,344 + 1,620 + 1,740 + 1,190 + 0,240 + \\
 &+ 0,036 = 7,684 \left[\frac{\text{бит}}{\text{буква}} \right].
 \end{aligned}$$

Сравнение обоих результатов показывает, что достигнуто увеличение экономичности кода на 11%: 7,684 вместо 8,648 бит/буква. Неиспользование этого резерва можно объяснить трудностями переучивания всего персонала и затруднениями, которые возникли бы в обмене информацией с другими странами.

Задача 6

Закодировать систематическим кодом, исправляющим все однократные ошибки, последовательность цифр от 0 до 9. Составить матрицу кодовых расстояний, таблицу проверок и исправляющих векторов. Показать исправление ошибки, возникшей во втором символе шестерки, с помощью таблицы проверок и исправляющего вектора.

Решение

1. Кодовое расстояние требуемого кода определяется по формуле (3.13):

$$\rho \geq 2q_c + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3.$$

2. Количество информативных символов кодовой комбинации определяется по формуле (3.17): $N = 2^k \rightarrow k = \log_2 N = \log_2 10 \approx 4$.

3. Значность кода определяется по формуле (из табл. 3.6) $N \leq \frac{2^n}{1+n}$, которая обуславливает зависимость

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	1,33	2	3,2	5,33	9,14	16	29,44	51,2	93,09

Из этой зависимости следует: $n=7$.

Составляемый код (7, 4) с $\rho=3$ устанавливает следующее соответствие кодируемых цифр и кодовых комбинаций:

$$\begin{array}{l}
 0-000000 \\
 1-100001 \\
 2-010010
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
3-0010110 \\
4-0001111 \\
\hline
5-1100110 \quad (1+2) \\
6-1010101 \quad (1+3) \\
7-1001100 \quad (1+4) \\
8-0110011 \quad (2+3) \\
9-0101010 \quad (2+4)
\end{array}$$

5. Матрица кодовых расстояний имеет вид

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	3	3	3	4	4	4	3	4	3
1		0	4	4	3	3	3	4	3	4
2			0	4	3	3	3	4	3	4
3				0	3	3	3	4	3	4
4					0	4	4	3	4	3
5						0	4	3	4	3
6							0	3	4	7
7								0	7	4
8									0	3
9										0

6. Количество строк проверочной матрицы определяется как $n-k=7-4=3$. Векторы проверочной матрицы должны выполнять условие, представленное формулой (3.18):

$$vu = \sum_{i=1}^n a_i b_i = 0,$$

т. е.

$$b_1 + b_6 + b_7 = 0;$$

$$b_2 + b_5 + b_7 = 0;$$

$$b_3 + b_5 + b_6 = 0;$$

$$b_4 + b_5 + b_6 + b_7 = 0,$$

что соответствует проверочной матрице

$$H = \begin{pmatrix} 1011010 \\ 0111100 \\ 1101001 \end{pmatrix}.$$

7. Таблица проверок (табл. ПЗ.2) составляется из проверочной матрицы.

Таблица ПЗ.2

Номер проверки	Номер символа						
	1	2	3	4	5	6	7
1	×		×	×		×	
2		×	×	×	×		
3	×	×		×			×

8. Исправляющие векторы определяются по формуле (3.19) $c_j = e_i u_j$, которая дает следующие зависимости:

Ошибка e	Исправляющий вектор c
0000001	001
0000010	100
0000100	010
0001000	111
0010000	110
0100000	011
1000000	101

9. Соответствующая цифре «6» кодовая комбинация, с ошибкой во втором символе, имеет вид 1110101. Согласно таблице проверок, не выполняются вторая и третья проверки, что указывает на ошибку во втором символе.

Умножая комбинацию на проверочную матрицу, получаем:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ c_2 &= 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 = 1 \\ c_3 &= 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 = 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} c &= 011, \text{ что соот-} \\ &\text{ветствует ошибке} \\ e &= 0100000. \end{aligned}$$

Задача 7

Закодировать циклическим кодом, исправляющим все однократные ошибки, последовательность цифр от 0 до 9. Составить матрицу кодовых расстояний, схемы кодирования и декодирования. Показать действие схемы кодирования на примере создания кодовой группы цифры «7», а схемы декодирования на примере неискаженной и искаженной в третьем знаке (считая справа налево) кодовой группы цифры «4». Производящий (генераторный) полином выбирается из табл. ПЗ.3.

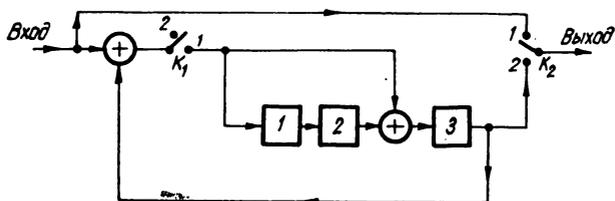


Рис. ПЗ.1. Схема кодирования.

4. Схема кодирующего устройства выбирается из двух вариантов. Так как $k=4$, а $n-k=3$, то $n-k < k$ и, следовательно, для кодирования применяется схема с $(n-k)$ -ступенными регистрами (рис. ПЗ.1).

5. Схема декодирования показана на рис. ПЗ.2.

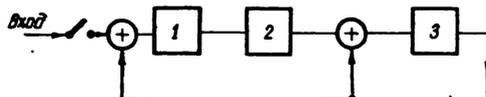


Рис. ПЗ.2. Схема декодирования.

6. Кодовая группа цифры «7» при подаче на вход кодирующего устройства ее информационных символов (первых четырех, считая справа налево) образуется согласно закономерности, показанной в табл. ПЗ.4.

Из таблицы видно, что на выход действительно подготовлены символы, соответствующие контрольным символам передаваемой кодовой группы цифры «7».

Т а б л и ц а ПЗ.4

Вход	Ячейки регистра			Выход
	1	2	3	
0	0	—	0	0
1	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	1	1	1

7. Декодирование (обнаружение однократной ошибки) в кодовой группе цифры «4» происходит по закономерности, показанной в табл. ПЗ.5.

Т а б л и ц а ПЗ.5

При поступлении неискаженной группы				При поступлении искаженной группы			
После шага	Ячейки регистра			После шага	Ячейки регистра		
	1	2	3		1	2	3
1	0	—	—	1	0	—	—
2	0	0	—	2	0	0	—
3	1	0	0	3	0	0	0
4	0	1	0	4	0	0	0
5	1	0	1	5	1	0	0
6	0	1	1	6	1	1	0
7	0	0	0	7	1	1	0
				При работе «на себя»			
				1	1	1	0
				2	0	1	1
				3	1	0	0

Из таблицы видно, что схема действительно выявляет ошибку в третьем символе.

Задача 8

Составить схему, образующую и декодирующую непрерывный код Хагельбаргера, который способен исправлять пакетные ошибки наибольшей длины 6 символов. Показать исправляющие свойства указанной схемы при передаче слова «дом», предварительно закодированного кодом Фэно по закономерности, представленной в решении задачи 4. Искажения сводятся к замене всех «0», встречающихся среди первых шести символов на «1», а также замене на «1» последнего информационного «0».

Решение

1. Схемы кодирования и декодирования составляются согласно закономерности, показанной на рис. 3.9 и 3.10. Они представлены на рис. ПЗ.3 и ПЗ.4.

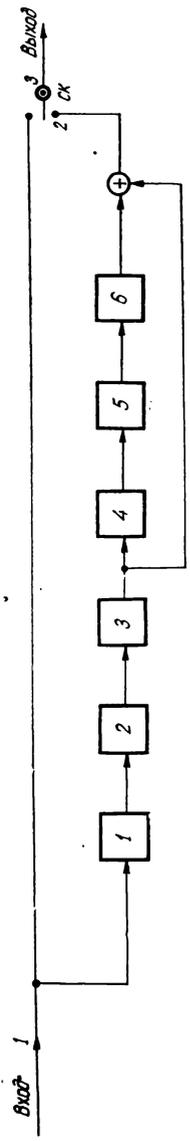


Рис. Пз.3. Схема кодирования.

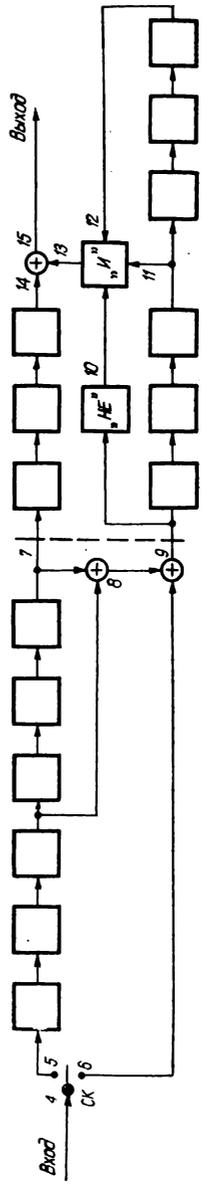


Рис. Пз.4. Схема декодирования.

2. Поступающая на вход кодирующего устройства последовательность импульсов (записанная справа налево) имеет вид

$$\underbrace{01011000111101}_{\text{м о д}}$$

Кодирующее устройство образует соответственно контрольную последовательность, показанную в табл. ПЗ.6.

Таблица ПЗ.6

Ячейки кодирующего устройства						Выход 2
1	2	3	4	5	6	
1	—	—	—	—	—	0
0	1	—	—	—	—	0
1	0	1	—	—	—	0
1	1	0	1	—	—	1
1	1	1	0	1	—	0
1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1
—	0	1	0	1	1	0
—	—	0	1	0	1	0
—	—	—	0	1	0	1
—	—	—	—	0	1	0
—	—	—	—	—	0	1

Выходящая на линию последовательность имеет следующий вид (читается справа налево):

10001000001011101111001000110111010001.

3. Поступающая на вход декодирующего устройства искаженная последовательность имеет вид:

10001000001111101111001000110111111111.

Ее обработка в декодирующей схеме порождает исправляющую последовательность, которая обеспечивает пра-

вильную информационную последовательность на выходе декодирующего устройства. А именно:

Вывод 10		11101101111111101101000
„ 11		10010000000010010111---
„ 12		10000000010010111-----
Исправляющая	последовательность,	
вывод 13		10000000000010000000000
Исправляемая	последовательность,	
вывод 14		11011000111111-----
Исправленная	последовательность,	
вывод 15		01011000111101
		<u> </u> <u> </u> <u> </u>
		М О Д

П3.3. Аналитическое представление сигналов

Задача 9

Определить тригонометрическую и комплексную формы ряда Фурье для периодических последовательностей импульсов, показанных на рис. П3.5, а—в. Рассчитать значения их первых десяти гармоник; нарисовать линейчатые

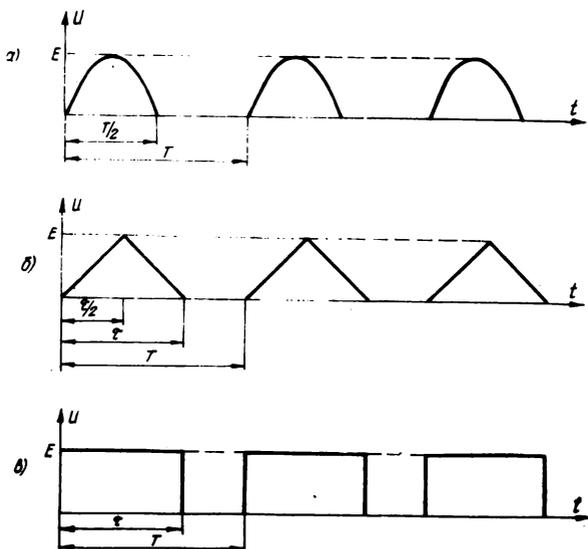


Рис. П3.5. Периодические последовательности (а, б, в) импульсов, подлежащие выражению в спектральной форме.

спектры указанных последовательностей импульсов и рассчитать долю мощности, сконцентрированной в первом «лепестке» спектра.

Решение

Последовательность *a*

1. Тригонометрическая форма ряда Фурье для периодической последовательности импульсов определяется по формулам (4.9) — (4.14). Для случая последовательности положительных полупериодов синусоиды, представленной на рис. ПЗ.5, *a*, правомерна зависимость

$$f(t) = \begin{cases} E \sin \Omega t & \text{при } 0 \leq t < \frac{T}{2}; \\ 0 & \text{при } \frac{T}{2} \leq t < T. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Согласно формуле (4.9), } A_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E \times \\ &\times \sin \Omega t dt = \frac{E}{T\Omega} \left| -\cos \Omega t \right|_0^{\frac{T}{2}}. \text{ Так как } \Omega = \frac{2\pi}{T}, \text{ то } A_0 = \\ &= \frac{E}{\pi}. \text{ Согласно формуле (4.10), } a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cos(n \times \\ &\times \Omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E \sin \Omega t \cos n \Omega t dt = \frac{E}{T(1+n)\Omega} \times \\ &\times \left| -\cos[(1+n)\Omega t] \right|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{E}{T(1-n)\Omega} \left| -\cos[(1-n)\Omega t] \right|_0^{\frac{T}{2}}. \\ \text{Так как } \Omega &= \frac{2\pi}{T}, \text{ а } \cos[(1+n)\pi] = \cos[(1-n)\pi] = -\cos n\pi, \text{ то} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{E}{2\pi} (1 + \cos n\pi) \left(\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n} \right), \text{ или } a_n = \frac{E}{\pi(1-n^2)} \times \\
 &\times (1 + \cos n\pi). \text{ По формуле (4.11) } b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \times \\
 &\times \sin n\Omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E \sin \Omega t \sin n\Omega t dt = \frac{2E}{T^2} \left\{ \int_0^{\frac{T}{2}} \cos[(1-n)\Omega t] dt - \int_0^{\frac{T}{2}} \cos[(1+n)\Omega t] dt \right\} = \frac{E}{T(1-n)\Omega} \times \\
 &\times \left| \sin[(1-n)\Omega t] \right|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{E}{T(1+n)\Omega} \left| \sin[(1+n)\Omega t] \right|_0^{\frac{T}{2}}. \text{ Так как } \\
 \Omega &= \frac{2\pi}{T}, \text{ а } \sin[(1-n)\pi] = -\sin[(1+n)\pi] = \sin n\pi, \text{ то } \\
 b_n &= \frac{E}{2\pi} \sin n\pi \left(\frac{1}{1-n} + \frac{1}{1+n} \right), \text{ или } b_n = \frac{E}{\pi(1-n^2)} \sin n\pi. \\
 \text{Согласно формуле (4.13), } A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{E}{\pi(1-n^2)} \times \\
 &\times \sqrt{(1 + \cos n\pi)^2 + \sin^2 n\pi}, \text{ или } A_n = \frac{2E}{\pi(1-n^2)} \left| \cos n \frac{\pi}{2} \right|. \\
 \text{Согласно формуле (4.14), } \psi_n &= \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n} = \operatorname{arctg} \frac{\sin n\pi}{1 + \cos n\pi}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, тригонометрическая форма ряда Фурье может быть записана согласно формуле (4.12):

$$\begin{aligned}
 f(t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t - \psi_n) = \\
 &= \frac{E}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2E}{\pi(1-n^2)} \left| \cos n \frac{\pi}{2} \right| \cos \left(n\Omega t - \operatorname{arctg} \frac{\sin n\pi}{1 + \cos n\pi} \right).
 \end{aligned}$$

2. Комплексная форма ряда Фурье определяется по формулам (4.18) и (4.20), т. е. $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\Omega t}$, где

$$C_n = \frac{A_n e^{-j\psi_n}}{2}, \text{ откуда } f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{E}{\pi(1-n^2)} \left| \cos n \frac{\pi}{2} \right| \times \\ \times e^{j(n\Omega t - \arctg \frac{\sin n\pi}{1 + \cos n\pi})}$$

3. Значения первых десяти гармоник следуют из развертки тригонометрической формы ряда Фурье, т. е.

$$f(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \sin \Omega t - \frac{2E}{\pi} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\Omega t + \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\Omega t + \right. \\ \left. + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\Omega t + \frac{1}{7 \cdot 9} \cos 8\Omega t + \frac{1}{9 \cdot 11} \cos 10\Omega t + \dots \right),$$

при написании которой A_1 и ψ_1 определены путем раскрытия неопределенностей по правилу Лопиталья. Значения гармоник приведены в табл. ПЗ.7.

Т а б л и ц а ПЗ.7

A_k	Значение гармоник	A_k	Значение гармоник	A_k	Значение гармоник
A_0	0,318E	A_4	0,042E	A_8	0,010E
A_1	0,500E	A_5	0	A_9	0
A_2	0,212E	A_6	0,018E	A_{10}	0,006E
A_3	0	A_7	0		

4. Линейчатый спектр следует из приведенных значений гармоник: он изображен на рис. ПЗ.6.

5. Полная мощность последовательности импульсов определяется по формуле (4.12): $\overline{f^2(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt =$

$$= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E^2 \sin^2 \Omega t dt = \frac{E^2}{T\Omega} \left| \frac{\Omega t}{2} - \frac{\sin 2\Omega t}{4} \right|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{E^2}{4}; \overline{f^2(t)} = \\ = 0,25E^2.$$

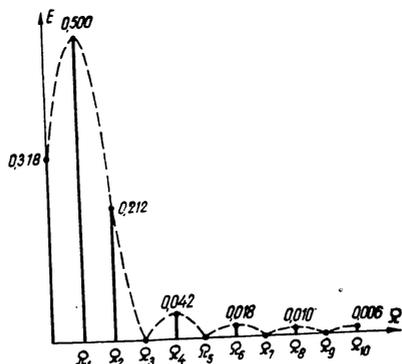


Рис. ПЗ.6. Линейчатый спектр последовательности импульсов, показанной на рис. ПЗ.5,а.

Мощность первого «лепестка» линейчатого спектра определяется по формуле (4.23): $\overline{f^2_1(t)} = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 A_n^2 = 0,318^2 E^2 + \frac{E^2}{2} (0,5^2 + 0,212^2)$; $\overline{f^2(t)} = 0,24884E^2$. Следовательно, первый «лепесток» линейного спектра содержит 99,52% всей мощности рассмотренной импульсной последовательности.

Последовательность б

1. Для случая последовательности треугольных импульсов, представленной на рис. ПЗ.5,б, правомерна зависимость

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2E}{\tau} t & \text{при } 0 \leq t < \frac{\tau}{2}; \\ 2E \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) & \text{при } \frac{\tau}{2} \leq t < \tau. \end{cases}$$

Согласно формуле (4.9),

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{\tau}{2}} 2E \frac{t}{\tau} dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} 2E \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) dt = \\ &= \frac{2E}{T\tau} \left| \frac{t^2}{2} \right|_0^{\frac{\tau}{2}} + \frac{2E}{T} \left| t - \frac{t^2}{2\tau} \right|_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} = \frac{E\tau}{2T}. \end{aligned}$$

Согласно формуле (4.10),

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{2E}{\tau} t \cos n\Omega t \, dt + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} 2E \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \cos n\Omega t \, dt \right] = \\
 &= \frac{2}{T} \left[\frac{2E}{\tau n^2 \Omega^2} \left| \cos n\Omega t + n\Omega t \sin n\Omega t \right|_0^{\frac{\tau}{2}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2E}{n\Omega} \left| \sin n\Omega t \right|_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} - \frac{2E}{\tau n^2 \Omega^2} \left| \cos n\Omega t + n\Omega t \sin n\Omega t \right|_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \right].
 \end{aligned}$$

После элементарных тригонометрических преобразований получаем:

$$a_n = \frac{ET}{\pi^2 n^2 \tau} \left[2 \cos \frac{\pi n \tau}{T} - \cos \frac{2\pi n \tau}{T} - 1 \right].$$

Согласно формуле (4.11),

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{\tau}{2}} 2E \frac{t}{\tau} \sin n\Omega t \, dt + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} 2E \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \sin n\Omega t \, dt \right] = \\
 &= \frac{2}{T} \left[\frac{2E}{\tau n^2 \Omega^2} \left| \sin n\Omega t - n\Omega t \cos n\Omega t \right|_0^{\frac{\tau}{2}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2E}{n\Omega} \left| \cos n\Omega t \right|_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} - \frac{2E}{\tau n^2 \Omega^2} \left| \sin n\Omega t - n\Omega t \cos n\Omega t \right|_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \right].
 \end{aligned}$$

После элементарных тригонометрических преобразований получаем:

$$b_n = \frac{ET}{\pi^2 n^2 \tau} \left[2 \sin \frac{\pi n \tau}{T} - \sin 2\pi n \frac{\tau}{T} \right].$$

Согласно формуле (4.13),

$$A_n = \frac{ET}{\pi^2 n^2 \tau} \times$$

$$\times \sqrt{\left[2\cos \frac{\pi n \tau}{T} - \cos \frac{2\pi n \tau}{T} - 1\right]^2 + \left[2\sin \frac{\pi n \tau}{T} - \sin \frac{2\pi n \tau}{T}\right]^2};$$

$$A_n = \frac{4ET}{\pi^2 n^2 \tau} \sin^2 \frac{\pi n \tau}{2T}.$$

Согласно формуле (4.14), $\psi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n} = \frac{n\Omega\tau}{2}$.

Следовательно, тригонометрическая форма ряда Фурье может быть записана согласно формуле (4.12) так:

$$f(t) = \frac{E\tau}{2T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4ET}{\pi^2 n^2 \tau} \sin^2 \frac{\pi n \tau}{2T} \cos n\Omega \left(t - \frac{\tau}{2}\right).$$

2. Комплексная форма ряда Фурье определяется по формулам (4.18) и (4.20):

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2ET}{\pi^2 n^2 \tau} \sin^2 \frac{\pi n \tau}{2T} e^{jn\Omega \left(t - \frac{\tau}{2}\right)}.$$

3. Значения десяти первых гармоник следуют из раз-
вертки тригонометрической формы ряда Фурье, т. е.

$$f(t) = \frac{E\tau}{2T} + \frac{4ET}{\pi^2 \tau} \left[\sin^2 \frac{\pi \tau}{2T} \cos \Omega \left(t - \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\pi \tau}{T} \cos 2\Omega \left(t - \frac{\tau}{2}\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{9} \sin^2 \frac{3\pi \tau}{2T} \cos 3\Omega \left(t - \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{16} \sin^2 \frac{2\pi \tau}{T} \cos 4\Omega \left(t - \frac{\tau}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{25} \sin^2 \frac{5\pi \tau}{2T} \cos 5\Omega \left(t - \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{36} \sin^2 \frac{3\pi \tau}{T} \cos 6\Omega \left(t - \frac{\tau}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{49} \sin^2 \frac{7\pi \tau}{2T} \cos 7\Omega \left(t - \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{64} \sin^2 \frac{4\pi \tau}{T} \cos 8\Omega \left(t - \frac{\tau}{2}\right) +$$

$$\left. + \frac{1}{81} \sin^2 \frac{9\pi \tau}{2T} \cos 9\Omega \left(t - \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{100} \sin^2 \frac{5\pi \tau}{T} \cos 10\Omega \left(t - \frac{\tau}{2}\right) + \dots \right].$$

Таблица ПЗ.8

A_k	Значение гармоники при			A_k	Значение гармоники при		
	$\frac{\tau}{T} = 1$	$\frac{\tau}{T} = 0,5$	$\frac{\tau}{T} = 0,25$		$\frac{\tau}{T} = 1$	$\frac{\tau}{T} = 0,5$	$\frac{\tau}{T} = 0,25$
A_0	0,500E	0,250E	0,125E	A_6	0	0,023E	0,023E
A_1	0,405E	0,405E	0,237E	A_7	0,008E	0,008E	0,005E
A_2	0	0,203E	0,203E	A_8	0	0	0
A_3	0,045E	0,045E	0,154E	A_9	0,005E	0,005E	0,002E
A_4	0	0	0,101E	A_{10}	0	0,008E	0,008E
A_5	0,016E	0,016E	0,055E				

Значения гармоник для разных отношений $\frac{\tau}{T}$ приводятся в табл. ПЗ.8.

4. Линейчатые спектры следуют из приведенной таблицы; они изображены на рис. ПЗ.7.

5. Полная мощность последовательности импульсов

$$\begin{aligned}
 \text{определяется по формуле (4.21): } \overline{f^2(t)} &= \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{\tau}{2}} 4E^2 \frac{t^2}{\tau^2} dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} 4E^2 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^2 dt = \frac{4E^2}{3T\tau^2} \left[t^3 \right]_0^{\frac{\tau}{2}} + \\
 &+ \frac{4E^2}{T} \left[\left| t \right|_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} - \left| \frac{t^2}{\tau} \right|_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} + \left| \frac{t^3}{3\tau^2} \right|_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \right]; \quad \overline{f^2(t)} = \frac{E^2\tau}{3T}.
 \end{aligned}$$

Мощность первого «лепестка» линейчатого спектра определяется по формуле (4.23): $\overline{f_1^2(t)} = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2$. Для ранее рассмотренных трех значений $\frac{\tau}{T}$ получаем результаты, сведенные в табл. ПЗ.9.

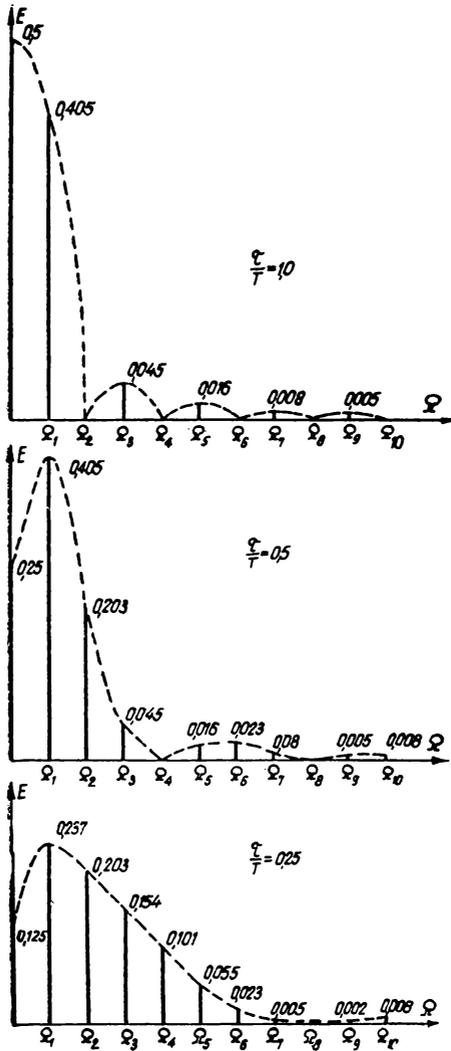


Рис. П3.7. Линейчатые спектры последовательности импульсов, показанной на рис. П3.5,6.

Таблица ПЗ.9

	$\frac{\tau}{T} = 1$	$\frac{\tau}{T} = 0,5$	$\frac{\tau}{T} = 0,25$
$\overline{f^2(t)}$	$0,3333E^2$	$0,1666E^2$	$0,0833E^2$
$\overline{f_I^2(t)}$	$0,3320E^2$	$0,1661E^2$	$0,0831E^2$
$\frac{\overline{f_I^2(t)}}{\overline{f^2(t)}} 100\%$	99,6	99,7	99,7

Последовательность в

1. Для случая последовательности прямоугольных импульсов, представленной на рис. ПЗ.5,в, правомерна зависимость

$$f(t) = \begin{cases} E & \text{при } 0 \leq t < \tau; \\ 0 & \text{при } \tau \leq t < T. \end{cases}$$

Согласно формуле (4.9),

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^{\tau} E dt = E \frac{\tau}{T}.$$

Согласно формуле (4.10),

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^{\tau} E \cos n\Omega t dt = \frac{2E}{Tn\Omega} \left| \sin n\Omega t \right|_0^{\tau} = \\ &= \frac{E}{\pi n} \sin 2\pi n \frac{\tau}{T}. \end{aligned}$$

Согласно формуле (4.11),

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^{\tau} E \sin n\Omega t dt = \frac{2E}{Tn\Omega} \left| -\cos n\Omega t \right|_0^{\tau} = \\ &= \frac{E}{\pi n} \left(1 - \cos 2\pi n \frac{\tau}{T} \right). \end{aligned}$$

Согласно формуле (4.13),

$$A_n = \frac{E}{\pi n} \sqrt{\sin^2 2\pi n \frac{\tau}{T} + \left(1 - \cos 2\pi n \frac{\tau}{T}\right)^2} = \frac{2E}{\pi n} \sin \pi n \frac{\tau}{T}.$$

Согласно формуле (4.14),

$$\psi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n} = \pi n \frac{\tau}{T} = \frac{n\Omega\tau}{2}.$$

Следовательно, тригонометрическая форма ряда Фурье может быть записана согласно формуле (4.12):

$$f(t) = E \frac{\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2E}{\pi n} \sin \pi n \frac{\tau}{T} \cos n\Omega \left(t - \frac{\tau}{2}\right).$$

2. Комплексная форма ряда Фурье определяется по формулам (4.18) и (4.20):

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{E}{\pi n} \sin \pi n \frac{\tau}{T} e^{jn\Omega(t - \frac{\tau}{2})}.$$

3. Значения десяти первых гармоник следуют из развертки тригонометрической формы ряда Фурье:

$$\begin{aligned} f(t) = & E \frac{\tau}{T} + \frac{2E}{\pi} \left[\sin \pi \frac{\tau}{T} \cos \Omega \left(t - \frac{\tau}{2}\right) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \sin 2\pi \frac{\tau}{T} \cos 2\Omega \left(t - \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{3} \sin 3\pi \frac{\tau}{T} \cos 3\Omega \left(t - \frac{\tau}{2}\right) + \\ & + \frac{1}{4} \sin 4\pi \frac{\tau}{T} \cos 4\Omega \left(t - \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{5} \sin 5\pi \frac{\tau}{T} \cos 5\Omega \left(t - \frac{\tau}{2}\right) + \\ & + \frac{1}{6} \sin 6\pi \frac{\tau}{T} \cos 6\Omega \left(t - \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{7} \sin 7\pi \frac{\tau}{T} \cos 7\Omega \left(t - \frac{\tau}{2}\right) + \\ & + \frac{1}{8} \sin 8\pi \frac{\tau}{T} \cos 8\Omega \left(t - \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{9} \sin 9\pi \frac{\tau}{T} \cos 9\Omega \left(t - \frac{\tau}{2}\right) + \\ & \left. + \frac{1}{10} \sin 10\pi \frac{\tau}{T} \cos 10\Omega \left(t - \frac{\tau}{2}\right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

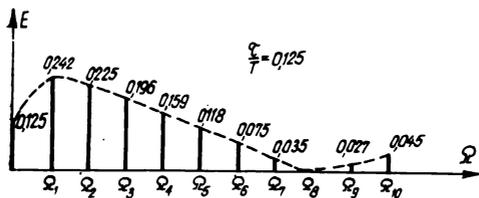
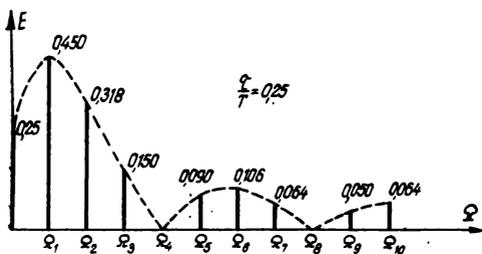
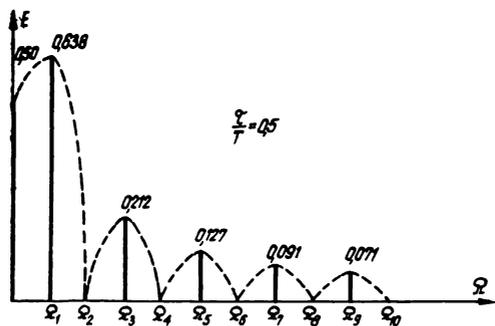


Рис. ПЗ.8. Линейчатые спектры последовательности импульсов, показанной на рис. ПЗ.5,в.

Значения гармоник для разных отношений $\frac{\tau}{T}$ приводятся в табл. ПЗ.10.

4. Линейчатые спектры следуют из приведенной таблицы, они изображены на рис. ПЗ.8.

Таблица П3.10

A_k	Значение гармоники при			A_k	Значение гармоники при		
	$\frac{\tau}{T} = 0,5$	$\frac{\tau}{T} = 0,25$	$\frac{\tau}{T} = 0,125$		$\frac{\tau}{T} = 0,5$	$\frac{\tau}{T} = 0,25$	$\frac{\tau}{T} = 0,125$
A_0	0,500E	0,250E	0,125E	A_6	0	-0,106E	0,075E
A_1	0,636E	0,450E	0,242E	A_7	-0,091E	-0,064E	0,035E
A_2	0	0,318E	0,225E	A_8	0	0	0
A_3	-0,212E	0,150E	0,196E	A_9	0,071E	0,050E	0,027E
A_4	0	0	0,159E	A_{10}	0	0,064E	0,045E
A_5	0,127E	-0,090E	0,118E				

5. Полная мощность последовательности импульсов определяется по формуле (4.21):

$$\overline{f^2(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\tau} E^2 dt = E^2 \frac{\tau}{T}.$$

Мощность первого «лепестка» линейчатого спектра определяется по формуле (4.23): $\overline{f_1^2(t)} = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_I A_n^2$. Для ранее рассмотренных трех случаев получаем значения, сведенные в табл. П3.11.

Таблица П3.11

	$\frac{\tau}{T} = 0,5$	$\frac{\tau}{T} = 0,25$	$\frac{\tau}{T} = 0,125$
$\overline{f^2(t)}$	0,500E ²	0,250E ²	0,125E ²
$\overline{f_1^2(t)}$	0,4522E ²	0,2256E ²	0,1125E ²
$\frac{\overline{f_1^2(t)}}{\overline{f^2(t)}} 100\%$	90,4	90,2	90,0

Задача 10

Определить спектральную плотность единичного прямоугольного импульса, единичного скачка напряжения и δ -функции (единичного импульса), показанных соответ-

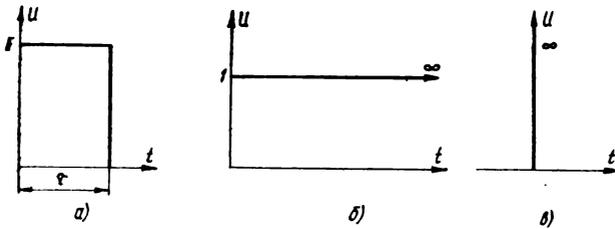


Рис. ПЗ.9. Единичные импульсы, подлежащие выражению в спектральной форме.

венно на рис. ПЗ.9, а—в, нарисовать спектры указанных единичных сигналов и рассчитать энергию, сконцентрированную в первых «лепестках» их спектров.

Решение

Для рис. ПЗ.9,а

1. Спектральная плотность непериодического сигнала определяется по формуле (4.26). Для единичного прямоугольного импульса прямо пропорциональна зависимости

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ E & \text{при } 0 \leq t \leq \tau; \\ 0 & \text{при } t > \tau. \end{cases}$$

Согласно формуле (4.26),

$$\begin{aligned} \Phi(\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_0^{\tau} E e^{-j\Omega t} dt = \\ &= \frac{E}{-j\Omega} \left[e^{-j\Omega t} \right]_0^{\tau} = \frac{E}{-j\Omega} (e^{-j\Omega\tau} - 1). \end{aligned}$$

Пользуясь формулой Эйлера, полученное равенство можно переписать в виде $\Phi(\Omega) = \frac{E}{-j\Omega} (\cos \Omega\tau - j \sin \Omega\tau - 1)$, тогда абсолютное значение спектральной плотности

$$\begin{aligned} |\Phi(\Omega)| &= \frac{E}{\Omega} \sqrt{(\cos \Omega\tau - 1)^2 + \sin^2 \Omega\tau} = \\ &= \frac{2E}{\Omega} \sin \frac{\Omega\tau}{2} = E\tau \frac{\sin \frac{\Omega\tau}{2}}{\frac{\Omega\tau}{2}}. \end{aligned}$$

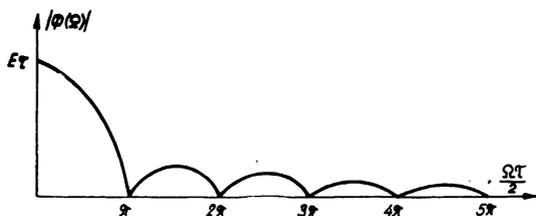


Рис. ПЗ.10. Спектр единичного прямоугольного импульса.

2. Спектр единичного прямоугольного импульса, длительность τ которого выбрана равной $\tau = 20$ мсек, показан на рис. ПЗ.10.

3. Количество энергии, выделяемое единичным импульсом на одноомном сопротивлении, выражается формулой (4.34):

$$\Theta = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \int_0^{\tau} E^2 dt = E^2 \tau.$$

Энергия, содержащаяся в первом «лепестке» спектра того же импульса, определяется по формуле (4.35):

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |\Phi(\Omega)|^2 d\Omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\tau}} E^2 \tau^2 \frac{\sin^2 \frac{\Omega\tau}{2}}{\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)^2} d\Omega = \\ &= \frac{2 E^2 \tau}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)^2} d\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right). \end{aligned}$$

Обозначаем $\frac{\Omega\tau}{2} = x$; тогда задача сводится к решению интеграла:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} dx = \left| -\frac{1}{2x} (1 - \cos 2x) \right|_0^{\pi} +$$

$$\begin{aligned}
+ \int_0^{\pi} \frac{2 \sin 2x}{2x} dx &= -\frac{1}{2\pi} (1 - \cos 2\pi) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x} + \\
+ \int_0^{\pi} \frac{2 \sin 2x}{2x} dx &= 0 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2} + \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2x}{2x} d(2x) = \\
&= 0 + 0 + \int_0^{2\pi} \frac{\sin y}{y} dy = 1,42.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathcal{E}_1 = 1,42 \frac{2}{\pi} E^2 \tau = 0,9 E^2 \tau$.

Для рис. ПЗ.9, б

1. Спектральная плотность единичного скачка напряжения не может быть определена по формуле (4.26), так как порожденный единичным скачком сигнал продолжается до бесконечности. Поэтому следует использовать преобразование Лапласа, т. е. применить формулу (4.32). Для единичного скачка правомерна зависимость

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Согласно формуле (4.32), $\Phi(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = E \int_0^{\infty} e^{-pt} dt$;

$$\Phi(p) = \frac{E}{p} = \frac{E}{j\Omega}.$$

Модуль и аргумент спектральной плотности в этом случае могут быть записаны соответственно $|\Phi(\Omega)| = \frac{E}{\Omega}$;

$$\psi(\Omega) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Спектр единичного скачка (для $\Omega > 0$) изображен на рис. ПЗ.11. При нулевой частоте кривая спектральной плотности уходит в бесконечность, что указывает на наличие в составе сплошного спектра скачка дискретного колебания с конечной амплитудой (при нулевой частоте).

Количество энергии, сконцентрированной в первом «лепестке» спектра, в настоящей задаче несущественно, так как этот «лепесток» уходит в бесконечность.

Для рис. ПЗ.9, в

1. Спектральная плотность δ -функции (единичного импульса) определяется по формуле (4.26). Для δ -функции справедливы равенства

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ \infty & \text{при } t = 0; \\ 0 & \text{при } t > 0 \end{cases}$$

$$\text{и } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

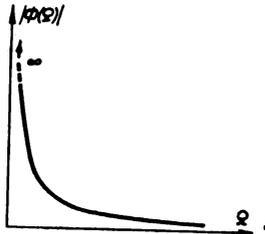


Рис. ПЗ.11. Спектр единичного скачка напряжения.

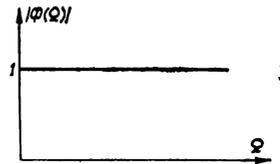


Рис. ПЗ.12. Спектр δ -функции.

Учитывая эти равенства и пользуясь формулами Эйлера, можем записать:

$$\begin{aligned} \Phi(\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cos \Omega t dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \sin \Omega t dt = 1. \end{aligned}$$

2. Спектр δ -функции представлен на рис. ПЗ.12.

3. Энергия δ -функции (единичного импульса) бесконечно велика. Согласно полученному выше результату, ее спектр вовсе не содержит «лепестков».

Задача 11

Найти автокорреляционную функцию, автокорреляционную функцию флуктуации, нормированную автокорреляционную функцию (коэффициент корреляции) и интервалы автокорреляции (τ_β, τ_0) дискретного случайного стационарного процесса $f(t)$, изображенного на рис. ПЗ.13 и представляющего собой последовательность прямоугольных импульсов одинаковой высоты (равной единице) и случайной длительности.



Рис. ПЗ.13. Последовательность импульсов случайной длины.

Распределение значений $f(t)$ (или 0, или 1) подчиняется закону Пуассона $P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$, где $P_k(t)$ — вероятность того, что за время t произойдет k переходов от 0 к 1, или наоборот, а λ — число переходов от 0 к 1, или наоборот, в единицу времени. Вероятности существования 0 и 1 равны друг другу, т. е. $P(1) = P(0) = 0,5$.

Решение

1. Автокорреляционная функция дискретного стационарного процесса определяется по формуле (4.41), причем суммирование следует вести по всем возможным в случайном процессе переходам (их четыре), а именно

Переходы	x_t	$x_{t+\tau}$
1	0	0
2	0	1
3	1	0
4	1	1

Так как первые три перехода при перемножении двух рядом стоящих значений функции превращаются в нуль, то $B(\tau)$ определяется значением только одного (последнего) сумманта, т. е., согласно формуле (4.41), $B(\tau) =$

$$= \sum_{\tau} x_t x_{t+\tau} P(x_t, x_{t+\tau}) = 1 \cdot 1 P(x_t = 1, x_{t+\tau} = 1).$$

Вероятность $P(x_t = 1, x_{t+\tau} = 1)$ сводится к вероятности того, что за время τ происходит четное количество переходов (от 1 к 0 и обратно), так как только в этом случае будет выполнено исходное условие ($x_t = 1$ и $x_{t+\tau} = 1$), следовательно,

$$P(x_t = 1, x_{t+\tau} = 1) = P(1) \sum_{\text{по четным}} P_k(\tau) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{\text{по четным}} \frac{(\lambda |\tau|)^k}{k!} e^{-\lambda|\tau|} = \frac{1}{2} e^{-\lambda|\tau|} \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda |\tau|)^k}{k!} + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\lambda |\tau|)^k}{k!} \right].$$

С учетом зависимости, следующей из разложения e^x в ряд Маклорена, а именно $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, предыдущее выражение может быть приведено к виду

$$P(x_t = 1, x_{t+\tau} = 1) = \frac{1}{4} e^{-\lambda|\tau|} [e^{\lambda|\tau|} + e^{-\lambda|\tau|}],$$

или

$$P(x_t = 1, x_{t+\tau} = 1) = 0,25 (1 + e^{-2\lambda|\tau|}).$$

Значит, автокорреляционная функция имеет значение

$$B(\tau) = 0,25 (1 + e^{-2\lambda|\tau|}).$$

2. Автокорреляционная функция флуктуаций определяется по формуле (4.43).

Для расчета функции необходимо знать среднее значение сигнала, рассчитываемое по формуле (П2.9), т. е.

$$M[f(t)] = \overline{f(t)} = \sum_{k=1}^n x_k P_k = 1P(1) + 0P(0) = 0,5,$$

и, следовательно,

$$B_{\Phi}(\tau) = B(\tau) - \overline{f(t)}^2 = 0,25 (1 + e^{-2\lambda|\tau|}) - 0,5^2 = 0,25 e^{-2\lambda|\tau|}.$$

3. Нормированная автокорреляционная функция определяется по формуле (4.45).

Для ее расчета необходимо знать дисперсию процесса, которая рассчитывается по формуле (П2.11), т. е.

$$D [f(t)] = \sigma^2 = \sum_{k=1}^n [x_k - \overline{f(t)}]^2 P_k = \\ = (1 - 0,5)^2 0,5 + (0 - 0,5)^2 0,5 = 0,25,$$

и, следовательно, согласно формуле (4.45),

$$R(\tau) = \frac{B_{\Phi}(\tau)}{\sigma^2} = \frac{0,25 e^{-2\lambda|\tau|}}{0,25} = e^{-2\lambda|\tau|}.$$

4. Интервал автокорреляции может быть определен по формуле (4.46): $R(\tau_{\beta}) = \beta = e^{-2\lambda|\tau|}$, что дает $\tau_{\beta} = \frac{1}{2\lambda} \ln \beta$, или, по формуле (4.47):

$$\tau_0 = \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-2\lambda|\tau|} d\tau = \frac{1}{2\lambda}.$$

П3.4. Дискретизация и квантование

Задача 12

Произвести дискретизацию детерминированной периодической функции $f(t) = \frac{A}{2} + A \sin \Omega t + \frac{A}{2} \sin 2\Omega t$, пользуясь теоремой отсчетов. Определить значения функции для пяти моментов выборок и посередине между первым и вторым отсчетом. Выявить зависимость точности последнего результата от количества учтенных членов ряда. Решение осуществить а) начиная отсчет от нуля (времени) и б) начиная отсчет от максимального значения функции.

Решение

Случай а

1. Дискретизация функции производится по формуле (5.11) с учетом того, что, согласно теореме отсчетов,

$$\Delta t = \frac{1}{2F_{\max}}.$$

Из выражения для функции вытекает, что $F_{\text{макс}} = \frac{\Omega}{\pi}$, следовательно,

$$\Delta t = \frac{\pi}{2\Omega}.$$

Согласно формуле (5.11),

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n \Delta t) \frac{\sin \Omega_{\text{макс}} (t - n\Delta t)}{\Omega_{\text{макс}} (t - n\Delta t)} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n\pi}{2\Omega}\right) \frac{\sin 2\Omega \left(t - \frac{n\pi}{2\Omega}\right)}{2\Omega \left(t - \frac{n\pi}{2\Omega}\right)}. \end{aligned}$$

Моменты выборок соответствуют значениям: $n=0; 1; 2; 3; 4$ и т. д., т. е. моментам времени $t_0=0; t_1 = \frac{\pi}{2\Omega}; t_2 = \frac{\pi}{\Omega}; t_3 = \frac{3\pi}{2\Omega}; t_4 = \frac{2\pi}{\Omega}$ и т. д.

2. Значения функции в указанные моменты времени получаются, если в ее полное выражение подставить приведенные значения t :

$$f(0) = \frac{A}{2}; f\left(\frac{\pi}{2\Omega}\right) = \frac{3A}{2}; f\left(\frac{\pi}{\Omega}\right) = \frac{A}{2}; f\left(\frac{3\pi}{2\Omega}\right) = -\frac{A}{2}; f\left(\frac{2\pi}{\Omega}\right) = \frac{A}{2}.$$

3. Точное значение функции в момент времени, находящийся посередине между первым и вторым отсчетом, сводится к ее значению при $t = \frac{t_0 + t_1}{2}$, т. е. $t = \frac{\pi}{4\Omega}$. Исходя из условия задачи $f\left(\frac{\pi}{4\Omega}\right) = \frac{A}{2} + \frac{\sqrt{2}A}{2} + \frac{A}{2} \approx 1,707 A$.

Результаты исчислений по формуле (5.11) при разных количествах учтенных членов ряда сведены в табл. ПЗ.12.

Таблица П3.12

n	Отсчеты $f\left(\frac{n\pi}{2\Omega}\right)$	$\left(\frac{\pi - n\pi}{2}\right)$	$\sin\left(\frac{\pi - n\pi}{2}\right)$	$\frac{\sin\left(\frac{\pi - n\pi}{2}\right)}{\frac{\pi - n\pi}{2}}$	Сумманты	$f(t)$ (учитывая ± членов)
-6	+A/2	+13π/2	+1	+2/13π	+0,024A	+1,257A
-5	-A/2	+11π/2	-1	-2/11π	+0,029A	+1,262A
-4	+A/2	+9π/2	+1	+2/9π	+0,035A	+1,127A
-3	+3A/2	+7π/2	-1	-2/7π	-0,136A	+1,137A
-2	+A/2	+5π/2	+1	+2/5π	+0,064A	+1,337A
-1	-A/2	+3π/2	-1	-2/3π	+0,106A	+1,379A
0	+A/2	+π/2	+1	+2/π	+0,318A	
+1	+3A/2	-π/2	-1	+2/π	+0,955A	80,5
+2	+A/2	-3π/2	+1	-2/3π	-0,106A	78,4
+3	-A/2	-5π/2	-1	+2/5π	-0,064A	66,5
+4	+A/2	-7π/2	+1	-2/7π	-0,045A	66,0
+5	+3A/2	-9π/2	-1	+2/9π	+0,106A	74,0
+6	+A/2	-11π/2	+1	-2/11π	-0,029A	73,6

Примечание. В последней графе напротив положительных значений n значения $f(t)$ приведены в % от истинного значения функции.

Случай б

1. Для выявления начального момента отсчетов следует определить, когда функция достигает своего максимального

значения. Из уравнения $\frac{df(t)}{dt} = \frac{d\left(\frac{A}{2} + A\sin\Omega t + \frac{A}{2}\sin 2\Omega t\right)}{dt} =$

$= A\Omega \cos \Omega t + A\Omega \cos 2\Omega t = 0$ следует, что $\cos \Omega t + \cos 2\Omega t = 0$, или $\cos \Omega t + 2\cos^2 \Omega t - 1 = 0$. Введем обозначение $\cos \Omega t = x$.

Тогда $2x^2 + x - 1 = 0$ и $x_{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} =$

$= \frac{-1 \pm 3}{4}$. Отсюда $x_1 = +\frac{1}{2}$; $x_2 = -1$, что соответствует значениям

$$(\Omega t)_1 = \frac{\pi}{3} \quad \text{и} \quad (\Omega t)_2 = \pi.$$

Для определения характера функции в этих точках для них находятся значения второй производной, т. е.

$$f''(t) = \frac{df'(t)}{dt} = -A\Omega^2 \sin \Omega t - 2\Omega^2 \sin 2\Omega t.$$

Для $(\Omega t)_1$ $f''(t) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}A\Omega^2$, т. е. вторая производная отрицательная, что указывает на максимум функции, а для $(\Omega t)_2$ $f''(t) = 0$, что указывает на место перегиба функции. Следовательно, отсчеты нужно начинать с точки $(\Omega t)_1 = \frac{\pi}{3}$, т. е. $t_0 = \frac{\pi}{3\Omega}$.

2. Значения функции в момент максимума и последующие моменты отсчетов можно получить, вставляя в ее полное выражение значения $t_0 = \frac{\pi}{3\Omega}$; $t_1 = \frac{5\pi}{6\Omega}$; $t_2 = \frac{4\pi}{3\Omega}$; $t_3 = \frac{11\pi}{6\Omega}$; $t_4 = \frac{7\pi}{3\Omega}$ и т. д., что дает $f\left(\frac{\pi}{3\Omega}\right) = 1,799 A$; $f\left(\frac{5\pi}{6\Omega}\right) = 0,567 A$; $f\left(\frac{4\pi}{3\Omega}\right) = 0,067 A$; $f\left(\frac{11\pi}{6\Omega}\right) = -0,433 A$; $f\left(\frac{7\pi}{3\Omega}\right) = 1,799 A$.

Таблица П3.13

n	Отсчеты $f\left(\frac{n\pi}{2\Omega}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2} - n\pi\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - n\pi\right)$	$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - n\pi\right)}{\frac{\pi}{2} - n\pi}$	Сумманты	$f(t)$ как $\sum_{n=0}^{n+1} \pi$
-6	+0,067A	+13π/2	+1	+2/13π	+0,003A	—
-5	-0,433A	+11π/2	-1	-2/11π	+0,025A	—
-4	+1,799A	+9π/2	+1	+2/9π	+0,128A	—
-3	+0,567A	+7π/2	-1	-2/7π	-0,052A	—
-2	+0,067A	+5π/2	+1	+2/5π	+0,009A	—
-1	-0,433A	+3π/2	-1	-2/3π	+0,092A	—
0	+1,799A	+π/2	+1	+2/π	+1,146A	—
+1	+0,567A	-π/2	-1	+2/π	+0,361A	1,507A
+2	+0,067A	-3π/2	+1	-2/3π	-0,014A	1,585A
+3	-0,433A	-5π/2	-1	+2/5π	-0,055A	1,539A
+4	+1,799A	-7π/2	+1	-2/7π	-0,165A	1,322A
+5	+0,567A	-9π/2	-1	+2/9π	+0,040A	1,490A
+6	+0,067A	-11π/2	+1	-2/11π	-0,004A	1,511A
+7	-0,433A	-13π/2	-1	+2/13π	-0,021A	1,493A

3. Точное значение функции в момент времени по середине между первым и вторым отсчетом сводится к ее значению при $t = \frac{t_0 + t_1}{2}$, т. е. $t = \frac{7\pi}{12\Omega}$. Исходя из условия задачи

$$f\left(\frac{7\pi}{12\Omega}\right) = 0,5A + 0,966A - 0,25A = 1,216A.$$

Результаты исчислений по формуле (5.11) при разных количествах учтенных членов ряда сведены в табл. ПЗ.13.

4. Расчет функции в момент времени $t = \frac{\pi}{4\Omega}$ (когда ее истинное значение 1,707 A) приведен в табл. ПЗ.14.

Таблица ПЗ.14

n	Отсчеты $f\left(\frac{n\pi}{2\Omega}\right)$	$\left(\frac{\pi}{6} - n\pi\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{6} - n\pi\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{6} - n\pi\right)$ $\left(\frac{\pi}{6} - n\pi\right)$	Сумманты	$f(t)$ (учитывая ±n членов)
-6	+0,067A	+35π/6	-0,5	-3/35π	-0,002A	1,573A
-5	-0,433A	+29π/6	+0,5	+3/29π	-0,014A	1,573A
-4	+1,799A	+23π/6	-0,5	-3/23π	-0,074A	1,605A
-3	+0,567A	+17π/6	+0,5	+3/17π	+0,032A	1,611A
-2	+0,067A	+11π/6	-0,5	-3/11π	-0,006A	1,557A
-1	-0,433A	+5π/6	+0,5	+3/5π	-0,083A	1,558A
0	+1,799A	-π/6	-0,5	+3/π	+1,718A	—
+1	+0,567A	-7π/6	+0,5	-3/7π	-0,077A	91,4
+2	+0,067A	-13π/6	-0,5	+3/13π	+0,005A	91,4
+3	-0,433A	-19π/6	+0,5	-3/19π	+0,022A	94,5
+4	+1,799A	-25π/6	-0,5	+3/25π	+0,068A	94,0
+5	+0,567A	-31π/6	+0,5	-3/31π	-0,018A	92,4
+6	+0,067A	-37π/6	-0,5	+3/37π	-0,002A	92,4

Примечание. В последней графе напротив положительных значений n значения $f(t)$ приведены в % от истинного значения функции.

Задача 13

Представить рядом Котельникова пилообразное напряжение (рис. ПЗ.14), которое, будучи выражено рядом Фурье, имеет вид

$$f(t) = \frac{A}{\pi} \left(\sin \Omega t - \frac{1}{2} \sin 2\Omega t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega t - \frac{1}{4} \sin 4\Omega t + \frac{1}{5} \sin 5\Omega t \dots \right).$$

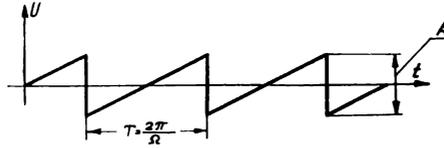


Рис. П3.14. пилообразное напряжение.

Спектр этого колебания считать ограниченным пятью гармониками. Значения отсчетов для ряда Котельникова брать непосредственно из графика. Сличить результаты, получаемые для значения функции в моменты времени $t = \frac{\pi}{5\Omega}$ и $t = \frac{\pi}{10\Omega}$, рассчитанные по ряду Котельникова и ряду Фурье.

Решение

1. Запись функции рядом Котельникова производится согласно формуле (5.11) с учетом того, что по условию задачи

$$\Delta t = \frac{\pi}{\Omega_{\text{макс}}} = \frac{\pi}{5\Omega}.$$

Таким образом,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n\pi}{5\Omega}\right) \frac{\sin 5\Omega \left(t - \frac{n\pi}{5\Omega}\right)}{5\Omega \left(t - \frac{n\pi}{5\Omega}\right)}.$$

2. Отсчеты производятся в моменты времени

$$t_0 = 0; t_1 = \frac{\pi}{5\Omega}; t_2 = \frac{2\pi}{5\Omega}; t_3 = \frac{3\pi}{5\Omega}; t_4 = \frac{4\pi}{5\Omega}; t_5 = \frac{\pi}{\Omega} \text{ и т. д.}$$

Им соответствуют отсчетные значения

$$f(0) = 0; f\left(\frac{\pi}{5\Omega}\right) = 0,1 \text{ A}; f\left(\frac{2\pi}{5\Omega}\right) = 0,2 \text{ A};$$

$$f\left(\frac{3\pi}{5\Omega}\right) = 0,3 \text{ A}; f\left(\frac{4\pi}{5\Omega}\right) = 0,4 \text{ A}; f\left(\frac{\pi}{\Omega}\right) = 0,5 \text{ A}.$$

3. Производя расчет по ряду Фурье с учетом первых пяти его членов, для момента $t_1 = \frac{\pi}{5\Omega}$ получаем:

$$f\left(\frac{\pi}{5\Omega}\right) = \frac{A}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{5} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{5} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{5} - \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{5} + \frac{1}{5} \sin \pi \right) = \frac{A}{\pi} (0,58779 - 0,47553 + 0,31702 - 0,14695 + 0) = 0,28233 \frac{A}{\pi} \approx 0,09A,$$

т. е. отличие результата от его истинного значения (из графика) составляет 10%.

4. Производя расчет по ряду Фурье с учетом первых пяти его членов, для момента $t = \frac{\pi}{10\Omega}$ получаем:

$$f\left(\frac{\pi}{10\Omega}\right) = \frac{A}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{10} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{5} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{10} - \frac{1}{4} \sin \frac{2\pi}{5} + \frac{1}{5} \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{A}{\pi} (0,30902 - 0,29390 + 0,26967 - 0,23776 + 0,20000) = 0,24703 \frac{A}{\pi} = 0,079A,$$

т. е. отличие от истинного значения равно 58%.

5. Повторяя тот же расчет по ряду Котельникова, получаем данные, сведенные в табл. ПЗ.15.

Таблица ПЗ.15

n	Отсчеты $f\left(\frac{n\pi}{5\Omega}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2} - n\pi\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - n\pi\right)$	$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - n\pi\right)}{\frac{\pi}{2} - n\pi}$	Сумманты	$f(t)$ как $\sum_{n=0}^{n+1}$
-4	-0,4A	+9π/2	+1	+2/9π	-0,028A	—
-3	-0,3A	+7π/2	-1	-2/7π	+0,027A	—
-2	-0,2A	+5π/2	+1	+2/5π	-0,025A	—
-1	-0,1A	+3π/2	-1	-2/3π	+0,021A	—
0	0	+π/2	+1	+2/π	0	—
+1	+0,1A	-π/2	-1	-2/π	+0,064A	0,064A
+2	+0,2A	-3π/2	+1	-2/3π	-0,042A	0,043A
+3	+0,3A	-5π/2	-1	+2/5π	+0,038A	0,056A
+4	+0,4A	-7π/2	+1	-2/7π	-0,036A	0,047A
+5	+0,5A	-9π/2	-1	+2/9π	+0,035A	0,054A

П3.5. Модуляция сигналов
Задача 14

Рассчитать мощность амплитудно-модулированного и однополосно-модулированного сигналов (выраженную через амплитуду несущего гармонического колебания) для случаев 80%-ной амплитудной модуляции одним, двумя, тремя и четырьмя звуковыми тонами, уровни которых одинаковы (случай *а*) и обратно пропорциональны частотам звуковых сигналов (случай *б*). Частоты модулирующих сигналов равны соответственно: $F_1=300$ гц; $F_2=400$ гц; $F_3=1000$ гц; $F_4=3400$ гц.

Решение

1. Коэффициенты глубины амплитудной модуляции для предусмотренных условиями задачи случаев с учетом формулы (6.14) $\sum_{k=1}^n m_k = M_{AM}$ получаются соответственно равными:

ными:

$$a_1, b_1 \quad m_{300} = 0,8;$$

$$a_2 \quad m_{300} = 0,4; \quad m_{400} = 0,4;$$

$$a_3 \quad m_{300} = 0,27; \quad m_{400} = 0,27; \quad m_{1000} = 0,26;$$

$$a_4 \quad m_{300} = 0,2; \quad m_{400} = 0,2; \quad m_{1000} = 0,2; \quad m_{3400} = 0,2;$$

$$b_2 \quad m_{300} = 0,46; \quad m_{400} = 0,34;$$

$$b_3 \quad m_{300} = 0,39; \quad m_{400} = 0,29; \quad m_{1000} = 0,12;$$

$$b_4 \quad m_{300} = 0,37; \quad m_{400} = 0,28; \quad m_{1000} = 0,11; \quad m_{3400} = 0,04.$$

2. Общая мощность, выделяемая амплитудно-модулированным сигналом, определяется по формуле (6.17),

$$\overline{a_{AM\Sigma}^2(t)} = \frac{A_0^2}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k^2 \right]. \text{ Результаты, полученные}$$

при подстановке соответствующих значений m_k , сведены в табл. П3.16.

Т а б л и ц а П 3.16

Вариант	Мощность	Вариант	Мощность
a_1, b_1	$0,660A_0^2$	b_2	$0,582A_0^2$
a_2	$0,580A_0^2$	b_3	$0,563A_0^2$
a_3	$0,553A_0^2$	b_4	$0,557A_0^2$
a_4	$0,540A_0^2$		

3. Общая мощность, выделяемая однополосно-модулированным сигналом, определяется частью формулы (6.17) и равна

$$\overline{a^2_{\text{ОБМ}}(t)} = \frac{A_0^2}{8} \sum_{k=1}^n m_k^2.$$

Результаты, полученные при подстановке соответствующих значений m_k , сведены в табл. ПЗ.17.

Т а б л и ц а ПЗ.17

Вариант	Мощность	Доля мощности АМ	Вариант	Мощность	Доля мощности АМ
a_1, b_1	$0,080A_0^2$	0,12	b_2	$0,041A_0^2$	0,07
a_2	$0,040A_0^2$	0,07	b_3	$0,031A_0^2$	0,06
a_3	$0,027A_0^2$	0,05	b_4	$0,029A_0^2$	0,05
a_4	$0,020A_0^2$	0,04			

Задача 15

Рассчитать полосы частот, занимаемые соответственно фазо- и частотно-модулированными сигналами, если модуляция производится звуковой частотой $F=3400$ гц. Для случая фазовой модуляции ее индекс $m_{\text{ФМ}}=22$, для случая частотной модуляции ее девиация равна 75 кгц. В частотные полосы должны быть включены все спектральные составляющие, величина которых превышает 1% амплитуды немодулированного колебания несущей частоты. Сравнить результаты, рассчитанные по точным и приближенным формулам.

Решение

1. Составляющие спектра фазомодулированного сигнала определяются по формуле (6.26). В соответствии с таблицами бесселевых функций этот спектр, выраженный в долях амплитуды немодулированной несущей, характеризуется цифрами, приведенными в табл. ПЗ.18.
- Следовательно, в полосу частот следует включить 27 гармоник низкочастотного сигнала, что соответствует ширине полосы $2 \times 91,8$ кгц = $183,6$ кгц.

Таблица П3.18

Спектральная составляющая, № п/п	Расстояние от несущей, кГц	Амплитуда	Спектральная составляющая, № п/п	Расстояние от несущей, кГц	Амплитуда
0		0,1206			
1	$\pm 3,4$	0,1172	16	$\pm 54,4$	0,1185
2	$\pm 6,8$	0,1313	17	$\pm 57,8$	0,0236
3	$\pm 10,2$	0,0933	18	$\pm 61,2$	0,1549
4	$\pm 13,6$	0,1567	19	$\pm 64,6$	0,2299
5	$\pm 17,0$	0,0363	20	$\pm 68,0$	0,2422
6	$\pm 20,4$	0,1732	21	$\pm 71,4$	0,2105
7	$\pm 23,8$	0,0582	22	$\pm 74,8$	0,1596
8	$\pm 27,2$	0,1362	23	$\pm 78,2$	0,1087
9	$\pm 30,6$	0,1573	24	$\pm 81,6$	0,0677
10	$\pm 34,0$	0,0075	25	$\pm 85,0$	0,0390
11	$\pm 37,4$	0,1641	26	$\pm 88,4$	0,0210
12	$\pm 40,8$	0,1566	27	$\pm 91,8$	0,0106
13	$\pm 44,2$	0,0067	28	$\pm 95,2$	0,0051
14	$\pm 47,6$	0,1487	29	$\pm 98,6$	0,0023
15	$\pm 51,0$	0,1959	30	$\pm 102,0$	0,0010

Согласно приближенной формуле (6.33),

$$k = 1 + m + \sqrt{m} = 1 + 22 + \sqrt{22} \approx 28,$$

т. е. ширина полосы равна $2 \times k \times 3,4 \text{ кГц} = 2 \times 28 \times 3,4 = 190,4 \text{ кГц}$. Различие результатов сводится к одной гармонике, т. е. составляет 6,8 кГц, или примерно 3,7% ширины полосы.

2. Для случая частотной модуляции, учитывая формулы (6.30) и (6.31), получаем: $m_{\text{чм}} = \frac{\Delta\omega_{\text{чм}}}{\Omega} = \frac{2\pi 75}{2\pi 3,4} \approx 22$. Следовательно, остается в силе предыдущий расчет.

Задача 16

Рассчитать мощность на выходе демодулятора, выраженную через пиковое напряжение немодулированного импульса, если на вход демодулятора поступает сигнал с

амплитудно-импульсной модуляцией синусоидальным напряжением с частотой 1000 гц и глубиной модуляции 80%, для случаев: а) когда демодуляция осуществляется выделением сообщения фильтром нижних частот; б) то же, с дополнительным удлинением импульсов; в) когда демодуляция осуществляется полосовым фильтром с последующим детектором. Для расчета пользоваться следующими показателями импульсной последовательности и аппаратуры: частота повторения импульсов 8 кгц, длительность импульса 6 мксек, коэффициент усиления фильтра нижних частот на частоте 1000 гц, а также совместный коэффициент усиления полосового фильтра и детектора — 0,9.

Решение

Случай а

Мощность на выходе демодулятора, выделяющего сообщение фильтром нижних частот, отнесенная к сопротивлению 1 ом, рассчитывается исходя из формулы (6.46) для выходного сигнала; следовательно, $\overline{u_{\text{вых}}^2(t)} = \frac{1}{2} U_0^2 \left(\frac{\tau}{T_{\text{п}}} \right)^2 m^2_{\text{лим}} K_{\phi}^2(\Omega)$. Согласно условиям задачи, $\left(\frac{\tau}{T_{\text{п}}} \right)^2 = [6 \cdot 10^{-6} \cdot 8 \cdot 10^3]^2 = 2,3 \cdot 10^{-3}$ и $\overline{u_{\text{вых}}^2(t)} = \frac{1}{2} \times U_0^2 \cdot 2,3 \cdot 10^{-3} \cdot 0,8^2 \cdot 0,9^2 = 0,6 \cdot 10^{-3} U_0^2$.

Случай б

Удлинение импульсов сводится к увеличению τ после разделения каналов. Это увеличение практически доводит τ до значения $\frac{T_{\text{п}}}{3}$, следовательно,

$$\left(\frac{\tau}{T_{\text{п}}} \right)^2_{\text{удл}} = 0,11 \quad \text{и} \quad \overline{u_{\text{вых}}^2(t)} = 29 \cdot 10^{-3} U_0^2.$$

Случай в

Мощность на выходе демодулятора, выделяющего сообщение полосовым фильтром со следующим за ним детектором, рассчитывается исходя из формулы (6.45); следовательно,

$$\begin{aligned} \overline{u_{\text{вых}}^2(t)} &= \left(\frac{2U_0}{r\pi} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{r\omega_{\text{п}}\tau}{2} \right) \frac{m_{\text{лим}}^2}{4} \cdot K_{\phi-\text{д}}(\Omega) = \\ &= U_0^2 \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi \cdot 8000 \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{2} \right) \cdot \frac{0,8^2}{4} \cdot 0,9^2 = 1,2 \cdot 10^{-3} U_0^2. \end{aligned}$$

Задача 17

Рассчитать предельно допустимую девиацию частоты повторения 8 кГц для случая частотно-импульсной модуляции низкочастотным сигналом с частотой 3,4 кГц, исходя из требований, во-первых, чтобы составляющие спектра первой гармоники частоты повторения, амплитуды которых превышают 1% немодулированной первой гармоники, не проникали в область низкочастотного спектра модулирующего сигнала; во-вторых, чтобы обеспечивалось действие шести каналов в предполагаемой системе при защитном интервале между канальными импульсами $\tau_3 = 1,5\Delta\tau_0$.

Решение

1. Низкочастотный спектр модулирующего сигнала, согласно условиям задачи, представляет собой одно гармоническое колебание на частоте 3,4 кГц с амплитудой, определяемой исходя из формулы (6.71) и равной $B_{\text{ч макс}} = U_0 \frac{\tau k S_0}{T_{\text{п}} \omega_{\text{п}}}$. Так как согласно формуле (6.73) $k S_0 = \Delta\omega_{\text{п}}$, то очевидна выгода увеличения $\Delta\omega_{\text{п}}$.

2. На частотном расстоянии между модулирующим сигналом 3,4 кГц и первой гармоникой частоты повторения 8 кГц, которое составляет 4,6 кГц, может разместиться только одна боковая частота, так как $4,6 \text{ кГц} : 3,4 \text{ кГц} = 1,3$. Следовательно, индекс модуляции должен быть меньше 0,5. Принимая $\Delta\varphi = 0,4$, из формулы (6.75) получаем допустимую девиацию частоты:

$$\Delta\omega_{\text{п}} = \Delta\varphi\Omega = 0,4 \cdot 2\pi \cdot 3400 = 2\pi 1360.$$

3. На рис. П3.15 представлено размещение импульсов шести каналов в системе с ВРК. Из рисунка следует, что

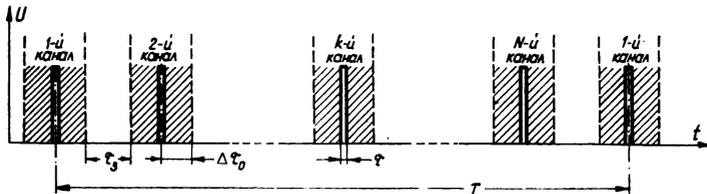


Рис. П3.15. Последовательность канальных импульсов.

$T = (2\Delta\tau_0 + \tau_3)N$. В рамках данной задачи последняя зависимость сводится к $\Delta\tau_0 = \frac{T}{3,5N} = \frac{1}{8000 \cdot 3,5 \cdot 6} = 6 \cdot 10^{-6}$ сек.

Пересчитывая допустимую девиацию импульсов на допустимую девиацию частоты по формуле (6.74), получаем: $\Delta\omega_{\text{до}} = \Delta\tau_0 \omega_{\text{д}} \Omega = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 2\pi \cdot 3,4 \cdot 10^3 = 2\pi \cdot 1025$.

Из результата следует, что основным фактором, ограничивающим девиацию в нашем случае, является заданное количество подлежащих размещению каналов.

П3.6. Каналы передачи информации

Задача 18

Определить необходимую полосу частот канала связи и его пропускную способность для передачи дискретных сигналов (последовательности двоичных знаков — импульсов) способом частотной манипуляции (телеграфии) со скоростью 200 бод (т. е. 200 $\frac{\text{бит}}{\text{сек}}$) и девиацией частоты 100 гц на несущей частоте 1750 гц, суммарная нестабильность которой 12×10^{-3} . Отношение мощности сигнала к удельной мощности шума (на 1 гц) при расчете принять равным 6500.

Решение

1. Необходимая полоса частот канала связи определяется эффективным спектром частотной модуляции несущей прямоугольными импульсами, соответствующими посылкам «0» и «1».

Скорость передачи 200 бод соответствует в предельном случае повторению импульсов длительностью $\tau = 0,005$ сек с периодом $T = 0,01$ сек. Исходя из формул (6.30) и (6.31)

$$\text{определяем индекс угловой модуляции: } m_{\text{чм}} = \frac{\Delta\omega_{\text{чм}}}{\Omega} = \frac{2\pi 100}{2\pi 100} = 1,0. \text{ Этому случаю соответствует количество учи-}$$

тываемых пар составляющих спектра, которые получаем по формуле (6.33):

$$k = 1 + m + \sqrt{m} = 1 + 1 + \sqrt{1} = 3.$$

Ширина полосы канала ΔF для этого случая с учетом нестабильности центральной частоты получается равной

$$\Delta F = 2k \frac{\Omega}{2\pi} + 2 \cdot 12 \cdot 10^{-3} f_0 = 2 \cdot 3 \cdot 100 + 42 = 642 \text{ гц},$$

что соответствует $1750 \pm \frac{642}{2}$ гц, или полосе от 1429 до 2071 гц.

2. Пропускная способность канала определяется по формуле Шеннона (7.9), применение которой требует знания величины отношения $\frac{P}{N}$. Для рассчитываемого случая $\frac{P}{N} = 6500 : 642 = 10$; следовательно, $C = F_{\text{макс}} \log_2 \left(1 + \frac{P}{N} \right) = 642 \log_2 (1 + 10) = 2220 \left[\frac{\text{бит}}{\text{сек}} \right]$.

П3.7. Помехоустойчивость

Задача 19

Определить помехоустойчивость АИМ, ОШИМ и ФИМ, когда несущей является последовательность трапециевидальных импульсов. Параметры импульсов приведены на рис. П3.16.

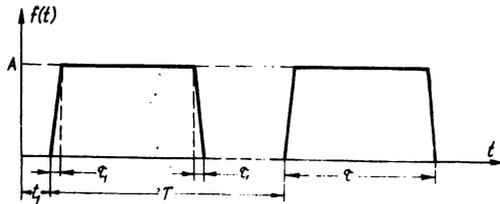


Рис. П3.16. Последовательность трапециевидальных импульсов.

Решение

1. Представленный на рис. ПЗ.16 модулируемый импульс может быть выражен математической функцией времени

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (0 < t < t_1); \\ + \frac{A}{\tau_1}(t - t_1) & (t_1 \leq t < t_1 + \tau_1); \\ + A & (t_1 + \tau_1 \leq t < t_1 + \tau - \tau_1); \\ - \frac{A}{\tau_1}[t - (t_1 + \tau)] & (t_1 + \tau - \tau_1 \leq t < t_1 + \tau); \\ 0 & (t_1 + \tau \leq t < t_1 + T). \end{cases}$$

2. Согласно условиям задачи, модулируемыми параметрами переносчика являются соответственно: при АИМ $a_1=A$, при ОШИМ $a_2=\tau$, при ФИМ $a_3=t_1$.

3. Для определения матрицы элементов b_{ki} необходимо знание частных производных по модулируемым параметрам переносчика:

$$\frac{\partial f(t)}{\partial a_1} = \frac{\partial f(t)}{\partial A} = \begin{cases} \frac{t - t_1}{\tau_1} & (t_1 \leq t < t_1 + \tau_1); \\ 1 & (t_1 + \tau_1 \leq t < t_1 + \tau - \tau_1); \\ \frac{(t_1 + \tau - t)}{\tau_1} & (t_1 + \tau - \tau_1 \leq t < t_1 + \tau); \end{cases}$$

$$\frac{\partial f(t)}{\partial a_2} = \frac{\partial f(t)}{\partial \tau} = \frac{A}{\tau_1} \quad (t_1 + \tau - \tau_1 \leq t < t_1 + \tau);$$

$$\frac{\partial f(t)}{\partial a_3} = \frac{\partial f(t)}{\partial t_1} = \begin{cases} - \frac{A}{\tau_1} & (t_1 \leq t < t_1 + \tau_1); \\ + \frac{A}{\tau_1} & (t_1 + \tau - \tau_1 \leq t < t_1 + \tau). \end{cases}$$

4. Элементы матрицы b_{ki} определяются по формуле

$$(8.15): \quad b_{ki} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f(t)}{\partial a_k} \cdot \frac{\partial f(t)}{\partial a_i} dt. \text{ Отсюда отдельные члены}$$

имеют следующий вид:

$$b_{11} = \frac{1}{T} \left[\int_{t_1}^{t_1 + \tau_1} \left(\frac{t - t_1}{\tau_1} \right)^2 dt + \int_{t_1 + \tau_1}^{t_1 + \tau - \tau_1} dt + \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_1+\tau-\tau_1}^{t_1+\tau} \left(\frac{(t_1+\tau-t)^2}{\tau_1} \right) dt \Big] = \frac{\tau}{T} - \frac{4\tau_1}{3T}; \\
b_{12} = b_{21} &= \frac{1}{T} \left[\int_{t_1+\tau-\tau_1}^{t_1+\tau} \frac{t_1+\tau-t}{\tau_1} \cdot \frac{A}{\tau_1} dt \right] = \frac{A}{2T}; \\
b_{13} = b_{31} &= \frac{1}{T} \left[\int_{t_1}^{t_1+\tau_1} \frac{t-t_1}{\tau_1} \cdot \frac{(-A)}{\tau_1} dt + \right. \\
& \left. + \int_{t_1+\tau-\tau_1}^{t_1+\tau} \frac{t_1+\tau-t}{\tau_1} \cdot \frac{A}{\tau_1} dt \right] = 0; \\
b_{22} &= \frac{1}{T} \left[\int_{t_1+\tau-\tau_1}^{t_1+\tau} \left(\frac{A}{\tau_1} \right)^2 dt \right] = \frac{A^2}{T\tau_1}; \\
b_{23} = b_{32} &= \frac{1}{T} \left[\int_{t_1+\tau-\tau_1}^{t_1+\tau} \frac{A}{\tau_1} \cdot \frac{A}{\tau_1} dt \right] = \frac{A^2}{T\tau_1}; \\
b_{33} &= \frac{1}{T} \left[\int_{t_1}^{t_1+\tau_1} \left(-\frac{A}{\tau_1} \right)^2 dt + \int_{t_1+\tau-\tau_1}^{t_1+\tau} \left(\frac{A}{\tau_1} \right)^2 dt \right] = \frac{2A^2}{T\tau_1}.
\end{aligned}$$

5. Матрица b_{ki} (учитывая, что $\frac{\tau}{\tau_1} \gg 1$) выражается как

$$b_{ki} = \begin{pmatrix} \frac{\tau}{T}; & \frac{A}{2T}; & 0; \\ \frac{A}{2T}; & \frac{A^2}{T\tau_1}; & \frac{A^2}{T\tau_1}; \\ 0; & \frac{A^2}{T\tau_1}; & \frac{2A^2}{T\tau_1}. \end{pmatrix}$$

6. Для определения вспомогательной величины $y_h(t)$ [формула (8.22)], необходимой для расчета паразитной модуляции (помехи) каждого из параметров, необходимо

знание определителя матрицы и алгебраических дополнений ее элементов. Определитель матрицы может быть записан по методу Сарруса как

$$D = \frac{\tau}{T} \cdot \frac{A^2}{T\tau_1} \cdot \frac{2A^2}{T\tau_1} - \frac{\tau}{T} \cdot \frac{A^2}{T\tau_1} \cdot \frac{A^2}{T\tau_1} - \frac{A}{2T} \cdot \frac{A}{2T} \cdot \frac{2A^2}{T\tau_1};$$

$$D = \frac{A^4\tau}{T^3\tau_1^2} \left(1 - \frac{\tau_1}{2\tau}\right) \approx \frac{A^4\tau}{T^3\tau_1^2}.$$

Алгебраические дополнения (учитывая, что $\frac{\tau}{\tau_1} \gg 1$) могут быть записаны следующим образом:

$$D_{11} = (-1)^2 \left[\frac{2A^4}{T^2\tau_1^2} - \frac{A^4}{T^2\tau_1^2} \right] = \frac{+A^4}{T^2\tau_1^2}; \quad D_{12} = \frac{-A^3}{T^2\tau_1};$$

$$D_{13} = \frac{+A^3}{2T^2\tau_1}; \quad D_{21} = \frac{-A^3}{T^2\tau_1}; \quad D_{22} = \frac{2A^2\tau}{T^2\tau_1}; \quad D_{23} = \frac{-A^2\tau}{T^2\tau_1};$$

$$D_{31} = \frac{+A^3}{2T^2\tau_1}; \quad D_{32} = \frac{-A^2\tau}{T^2\tau_1};$$

$$D_{33} = (-1)^6 \left[\frac{A^2\tau}{T^2\tau_1} - \frac{A^2}{4T^2} \right] \approx \frac{+A^2\tau}{T^2\tau_1}.$$

7. Вспомогательная функция $y_k(t)$ определяется по формуле (8.22) как $y_k(t) = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^n D_{ki} \frac{\partial f(t)}{\partial a_i}$, что дает

$$y_1(t) = \frac{T}{\tau} \left[\left| \frac{t-t_1}{\tau_1} \right|_{t_1}^{t_1+\tau_1} + \left| 1 \right|_{t_1+\tau_1}^{t_1+\tau-\tau_1} + \left| \frac{t_1+\tau-t}{\tau_1} \right|_{t_1+\tau-\tau_1}^{t_1+\tau} \right] - \frac{T\tau_1}{A\tau} \left[\left| \frac{A}{\tau_1} \right|_{t_1+\tau-\tau_1}^{t_1+\tau} \right] + \frac{T\tau_1}{2A\tau} \left[\left| \frac{-A}{\tau_1} \right|_{t_1}^{t_1+\tau_1} + \left| \frac{A}{\tau_1} \right|_{t_1+\tau-\tau_1}^{t_1+\tau} \right];$$

$$y_2(t) = \frac{-T\tau_1}{A\tau} \left[\left| \frac{t-t_1}{\tau_1} \right|_{t_1}^{t_1+\tau_1} + \left| 1 \right|_{t_1+\tau_1}^{t_1+\tau-\tau_1} + \left| \frac{t_1+\tau-t}{\tau_1} \right|_{t_1+\tau-\tau_1}^{t_1+\tau} \right] + \frac{2T\tau_1}{A^2} \left[\left| \frac{A}{\tau_1} \right|_{t_1+\tau-\tau_1}^{t_1+\tau} \right] - \frac{T\tau_1}{A^2} \left[\left| \frac{-A}{\tau_1} \right|_{t_1}^{t_1+\tau_1} + \left| \frac{A}{\tau_1} \right|_{t_1+\tau-\tau_1}^{t_1+\tau} \right];$$

$$y_3(t) = \frac{T\tau_1}{2A\tau} \left[\left| \frac{t-t_1}{\tau_1} \right|_{t_1}^{t_1+\tau_1} + \left| 1 \right|_{t_1+\tau_1}^{t_1+\tau-\tau_1} + \left| \frac{t_1+\tau-t}{\tau_1} \right|_{t_1+\tau-\tau_1}^{t_1+\tau} \right] - \frac{T\tau_1}{A^2} \left[\left| \frac{A}{\tau_1} \right|_{t_1+\tau-\tau_1}^{t_1+\tau} \right] + \frac{T\tau_1}{A^2} \left[\left| \frac{-A}{\tau_1} \right|_{t_1}^{t_1+\tau_1} + \left| \frac{A}{\tau_1} \right|_{t_1+\tau-\tau_1}^{t_1+\tau} \right].$$

8. Мощность вспомогательной функции P_{y_h} определяется по формуле (8.26) как $P_{y_h} = \frac{1}{T} \int_0^T y_h^2(t) dt$. Отсюда следует:

$$P_{v1} = \frac{1}{T} \left\{ \frac{T^2}{\tau^2} \int_{t_1}^{t_1+\tau_1} \left[\frac{t-t_1}{\tau_1} - \frac{1}{2} \right]^2 dt + \frac{T^2}{\tau^2} \int_{t_1+\tau_1}^{t_1+\tau-\tau_1} dt + \frac{T^2}{\tau^2 \tau_1^2} \int_{t_1+\tau-\tau_1}^{t_1+\tau} \left[t_1+\tau-t - \frac{\tau_1}{2} \right]^2 dt \right\};$$

$$P_{v1} = \frac{1}{T} \left[\frac{T^2}{\tau} \left(1 - \frac{11}{6} \frac{\tau_1}{\tau} \right) \right] \approx \frac{T}{\tau};$$

$$P_{v2} = \frac{1}{T} \left\{ \frac{T^2}{A^2} \int_{t_1}^{t_1+\tau_1} \left[\frac{t_1-t}{\tau} + 1 \right]^2 dt + \frac{T^2 \tau_1^2}{A^2 \tau} \int_{t_1+\tau_1}^{t_1+\tau-\tau_1} dt + \frac{T^2}{A^2} \int_{t_1+\tau-\tau_1}^{t_1+\tau} \left[\frac{t-t_1}{\tau} \right]^2 dt \right\};$$

$$P_{v2} = \frac{1}{T} \left[\frac{T^2 \tau_1}{A^2} \left(2 - \frac{\tau_1}{\tau} - \frac{4}{3} \frac{\tau_1^2}{\tau^2} \right) \right] \approx \frac{2T\tau_1}{A^2};$$

$$P_{v3} = \frac{1}{T} \left\{ \frac{T^2}{A^2} \int_{t_1}^{t_1+\tau_1} \left[\frac{t-t_1}{2\tau} - 1 \right]^2 dt + \frac{T^2 \tau_1^2}{4A^2 \tau^2} \int_{t_1+\tau_1}^{t_1+\tau-\tau_1} dt + \frac{T^2}{A^2} \int_{t_1+\tau-\tau_1}^{t_1+\tau} \left[\frac{t_1-t}{2\tau} + \frac{1}{2} \right]^2 dt \right\};$$

$$P_{\nu 3} = \frac{1}{T} \left[\frac{T^2 \tau_1}{A^2} \left(1 - \frac{\tau_1}{4\tau} - \frac{1\tau_1^2}{3\tau^2} \right) \right] \approx \frac{T\tau_1}{A^2}.$$

9. Мощность помехи определяется по формуле (8.27) как $(\delta a_k)^2 = P_{\nu k} N_0 F$. Отсюда

$$\overline{(\delta a_1)^2} = \frac{TN_0 F}{\tau} = \frac{N_0}{2\tau};$$

$$\overline{(\delta a_2)^2} = \frac{2T\tau_1 N_0 F}{A^2} = \frac{N_0 \tau_1}{A^2};$$

$$\overline{(\delta a_3)^2} = \frac{T\tau_1 N_0 F}{A^2} = \frac{N_0 \tau_1}{2A^2}.$$

10. Значение отношения сигнала/помеха определяется по формуле (8.8) как $q_k = \frac{(\Delta a_k)^2}{(\delta a_k)^2}$, что, с учетом допустимых значений $\Delta a_1 = A$, $\Delta a_2 = \frac{T}{2n} - \frac{\tau}{2}$, $\Delta a_3 = \frac{T}{2n} - \frac{\tau}{2}$ (где n — количество каналов, размещенных на промежутке времени T), дает

$$q_1 = \frac{A^2 2\tau}{N_0}; \quad q_2 = \frac{(T - n\tau)^2 A^2}{4n^2 N_0 \tau_1}; \quad q_3 = \frac{(T - n\tau)^2 A^2}{2n^2 N_0 \tau_1}.$$

11. Соотношение значений помехоустойчивости для рассматриваемых случаев получается равным: $q_{\text{лим}} : q_{\text{шим}} : q_{\text{фим}} = 1 : \frac{(T - n\tau)^2}{8n^2 \tau \tau_1} : \frac{(T - n\tau)^2}{4n^2 \tau \tau_1}$.

Помехоустойчивость ОШИМ и ФИМ растет с ростом начальной скважности $\left(\frac{T}{\tau}\right)$ последовательности импульсов и крутизны фронтов импульсов. Увеличение обоих этих параметров, в свою очередь, требует увеличения полосы пропускания.

П3.8. Многоканальные системы

Задача 20

Произвести сопоставительный расчет вместимости телефонных каналов связи в полосу частот от 564 до 804 кГц при использовании односторонней амплитудной модуляции

(ОБМ) и амплитудно-импульсной модуляции (АИМ). При расчете следует считаться с частотным расстоянием между поднесущими 4 кгц и с величиной защитного интервала между импульсами, равной длительности импульса.

Решение

1. В случае ОБМ количество каналов, которые можно разместить в отведенной полосе, следует из отношения ширины частотной полосы к расстоянию поднесущих, т. е.

$$n = \frac{804 - 564}{4} = 60 \text{ [каналов]}.$$

2. В случае АИМ отведенная полоса пропускания лимитирует длительность импульсов. Пропускание первого «лепестка» спектра импульсной последовательности выполняется для импульсов продолжительностью не менее $\tau =$

$$= \frac{1}{804 - 564} = 1/240 \approx 4 \text{ [мксек]}.$$

Согласно требованию, изложенному в условии задачи, время, отводимое на передачу по одному каналу, состоит из длительности импульса и защитного интервала, т. е.

$$\tau_k = \tau + \tau_a = 2\tau = 8 \text{ [мксек]}.$$

Для передачи высшей частоты телефонного канала, т. е. $3,4 \text{ кгц}$, по теореме Котельникова допустим временной интервал между импульсами одного канала, равный

$$T < \frac{1}{2F} = \frac{1}{6800} \approx 147 \text{ [мксек]}.$$

Реальные возможности осуществления фильтров практически позволяют принимать $T = 125 \text{ мксек}$.

Количество каналов, которое может быть размещено в этом временном промежутке, равно $n = 125/8 \approx 15$ [каналов], т. е. в 4 раза меньше, чем при использовании частотного разделения каналов с ОБМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М., «Наука», 1965.
2. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. М., «Мир», 1971.
3. Берлекэмп Э. Алгебраическая теория кодирования. М., «Мир», 1971.
4. Бессонов Л. А. Линейные электрические цепи. М., «Высшая школа», 1968.
5. Большаков И. А., Гуткин Л. С., Левин Б. Р., Стратонович Р. Л. Математические основы современной радиоэлектроники. М., «Советское радио», 1968.
6. Борисов Ю. П., Пеннин П. И. Основы многоканальной передачи информации. М., «Связь», 1967.
7. Бородин Л. Ф. Введение в теорию помехоустойчивого кодирования. М., «Советское радио», 1968.
8. Варакин Л. Е. Теория сложных сигналов. М., «Советское радио», 1970.
9. Возенкрафт Дж., Джекобс И. Теоретические основы техники связи. М., «Мир», 1969.
10. Гойхман Э. Ш., Лосев Ю. И. Передача информации в автоматизированных системах управления. М., «Связь», 1971.
11. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. М., «Советское радио», 1967.
12. Горянов В. Т., Журавлев А. Г., Тихонов В. И. Примеры и задачи по статистической радиотехнике. М., «Советское радио», 1970.
13. Гуд Г. Х., Макол Р. Э. Системотехника. М., «Советское радио», 1962.
14. Гуткин Л. С. Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. М., «Госэнергиздат», 1961.
15. Гуткин Л. С., Лебедев В. Л., Сифоров В. И. Радиоприемные устройства. Ч. 2. М., «Советское радио», 1963.
16. Дадаев Ю. Г. Арифметические коды, исправляющие ошибки. М., «Советское радио», 1969.
17. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М., «Наука», 1966.
18. Заездный А. М. Основы расчетов по статистической радиотехнике. М., «Связь», 1969.

19. Зиновьев А. Л., Филиппов Л. И. Введение в теорию сигналов и цепей. М., «Высшая школа», 1968.
20. Зюко А. Г. Элементы теории передачи информации. Киев, «Техника», 1969.
21. Каневский З. М. Вероятностные задачи в радиотехнике. М., «Энергия», 1966.
22. Кловский Д. Д. Передача дискретных сообщений по радиоканалам. М., «Связь», 1969.
23. Ключев Н. И. Информационные основы передачи сообщений. М., «Советское радио», 1966.
24. Колесник В. Д., Мирончиков Е. Т. Декодирование циклических кодов. М., «Связь», 1968.
25. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике, М., «Наука», 1968.
26. Куликов Е. И. Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех. М., «Советское радио», 1969.
27. Куликовский А. А. Справочник по радиоэлектронике, т. 1. М., «Энергия», 1967.
28. Латхи Б. Р. Системы передачи информации. М., «Связь», 1971.
29. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Ч. 1, 2. М., «Советское радио», 1968, 1969.
30. Маркюс Ж. Дискретизация и квантование. М., «Энергия», 1969.
31. Мартынов Ю. М. Обработка информации в системах передачи данных. М., «Связь», 1969.
32. Назаров М. В., Кувшинов Б. И., Попов О. В. Теория передачи сигналов. М., «Связь», 1970.
33. Петрович Н. Т., Размахин М. К. Системы связи с шумоподобными сигналами. М., «Советское радио», 1969.
34. Пирс Дж. Символы, сигналы, шумы. М., «Мир», 1967.
35. Смольяников В. М., Филиппов Л. И. Синтез оптимальных радиоприемников дискретных сигналов. М., «Высшая школа», 1969.
36. Солодов А. В. Теория информации и ее применение к задачам автоматического управления и контроля. М., «Наука», 1967.
37. Стейн С., Джонс Дж. Принципы современной теории связи и их применение к передаче дискретных сообщений. М., «Связь», 1971.
38. Суприн Б. А. Первичные коды. М., «Связь», 1970.
39. Темников Ф. Е., Афонин В. А., Дмитриев В. И. Теоретические основы информационной техники. М., «Энергия», 1971.
40. Фаддеева В. Н., Габурин М. К. Таблицы функций Бесселя целых номеров. М.—Л., Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1950.
41. Фано Р. Передача информации. Статистическая теория связи. М., «Мир», 1965.
42. Фельдбаум А. А., Бутковский А. Г. Методы теории автоматического управления. М., «Наука», 1971.
43. Финк Л. М. Теория передачи дискретных сообщений. М., «Советское радио», 1970.
44. Фурин Д. Каскадные коды. М., «Мир», 1970.

45. Харкевич А. А. Борьба с помехами. М., ГИФМЛ, 1963.
46. Шварцман В. О., Зубовский Л. И., Пугач А. Б., Беркман Н. А. Каналы передачи данных. М., «Связь», 1970.
47. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М., ИЛ, 1963.
48. Buśko B. Vademecum zastosowań elektroniki. Warszawa, Wydawnictwo Ministerstwa obrony narodowej, 1966.
49. Hütte. Des Ingenieurs Taschenbuch Fernmeldetechnik. Berlin-München. Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, 1962.
50. Raisbeck G. Informationstheorie. Berlin, Akademie-Verlag, 1970.
51. Seidler J. Optimierung informationsübertragender Systeme. Berlin, VEB Verlag Technik, 1971.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- абонент 9
- адресат 9
- амплитуда комплексная 65
- антенна 6
 - направленного действия 11
- аппарат телеграфный 5
- бит 15
- блок двенадцатиканальной группы 157
- борьба с помехами 11
- вектор исправляющий 45
 - кодовый 41
 - нулевой 43
 - ошибки 36
- величина случайная 72
- верность 126
- вероятности букв алфавита 189
- вероятность обратная 137
 - ошибки 40, 126, 137
 - перемодуляции 161
 - условная 142
- видеоусилитель 173
- волны электромагнитные 6
- время действия канала 122
- выражение спектральное 63
- генератор меняющейся частоты 156
 - поднесущей частоты 154, 169
 - сообщения 150
 - тактовой частоты 156
- группа кодовая 29
 - универсальная 157
- дальность передачи 125
- датчик 154, 168
- девиация импульсов 108
 - частоты 95, 160
 - — повторения 108
- декодер 9
- демодулятор канальный 156
- демодуляция 101, 109, 170
- детектор 102
- дешифратор 40
- диапазон динамический 122
 - уровней 122
- диод 6
- дискретизация 82
- дисперсия 181
- дит 15
- длительность выброса 167
 - сигнала 122
- дополнение алгебраическое 130
- единица двоичная 15
 - количества информации 15
- емкость информационная 27
 - канала связи 122
- задержка сигнала 123
- закон распределения биномиаль-ный 186
 - — дифференциальный 180
 - — интегральный 179
 - — нормальный 184
 - — Пуассона 187
 - — равномерный 182, 185
 - — Рэлея 184
 - — экспоненциальный 183
- значение выборочное 72
- значность кода 34, 39
- избыточность 21
- импульсы каналные 169
- индекс временно-импульсной модуляции 108
 - угловой модуляции 92, 160
 - частотной манипуляции 115
- интеграл вероятностей ошибок 163
- интервал автокорреляции 76
- информативность 16
- информация 8
- искажения групповые 177
 - демодуляционные 170
 - зависимые 170
 - интерференционные 168
 - комбинационные 171
 - линейные 170

- модуляционные 170
- независимые 164
- нелинейные 171
- перекрестные 165, 170
- — второго рода 173
- — первого рода 173
- переходные 170
- частотные 170
- исправление ошибок 35
- источник информации 9
- помех 9
- канал групповой 150—151
- дуплексный 175
- обратный 175
- связи 9
- телефонный 7
- каскад разностный 136
- совпадения 112
- квантование 85
- код 29
- блочный 40
- Бодо 33
- двоичный 29
- избыточный 34
- Морзе 33, 194
- непрерывный 54
- неравномерный 30
- первичный 33
- равномерный 30
- разделимый 41
- рекуррентный 41
- систематический 42
- стандартный 34
- Фэно 30
- Хагельбаргера 54
- циклический 47
- кодер 9
- кодирование 9
- оптимальное 30
- колебание гармоническое 59
- монохроматическое 59
- колебания сопряженные 72
- количество информации 14
- комбинаторика 178
- комбинация кодовая 30
- — укороченная 49
- коммутатор синхронный 55
- компонента спектра 99, 105, 108, 110
- компрессия сигнала 161
- коррелятор 137
- коэффициент весовой 139
- глубины модуляции 160
- корреляции 137
- следования импульсов 172
- широтной модуляции 104
- кратность ошибки 34
- критерий верности 127
- идеального наблюдателя 139
- максимального отношения сигнал/помеха 134
- минимального среднего риска 139
- минимальной взвешенной вероятности ошибки 139
- — полной вероятности ошибки 139
- — среднеквадратичной ошибки 136
- Неймана—Пирсона 139
- оптимальности 134
- сходимости 61
- линия задержки 76, 123, 136
- кабельная 7
- передачи 157
- приема 157
- связи 9, 151
- спектральная 59
- фидерная 168
- манипуляция 114
- амплитудная 114
- фазовая 115
- — относительная 115
- частотная 114
- матрица 130
- диагональная 43
- расстояний 38
- контрольная 44
- проверочная 44
- производящая 43, 48
- метод вариационного исчисления 135
- n -грамм 33
- множителей Лагранжа 20
- приема оптимальный 134
- сравнения и вычитания 113
- статистический 173
- момент распределения 180
- центральный 181
- минор 130
- множитель Лагранжа 20
- модель системы связи 8
- модуль амплитуды 64
- коэффициента передачи 101
- спектральной плотности 68
- модулятор 154, 169
- модуляция 87
- амплитудная 87
- амплитудно-импульсная 97

- временно-импульсная 107
- дельта 116
- импульсная 87
- кодово-импульсная 111
- односторонняя 91
- паразитная 127
- угловая 92
- фазовая 92
- фазоимпульсная 107
- частотная 94
- частотно-импульсная 107, 109
- широтно-импульсная 102
- мощность флуктуаций средняя 181
- мультивибратор квантования 112
- нагрузка допустимая 122
- надежность обнаружения 144
- неопределенность 18
- нит 15
- номерабирающий 6
- носитель информации 87
- область неопределенности 40
- обнаружение бинарное 138
- обнаружитель 140
- объем сигнала 122
- огнивающая амплитуд 68
 - гармоник 66
 - спектра 68
- ограничение по минимуму 174
- ограничитель амплитудный 167
- ожидание математическое 180
- оператор 150
- определить матрицы 130
- основание кода 29
- отклонение среднеквадратичное 181
- отношение сигнал/помеха 128
- отображение оригинала 69
- отражение сигнала 168
- отсчет 85
- ошибка 34
- ошибки взаимонезависимые 37
 - пакетные 38
- пара преобразований Гильберта 72
 - — Лапласа 69
 - — Фурье 65
- передатчик 87, 155, 170
 - каналный 150
- передача данных 175
 - изображений 6
- перемодуляция 161
- переносчик 87, 155
- перестановка циклическая 47
- перестановки 178
- период повторения 156
 - следования 98
- перфолента 5
- пик-фактор 117
- плотность амплитуд 68
 - вероятностей 180
 - спектральная 68
 - — мощности помех 121
 - — энергии сигнала 70
- показатели кода 43
- полином генераторный 48, 199
 - проверочный 49
 - производящий 47
- полоса пропускания 70, 122
 - частот 28, 96
 - — эффективная 171
- получатель информации 9
- помеха квантования 86
- помехи 9
- помехоустойчивость 126
- последовательность импульсов 98
 - исправляющая 55
- потеря верности 146
- правило Лопитала 18
- превышение сигнала над помехой 122
- преобразование Гильберта 72
 - Лапласа 69
 - Фурье 68
- частоты многократное 156
- преобразователь информации 150
 - передачи 158
 - приема 159
 - частоты 156
- приемник 137, 170
 - идеальный 137
 - линейного сигнала 151
- принцип максимальной обратной вероятности 137
- приращение амплитуд паразитное 173
- проверка на четность 45
- произведение скалярное 45
- производительность источника 28
- промежуток защитный 58
- пространство выборочное 72
 - многомерное 152
- процесс марковский 74
 - нестационарный 73
 - неэргодический 73
 - переходный 173
 - случайный 72
 - стационарный 73
 - эргодический 73
- равенство Персеваля 70

- радиовещание 6
- радиотелеграф 6
- радиотелефон 6
- разговоры перекрестные 173
- разделение каналов временное 168
 - частотное 153
- размещения 178
- распределение вероятностей 137
 - мощности 66
 - энергии 70
- распределитель импульсов 169
 - каналов 156
- расстояние кодовое 39
 - кодовых комбинаций 38
 - хеммингово 39
- реализация случайного процесса 179
- регистр k -ступенный 50
 - $(n-k)$ -ступенный 51
 - сдвигающий 49
- ряд ортогональный 61
 - Фурье 62
- связь многоканальная 152
 - обратная 50, 175
- сдвиг фронта импульса 173
- селектор 151
- сигнал 8
 - бинарный 139
 - детерминированный 59
 - дискретный 60
 - запроса 176, 177
 - канальный 150
 - качающейся частоты 147
 - линейный 150
 - модулируемый 87
 - модулирующий 87
 - непериодический 67
 - не полностью известный 145
 - непрерывный 60
 - периодический 60
 - сложный 87
 - случайный 72
 - точно известный 141
- символ 15
 - информационный 41
 - контрольный 41, 43
 - стирания 40
- синхронизатор 169
- система многоканальная 149
 - передачи информации 5, 8
 - — цифровой информации 175
 - радиотелеметрическая 153, 168
 - с временным разделением каналов 168
 - с информационной обратной связью 175
 - с комбинированной обратной связью 175
 - с непрерывной передачей информации 176
 - с ожиданием решающего сигнала 176
 - с переспросом 176
 - с решающей обратной связью 175
 - с частотным разделением каналов 153
 - счисления 29
 - телекоммуникационных спутников 7
 - телефонии многоканальной 156
- согласование сигнала с каналом 123
- сообщение 8
 - бинарное 20
 - дискретное 17, 137
 - канальное 150
 - линейное 150
 - многоканальное 150
 - непрерывное 21
- сочетания 178
- спектр 59
 - двенадцатиканальный 157
 - дискретный 63
 - линейчатый 63
 - сплошной 68
 - энергетический 79
- способ кодирования 112
 - совмещенный 113
- способность исправляющая кода 41
 - пропускная канала 119
- спутник «подвижный» 7
 - «стационарный» 7
- степень неожиданности сообщения 14
- степень квантования 113
- схема многоканальной системы 149
 - многоканального приема 146
 - сравнения 138
- таблица кодовая 42
 - проверка 45
- телеграф 5
- телефон 5
- теорема кодирования 33
 - Котельникова 82
 - отсчетов 82
- теория вероятностей 8, 14

- информации 8
- случайных процессов 8
- техника связи 8
- тракт групповой 164
- общий 164
- триод 6
- уплотнение каналов 156
- уравнение Эйлера 23
- уровень квантования 86
- линейной модуляции 160
- ограничения 166
- разрешенный 85
- сигнала 125
- условия Дирихле 61
- Коши—Римана 71
- усреднение фазы 146
- устройство декодирующее 52, 55
- кодирующее 49, 55, 112, 116
- пишущее 155, 170
- прямого преобразования 112
- разделения каналов 151
- разделительное 157
- распределительное 170
- решающее 40, 146
- сравнивающее 138
- суммирующее 150, 155, 169
- счетное 113
- считывающее 113
- уплотнения каналов 150
- фаза 64
- фильтр квазиоптимальный 136
- нижних частот 101
- оптимальный 135
- полосовой 102, 155
- сглаживающий 156
- форма записи комплексная 66
- формирование прямоугольных им-
пульсов 169
- формула Шеннона 120
- Эйлера 64
- формулы Винера—Хинчина 79
- функция автокорреляционная 74,
181
- аналитическая 71
- базовая 61
- Бесселя 93
- весовая 61, 146
- взаимной корреляции 77
- времени 59
- голоморфная 71
- интерполяционная 85
- Лапласа 163
- линейно-независимая 61
- моментная 180, 181
- нормированная модулирую-
щая 89
- нечетная 63
- ортогональная 61
- ортонормированная 61
- отсчетов 85
- передаточная 134
- плотности вероятностей 21, 180
- правдоподобия 142
- распределения 179
- — интегральная 179
- решетчатая 82
- сообщения 101
- спектральная 59, 68
- четная 63
- характеристика амплитудная 161
- амплитудно-частотная 170
- временная 180
- обнаружения 140
- ограничителя 165
- рабочая 140
- спектральная 68, 135
- фазовая 164
- частотная 164—165
- частота боковая 89
- дискретизации 84
- комплексная 69
- несущая 88, 155
- отрицательная 66
- переносчика 155
- повторения 98
- поднесущая 154
- следования 169
- чувствительность 122
- модулятора 88
- шаг 50
- квантования 86
- ширина спектра сигнала 122
- — помех 167
- шкала квантования 86
- шум белый 12, 73
- квантования 86
- шумы флуктуационные 25
- экономичность кода 31
- экспандер 161
- энтропия 16
- приведенная 22
- эффективность кода 58
- ячейка «И» 57
- интегрирующая 136
- отрицания 57
- суммирующая 49
- триггерная 49

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава первая. Введение	5
1.1. Краткая история развития систем передачи информации	5
1.2. Общая схема системы передачи информации, или модель системы связи	8
1.3. Помехи радиосвязи	9
Глава вторая. Количественное определение информации	14
2.1. Единицы измерения информации и информативности	14
2.2. Энтропия дискретных сообщений	17
2.3. Энтропия непрерывных сообщений	21
2.4. Информационная емкость и производительность источника	27
Глава третья. Кодирование сообщений	29
3.1. Кодирование при отсутствии помех	29
3.2. Избыточные коды	34
3.3. Систематические коды (в узком понимании)	42
3.4. Циклические коды	47
3.5. Непрерывные коды	54
Глава четвертая. Аналитическое представление сигналов	59
4.1. Классификация сигналов	59
4.2. Периодические сигналы	60
4.3. Непериодические сигналы	67
4.4. Случайные сигналы	72
4.5. Корреляционный анализ сигналов	74
4.6. Спектральный анализ случайных процессов	79
Глава пятая. Дискретизация и квантование	82
5.1. Дискретизация сигнала — теорема отсчетов (Котельникова)	82
5.2. Квантование сигнала по уровню	85
Глава шестая. Модуляция сигналов	87
6.1. Амплитудная модуляция	87
6.2. Угловая модуляция	92
6.3. Амплитудно-импульсная модуляция	97
6.4. Широотно-импульсная модуляция	102

6.5. Временно-импульсная модуляция	107
6.6. Кодово-импульсная модуляция	111
6.7. Дельта-модуляция	116
Глава седьмая. Параметры каналов передачи информации	119
7.1. Пропускная способность канала	119
7.2. Согласование сигнала с каналом	122
7.3. Параметры основных разновидностей каналов связи	124
Глава восьмая. Помехоустойчивость систем	126
8.1. Понятие помехоустойчивости	126
8.2. Помехоустойчивость разных видов модуляции	127
8.3. Оптимальные методы приема	134
8.4. Структура оптимальных приемников	138
8.5. Прием точно известных сигналов	141
8.6. Обнаружение не полностью известного сигнала	145
Глава девятая. Многоканальные системы	149
9.1. Основы разделения каналов	149
9.2. Системы с частотным разделением каналов	153
9.3. Улучшение энергетики сигналов в системах с ЧРК	160
9.4. Искажения в системах с ЧРК	164
9.5. Системы с временным разделением каналов	168
9.6. Искажения в системах с ВРК	170
9.7. Системы передачи цифровой информации	175
Приложения	178
П1. Комбинаторика	178
П2. Элементы теории вероятностей	179
П3. Задачи	187
П3.1. Определение количества информации и избыточности	187
П3.2. Кодирование сообщений	192
П3.3. Аналитическое представление сигналов	204
П3.4. Дискретизация и квантование	223
П3.5. Модуляция сигналов	230
П3.6. Каналы передачи информации	235
П3.7. Помехоустойчивость	236
П3.8. Многоканальные системы	241
Литература	243
Предметный указатель	246

Мечеслав Петрович Свиланс
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

Обложка *В. Микане*.

Редактор *А. Тюрин*. Художественный редактор *А. Мейере*. Технический редактор *В. Калве*. Корректор *Е. Карлова*.

Сдано в набор 9 февраля 1972 г. Подписано к печати 5 января 1973 г. Типогр. бумага № 1, формат 84×108¹/₃₂. 7,88 физ. печ. л.; 13,24 усл. печ. л.; 12,27 уч.-изд. л. Тираж 3000 экз. ЯТ 02001. Цена 1 руб. 01 коп. Издательство «Зинатне», г. Рига, ул. Тургенева, 19. Отпечатано в Рижской бланочной типографии Государственного комитета Совета Министров Латвийской ССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Рига, ул. Горького, 6. Заказ № 985.

Замеченные опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
24	9-я снизу	$x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$	$\varphi_{\text{н}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$
27	8-я сверху	$\sigma_{\text{н}} \sqrt{2\pi} e = b - a.$	$\sigma_{\text{н}} \sqrt{2\pi} e = b - a.$
144	13-я снизу	$\frac{\Xi}{N_0} = \left(\sqrt{\ln \frac{1}{P_{\text{дт}}} - 1,4} + \right.$ $\left. + \sqrt{\ln \frac{1}{P_{\text{пр}}} - 1,4} \right).$	$\frac{\Xi}{N_0} = \left(\sqrt{\ln \frac{1}{P_{\text{дт}}} - 1,4} + \right.$ $\left. + \sqrt{\ln \frac{1}{P_{\text{пр}}} - 1,4} \right)^2.$

М. П. Свилакс. Элементы теории информации.

